

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

SIEBENTER BAND

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN COMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1906.

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE
BAND VII.

CARL FRIEDRICH GAUSS
WERKE

SIEBENTER BAND.



HERAUSGEGEBEN
VON DER
KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU
GÖTTINGEN.

IN COMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1906.

THEORIA
MOTUS CORPORUM
COELESTIUM

IN

SECTIONIBUS CONICIS SOLEM AMBIENTUM

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

HAMBURGI SUMTIBUS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER

1809.

Venditur

PARISIIS ap. Treuttel & Würtz.

STOCKHOLMIAE ap. A. Wiborg.

MADRITI ap. Sancha.

LONDINI ap. R. H. Evans.

PETROPOLI ap. Klostermann.

FLORENTIAE ap. Molini, Landi & Co.

AMSTELODAMI in libraria: Kunst- und Industrie-Comptoir, dicta.

PRAEFATIO.

Detectis legibus motus planetarum KEPLERI ingenio non defuerunt subsidia ad singulorum planetarum elementa ex observationibus eruenda. TYCHO BRAHE, a quo astronomia practica ad fastigium antea ignotum evecta erat, cunctos planetas per longam annorum seriem summa cura tantaque perseverantia observaverat, ut KEPLERO talis thesauri dignissimo heredi seligendi tantummodo cura restaret, quae ad scopum quemvis propositum facere viderentur. Nec mediocriter sublevabant hunc laborem motus planetarum medii summa iamdudum praecisione per observationes antiquissimas determinati.

Astronomi, qui post KEPLERUM conati sunt planetarum orbitas adiuumento observationum recentiorum vel perfectiorum adhuc accuratius dimetiri, iisdem vel adhuc maioribus subsidiis adiuti sunt. Neque enim amplius de elementis plane incognitis eliciendis agebatur, sed nota leviter tantum corrigenda arctioribusque limitibus circumscribenda erant.

Principium gravitationis universalis a summo NEWTON detectum campum plane novum aperuit, legibusque iisdem, quibus quinque planetas regi KEPLER expertus fuerat, levi tantum mutatione facta *omnia* corpora coelestia necessario obsequi debere edocuit, quorum quidem motus a vi Solis tantum moderentur. Scilicet observationum testimonio fretus KEPLER cuiusvis planetae orbitam ellipsem esse pronuntiaverat, in qua areae circa Solem, focus alterum ellipsis occupantem, uniformiter describantur, et quidem ita, ut tempora revolutionum in ellipsis diversis sint in ratione sesquialtera semiaxium maiorum. Contra NEWTON, principio gravitationis universalis posito, a priori demonstravit, corpora omnia a Solis vi attractiva gubernata in sectionibus conicis moveri debere, quarum quidem speciem unam, ellipses puta, planetae nobis exhibeant, dum species reliquae, parabolae et hyperbolae, pro aequae possibilibus haberi debeant, modo adsint corpora Solis vi velocitate debita occurrentia; Solem semper focus alterum sectionis conicae tenere; areas, quas corpus idem temporibus diversis circa Solem describat, his temporibus proportionales, areas denique a corporibus diversis, temporibus aequalibus, circa Solem descriptas, esse in ratione subduplicata semiparametrorum orbitarum: postrema harum legum, in motu elliptico cum ultima KEPLERI lege identica, ad motum parabolicum hyperbolicumque patet, ad quos haecce applicari nequit, revolutionibus deficientibus. Iam filum repertum, quo ducente labyrinthum motuum cometarum antea inaccessum ingredi licuit. Quod tam feliciter successit, ut omnium cometarum motibus, qui quidem accurate observati essent, explicandis sufficeret unica hypothesis, orbitas parabolae esse. Ita systema gravitationis universalis novos analysi triumphos eosque splendidissimos paraverat; cometaeque usque ad illum diem semper indomiti, vel si devicti videbantur mox seditiosi et rebelles, frena sibi iniici passi, atque ex ho-

stibus hospites redditi, iter suum in tramitibus a calculo delineatis prosecuti sunt, iisdem quibus planetae legibus aeternis religiose obtemperantes.

Iam in determinandis cometarum orbitis parabolicis ex observationibus difficultates suboriebantur longe maiores, quam in determinandis orbitis ellipticis planetarum, inde potissimum, quod cometae per brevius temporis intervallum visi delectum observationum ad haec vel illa imprimis commodarum non concedebant, sed iis uti geometram cgebant, quas fors obtulerat, ita ut methodos speciales in calculis planetarum adhibitis vix unquam in usum vocare licuerit. Magnus ipse NEWTON, primus saeculi sui geometra, problematis difficultatem haud dissimulavit, attamen, ceu exspectari poterat, ex hoc quoque certamine victor evasit. Multi post NEWTONum geometrae eidem problemati operam suam navaverunt, varia utique fortuna, ita tamen, ut nostris temporibus parum desiderandum relictum sit.

Verum enim vero non est praetermittendum, in hoc quoque problemate peropportune difficultatem diminui per cognitionem unius elementi sectionis conicae, quum, per ipsam suppositionem orbitae parabolicae, axis maior infinite magnus statuatur. Quippe omnes parabolae, siquidem situs negligatur, per solam maiorem minoremve distantiam verticis a foco inter se differunt, dum sectiones conicae generaliter spectatae varietatem infinities maiorem admittant. Haud equidem aderat ratio sufficiens, cur cometarum traectoriae absoluta praecisione parabolicae praesumerentur: quin potius infinite parum probabile censi debet, rerum naturam unquam tali suppositioni annuisse. Attamen quum constaret, phaenomena corporis coelestis in ellipsi vel hyperbola incedentis, cuius axis maior permagnus sit ratione parametri, prope perihelium perparum discrepare a motu in parabola, cui eadem verticis a foco distantia, differentiamque eo leviolem evadere, quo maior fuerit illa ratio axis ad parametrum; porro quum experientia docuisset, inter motum observatum motumque in orbita parabolica computatum vix unquam maiores differentias remanere, quam quae ipsis observationum erroribus (hic plerumque satis notabilibus) tuto tribui poterant: astronomi apud parabolam subsistendum esse rati sunt. Recte sane, quum omnino deessent subsidia, e quibus, num ullae quantaeve differentiae a parabola adsint, satis certo colligi potuisset. Excipere oportet cometam celebrem HALLEYanum, qui ellipsem valde oblongam describens in reditu ad perihelium pluries observatus tempus periodicum nobis patefecit: tunc autem axi maiori inde cognito computus reliquorum elementorum vix pro difficiliore habendus est, quam determinatio orbitae parabolicae. Silentio quidem praeterire non possumus, astronomos etiam in nonnullis aliis cometis per tempus aliquanto longius observatis determinationem aberrationis a parabola tentavisse: attamen omnes methodi ad hunc finem propositae vel adhibitae innituntur suppositioni, discrepantiam a parabola haud considerabilem esse, quo pacto in illis tentaminibus ipsa parabola antea iam computata cognitionem approximata singulorum elementorum (prae-

ter axem maiorem vel tempus revolutionis inde pendens) iam subministravit, levibus tantum mutationibus corrigendam. Praeterea fatendum est, omnia ista tentamina vix unquam aliquid certi decidere valuisse, si forte cometam anni 1770 excipias.

Quamprimum motum planetae novi anno 1781 detecti cum hypothesi parabolica conciliari non posse cognitum est, astronomi orbitam circularem illi adaptare inchoaverunt, quod negotium per calculum perfacilem ac simplicem absolvitur. Fausta quadam fortuna orbita huius planetae mediocriter tantum excentrica erat, quo pacto elementa per suppositionem illam eruta saltem approximationem qualemcunque suppeditabant, cui dein determinationem elementorum ellipticorum superstruere licuit. Accedebant plura alia peropportuna. Quippe tardus planetae motus perparvae orbitae ad planum eclipticae inclinatio non solum calculos longe simpliciores reddebant, methodosque speciales aliis casibus haud accommodandas in usum vocare concedebant, sed metum quoque dissipabant, ne planeta radiis Solis immersus postea quaeritantium curas eluderet (qui metus alias, praesertim si insuper lumen minus vividum fuisset, utique animos turbare potuisset), quo pacto accuratior orbitae determinatio tuto differri poterat, donec ex observationibus frequentioribus magisque remotis eligere liceret, quae ad propositum maxime commodae viderentur.

In omnibus itaque casibus, ubi corporum coelestium orbitas ex observationibus deducere oportuit, commoda aderant quaedam haud spernenda methodorum specialium applicationem suadentia vel saltem permittentia, quorum commodorum potissimum id erat, quod per suppositiones hypotheticas cognitionem approximatum quorundam elementorum iamiam acquirere licuerat, antequam calculus elementorum ellipticorum susciperetur. Nihilominus satis mirum videtur, problema generale

Determinare orbitam corporis coelestis, absque omni suppositione hypothetica, ex observationibus tempus haud magnum complectentibus neque adeo delectum, pro applicatione methodorum specialium, patientibus

usque ad initium huius saeculi penitus propemodum neglectum esse, vel saltem a nemine serio ac digne tractatum, quum certe theoreticis propter difficultatem atque elegantiam sese commendare potuisset, etiamsi apud practicos de summa eius utilitate nondum constaret. Scilicet invaluerat apud omnes opinio, *impossibilem* esse talem determinationem completam ex observationibus breviori temporis intervallo inclusis, male sane fundata, quum nunc quidem certissimo iam evictum sit, orbitam corporis coelestis ex observationibus bonis paucos tantummodo dies complectentibus, absque ulla suppositione hypothetica, satis approximate iam determinari posse.

Incideram in quasdam ideas, quae ad solutionem problematis magni de quo dixi facere videbantur, mense Septembri a. 1801, tunc in labore plane diverso occupatus. Haud raro in tali casu, ne nimis a grata investigatione distrahamur, neglectas interire sinimus idearum associationes, quae attentius examinatae uberrimos fructus ferre potuissent. Forsan et illis ideolis eadem fortuna instabat, nisi peropportune incidissent in tempus, quo nullum sane faustius ad illas conservandas atque fovendas eligi potuisset. Scilicet eodem circiter tempore rumor de planeta novo Ian. 1 istius anni in specula Panormitana detecto per omnium ora volitabat, moxque ipsae observationes inde ab epocha illa usque ad 11 Febr. ab astronomo praestantissimo PIAZZI institutae ad notitiam publicam pervenerunt. Nullibi sane in annalibus astronomiae occasionem tam gravem reperimus, vixque gravior excogitari posset, ad dignitatem istius problematis luculentissime ostendendam, quam tunc in tanto discrimine urgenteque necessitate, ubi omnis spes, atomum planetariam post annum fere elapsam in coelis inter innumeras stellulas reinveniendi, unice pendebat ab orbitae cognitione satis approximata, solis illis pauculis observationibus superstruenda. Unquamne opportunius experiri potuissem, ecquid valeant ideolae meae ad usum practicum, quam si tunc istis ad determinationem orbitae Cereris uterer, qui planeta inter 41 illos dies geocentrice arcum trium tantummodo graduum descriperat, et post annum elapsam in coeli plaga longissime illinc remota indagari debebat? Prima haecce methodi applicatio facta est mense Oct. 1801, primaque nox serena, ubi planeta ad normam numerorum inde deductorum quaesitus est^{*)}, transfugam observationibus reddidit. Tres alii planetae novi inde ab illo tempore detecti occasiones novas suppeditaverunt methodi efficaciam ac generalitatem examinandi et comprobandi.

Optabant plures astronomi, statim post reinventionem Cereris, ut methodos ad istos calculos adhibitas publici iuris facerem; verum obstabant plura, quominus amicis hisce sollicitationibus tunc morem gererem: negotia alia, desiderium rem aliquando copiosius pertractandi, imprimisque expectatio, continuatam in hac disquisitione occupationem varias solutionis partes ad maius generalitatis, simplicitatis et elegantiae fastigium evecturam esse. Quae spes quum me haud fefellerit, non esse arbitror, cur me huius morae poeniteat. Methodi enim ab initio adhibitae identidem tot tantasque mutationes passae sunt, ut inter modum, quo olim orbita Cereris calculata est, institutionemque in hoc opere traditam vix ullum similitudinis vestigium remanserit. Quamquam vero a proposito meo alienum esset, de cunctis his disquisitionibus paulatim magis magisque perfectis narrationem completam perscribere, tamen in pluribus occasionibus, praesertim quoties de problemate quodam graviore agebatur, methodos anteriores quoque haud omnino supprimendas esse censeui. Quin potius praeter problematum principalium solutiones plurima, quae in

^{*)}Dec. 7, 1801 a clar. de ZACH.

occupatione satis longa circa motus corporum coelestium in sectionibus conicis vel propter elegantiam analyticam vel imprimis propter usum practicum attentione digniora se mihi obtulerunt, in hoc opere exsequutus sum. Semper tamen vel rebus vel methodis mihi propriis maiorem curam dicavi, nota leviter tantum, quatenusque rerum nexus postulare videbatur, attingens.

Totum itaque opus in duas partes dividitur. In Libro primo evolvuntur relationes inter quantitates, a quibus motus corporum coelestium circa Solem secundum KEPLERI leges pendet, et quidem in duabus primis Sectionibus relationes eae, ubi unicus tantum locus per se consideratur, in Sectione tertia et quarta vero eae, ubi plures loci inter se conferuntur. Illae continent expositionem methodorum tum vulgo usitatarum, tum potissimum aliarum illis ni fallor ad usum practicum longe praeferendarum, per quas ab elementis cognitis ad phaenomena descenditur; hae problemata multa gravissima tractant, quae viam ad operationes inversas sternunt. Scilicet quum ipsa phaenomena ex artificiosa intricataque quadam complicatione elementorum componantur, hanc texturae rationem penitus perspexisse oportet, antequam filorum explicationem operisque in elementa sua resolutionem cum spe successus suscipere liceat. Comparantur itaque in Libro primo instrumenta atque subsidia, per quae dein in Libro altero arduum hoc negotium ipsum perficitur: maxima laboris pars tunc iam in eo consistit, ut illa subsidia rite colligantur, ordine apto disponantur et in scopum propositum dirigantur.

Problemata graviora ad maximam partem per exempla idonea illustrata sunt, semper quoties quidem licuit ab observationibus non fictis desumta. Ita non solum methodorum efficaciae maior fiducia conciliabitur, ususque clarius ob oculos ponetur, sed id quoque cautum iri spero, ut nec minus exercitati a studio harum rerum deterreantur, quae procul dubio partem foecundissimam et pulcherrimam astronomiae theoriae constituunt.

Scripsi Gottingae d. 28 Martii 1809.

CONTENTA.

LIBER PRIMUS.

Relationes generales inter quantitates, per quas corporum coelestium motus circa Solem definiuntur.

Sectio I. *Relationes ad locum simplicem in orbita spectantes.*

Sectio II. *Relationes ad locum simplicem in spatio spectantes.*

Sectio III. *Relationes inter locos plures in orbita.*

Sectio IV. *Relationes inter locos plures in spatio.*

LIBER SECUNDUS.

Investigatio orbitalum corporum coelestium ex observationibus geocentricis.

Sectio I. *Determinatio orbitae e tribus observationibus completis.*

Sectio II. *Determinatio orbitae e quatuor observationibus, quarum duae tantum completae sunt.*

Sectio III. *Determinatio orbitae observationibus quocunque quam proxime satisficientis.*

Sectio IV. *De determinatione orbitalum, habita ratione perturbationum.*

TABULAE.

LIBER PRIMUS.

RELATIONES GENERALES INTER QUANTITATES PER QUAS
CORPORUM COELESTIUM MOTUS CIRCA SOLEM
DEFINIUNTUR.

SECTIO PRIMA.

Relationes ad locum simplicem in orbita spectantes.

1.

Corporum coelestium motus in hoc opere eatenus tantum considerabimus, quatenus a Solis vi attractiva gubernantur. Excluduntur itaque ab instituto nostro omnes planetae secundarii, excluduntur perturbationes, quas primarii in se invicem exercent, excluditur omnis motus rotatorius. Corpora mota ipsa ut puncta mathematica spectamus, motusque omnes ad normam legum sequentium fieri supponimus, quae igitur pro basi omnium disquisitionum in hoc opere sunt habendae.

I. Motus cuiusvis corporis coelestis perpetuo fit in eodem plano, in quo simul centrum Solis est situm.

II. Traiectoria a corpore descripta est sectio conica focus in centro Solis habens.

III. Motus in ista traiectoria fit ita, ut areae spatiorum in diversis temporum intervallis circa Solem descriptorum hisce intervallis ipsis sint proportionales. Temporibus igitur et spatiis per numeros expressis, spatium quodvis per tempus intra quod describitur divisum quotientem invariabilem suppeditat.

IV. Pro corporibus diversis circa Solem se moventibus horum quotientium quadrata sunt in ratione composita parametrorum orbitis respondentium, atque aggregatorum massae Solis cum massis corporum motorum.

Designando itaque per $2p$ parametrum orbitae, in qua corpus incedit, per μ quantitatem materiae huius corporis (posita massa Solis = 1), per $\frac{1}{2}g$ aream quam tempore t circa Solem describit, erit $\frac{g}{t\sqrt{p\cdot\sqrt{(1+\mu)}}}$ numerus pro omnibus corporibus coelestibus constans. Quum igitur nihil intersit, quonam corpore ad valorem huius numeri determinandum utamur, e motu terrae eum depromemus, cuius distantiam mediam a Sole pro unitate distantiarum adoptabimus: unitas temporum semper nobis erit dies medius solaris. Denotando porro per π rationem circumferentiae circuli ad diametrum, area ellipsis integrae a terra descriptae manifesto erit $\pi\sqrt{p}$, quae igitur poni debet = $\frac{1}{2}g$, si pro t accipitur annus sideralis, quo pacto constans nostra fit = $\frac{2\pi}{t\sqrt{(1+\mu)}}$. Ad valorem numericum huius constantis, in sequentibus per k denotandae,

explorandum, statuemus, secundum novissimam determinationem, annum sideralem sive $t = 365,2563835$, massam terrae sive $\mu = \frac{1}{354710} = 0,000\,0028\,192$, unde prodit

$\log 2\pi$		0,798 1798 684
Compl. $\log t$		7,437 4021 852
Compl. $\log \sqrt{1 + \mu}$		9,999 9993 878
$\log k$		8,235 5814 414
$k =$		0,017 2020 9895

2.

Leges modo expositae ab iis, quas KEPLERUS noster detexit, aliter non differunt, nisi quod in forma ad omnia sectionum conicarum genera patente exhibitae sunt, actionisque corporis moti in Solem, a qua pendet factor $\sqrt{(1 + \mu)}$, ratio est habita. Si has leges tamquam phaenomena ex innumeris atque indubiis observationibus deprompta consideramus, geometria docebit, qualis actio in corpora circa Solem mota ab hoc exerceri debeat, ut ista phaenomena perpetuo producantur. Hoc modo invenitur, Solis actionem in corpora ambientia perinde se exercere, ac si vis attractiva, cuius intensitas quadrato distantiae reciproce proportionalis esset, corpora versus centrum Solis propelleret. Quodsi vero vice versa a suppositione talis vis attractivae tamquam principio proficiscimur, phaenomena illa ut consequentiae necessariae inde derivantur. Hic leges tantum enarravisse sufficiat, quarum nexui cum principio gravitationis hoc loco eo minus opus erit immorari, quum post summum NEWTON auctores plures hoc argumentum tractaverint, interque eos ill. LAPLACE in opere perfectissimo, *Mécanique Céleste*, tali modo, ut nihil amplius desiderandum reliquerit.

3.

Disquisitiones circa motus corporum coelestium, quatenus fiunt in sectionibus conicis, theoriam completam huius curvarum generis nequitquam postulant: quin adeo unica aequatio generalis nobis sufficiet, cui omnia superstruantur. Et quidem maxime e re esse videtur, eam ipsam eligere, ad quam tamquam aequationem characteristicam deferimur, dum curvam secundum attractionis legem descriptam investigamus. Determinando scilicet quemvis corporis locum in orbita sua per distantias x, y a duabus rectis in plano orbitae ductis atque in centro Solis i. e. in altero curvae foco sub angulis rectis se secantibus, et denotando insuper corporis distantiam a Sole (positive semper accipiendam) per r , habebimus inter r, x, y aequationem linearem $r + \alpha x + \beta y = \gamma$, in qua α, β, γ quantitates constantes exprimunt, et quidem γ quantitatem natura sua semper positivam. Mutando rectarum, ad quas distantiae x, y referuntur, situm per se arbitrarium, si modo sub angulis rectis se intersectare perseverent, manifesto forma aequationis valorque ipsius γ non mutabuntur, α et β autem alios aliosque valores nanciscentur, patetque, situm illum ita determinari posse, ut β evadat $= 0$, α autem saltem non negativa. Hoc modo scribendo pro α, γ resp. e, p , aequatio nostra induit formam $r + ex = p$. Recta, ad quam tunc distantiae y referuntur, *linea apsidum* vocatur, p *semiparameter*, e *excentricitas*; sectio conica denique *ellipsis*, *parabola* vel *hyperbolae* nomine distinguitur, prout e unitate minor, unitati aequalis, vel unitate maior est.

Ceterum facile intelligitur, situm lineae apsidum per conditiones traditas plene determinatum esse, unico casu excepto, ubi tum α tum β iam per se

erant = 0; in hoc casu semper fit $r = p$, ad quascunque rectas distantiae x, y referantur. Quoniam itaque habetur $e = 0$, curva (quae erit circulus) secundum definitionem nostram ellipsium generi annumeranda est, id vero singulare habet, quod apsidum positio prorsus arbitraria manet, siquidem istam notionem ad hunc quoque casum extendere placet.

4.

Pro distantia x iam angulum v introducamus, qui inter lineam apsidum et rectam a Sole ad corporis locum ductam (*radius vectorem*) continetur, et quidem hic angulus ab ea lineae apsidum parte ubi distantiae x sunt positivae incipiat, versusque eam regionem, quorsum motus corporis dirigitur, crescere supponatur. Hoc modo fit $x = r \cos v$, adeoque formula nostra $r = \frac{p}{1+e \cos v}$, unde protinus derivantur conclusiones sequentes:

I. Pro $v = 0$ valor radii vectoris r fit minimum, puta $= \frac{p}{1+e}$: hoc punctum *perihelium* dicitur.

II. Valoribus oppositis ipsius v respondent valores aequales ipsius r ; quocirca linea apsidum sectionem conicam in duas partes aequales dirimit.

III. In *ellipsi* r inde a $v = 0$ continuo crescit, donec valorem maximum $\frac{p}{1-e}$ assequatur in *aphelio* pro $v = 180^\circ$; post aphelium eodem modo rursus decrescit, quo ante increverat, donec pro $v = 360^\circ$ perihelium denuo attigerit. Lineae apsidum pars perihelio hinc aphelio illinc terminata *axis maior* dicitur; hinc semiaxis maior, qui etiam *distantia media* vocatur, fit $= \frac{p}{1-ee}$; distantia puncti in medio axe iacentis (*centri ellipsis*) a foco erit $\frac{ep}{1-ee} = ea$, denotando per a semiaxem maiorem.

IV. Contra in *parabola* proprie non datur aphelium, sed r ultra omnes limites augetur, quo propius v ad $+180^\circ$ vel -180° accedit. Pro $v = \pm 180^\circ$ valor ipsius r fit infinitus, quod indicat, curvam a linea apsidum a parte perihelio opposita non secari. Quare proprie quidem loquendo de axi maiore vel centro curvae sermo esse nequit, sed secundum analyseos usum consuetum per ampliationem formularum in ellipsi inventarum axi maiori valor infinitus tribuitur, centrumque curvae in distantia infinita a foco collocatur.

V. In *hyperbola* denique v inter limites adhuc arctiores coërcetur, scilicet inter $v = -(180^\circ - \psi)$ et $v = +(180^\circ - \psi)$, denotando per ψ angulum, cuius cosinus $= \frac{1}{e}$. Dum enim v ad hosce limites appropinquat, r in infinitum crescit; si vero pro v alter horum limitum ipse acciperetur, valor ipsius r infinitus prodiret, quod indicat, hyperbolam a recta ad lineam apsidum angulo $180^\circ - \psi$ supra vel infra inclinata omnino non secari. Pro valoribus hoc modo exclusis, puta a $180^\circ - \psi$ usque ad $180^\circ + \psi$, formula nostra ipsi r valorem negativum assignat; recta scilicet sub tali angulo contra lineam apsidum inclinata ipsa quidem hyperbolam non secat, si vero retro producitur, in alteram hyperbolae partem incidit, quam a prima parte omnino separatam versusque eum focum quem Sol occupat convexam esse constat. Sed in disquisitione nostra, quae

ut iam monuimus suppositioni innititur, r sumi positive, ad hanc alteram hyperbolae partem non respiciemus, in qua corpus coeleste tale tantummodo incedere posset, in quod Sol vim non attractivam sed secundum easdem leges repulsivam exerceret. — Proprie itaque loquendo etiam in hyperbola non datur aphelium; pro aphelii analogo id partis aversae punctum, quod in linea apsidum iacet et quod respondet valoribus $v = 180^0$, $r = -\frac{p}{e-1}$, haberi poterit. Quodsi ad instar ellipsis valorem expressionis $\frac{p}{1-ee}$ etiam hic, ubi negativus evadit, semiaxem maiorem hyperbolae dicere lubet, duplum huius quantitatis puncti modo commemorati distantiam a perihelio simulque situm, ei qui in ellipsi locum habet oppositum, indicat. Perinde $\frac{ep}{1-ee}$, i. e. distantia puncti inter haec duo puncta medii (centri hyperbolae) a foco, hic obtinet valorem negativum propter situm oppositum.

5.

Angulum v , qui pro parabola intra terminos -180^0 et $+180^0$, pro hyperbola intra $-(180^0 - \psi)$ et $+(180^0 - \psi)$ coërcetur, pro ellipsi vero circulum integrum periodis perpetuo renovatis percurrit, corporis moti *anomaliam veram* nuncupamus. Hactenus quidem omnes fere astronomi anomaliam veram in ellipsi non a perihelio sed ab aphelio inchoare solebant, contra analogiam parabolae et hyperbolae, ubi aphelium non datur adeoque a perihelio incipere oportuit: nos analogiam inter omnia sectionum conicarum genera restituere eo minus dubitavimus, quod astronomi gallici recentissimi exemplo suo iam praeiverunt.

Ceterum expressionis $r = \frac{p}{1+e \cos v}$ formam saepius aliquantulum mutare convenit; imprimis notentur formae sequentes:

$$r = \frac{p}{1 + e - 2e \sin \frac{1}{2}v^2} = \frac{p}{1 - e + 2e \cos \frac{1}{2}v^2}$$

$$r = \frac{p}{(1 + e) \cos \frac{1}{2}v^2 + (1 - e) \sin \frac{1}{2}v^2}.$$

In parabola itaque habemus $r = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2}v^2}$; in hyperbola expressio sequens imprimis est commoda $r = \frac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v+\psi) \cos \frac{1}{2}(v-\psi)}$.

6.

Progredimur iam ad comparisonem motus cum *tempore*. Statuendo ut in art. 1 spatium tempore t circa Solem descriptum $= \frac{1}{2}g$, massam corporis moti $= \mu$, posita massa Solis $= 1$, habemus $g = kt\sqrt{p} \cdot \sqrt{1 + \mu}$. Differentiale spatii autem fit $= \frac{1}{2}rr dv$, unde prodit $kt\sqrt{p} \cdot \sqrt{1 + \mu} = \int rr dv$, hoc integrali ita sumto, ut pro $t = 0$ evanescat. Haec integratio pro diversis sectionum conicarum generibus diverso modo tractari debet, quamobrem singula iam seorsim considerabimus, initiumque ab ELLIPSI faciemus.

Quum r ex v per fractionem determinetur, cuius denominator e duabus partibus constat, ante omnia hoc incommodum per introductionem quantitatis novae pro v auferemus. Ad hunc finem statuemus $\text{tang } \frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \text{tang } \frac{1}{2}E$, quo pacto formula ultima art. praec. pro r praebet

$$r = \frac{p \cos \frac{1}{2}E^2}{(1+e) \cos \frac{1}{2}v^2} = p \left(\frac{\cos \frac{1}{2}E^2}{1+e} + \frac{\sin \frac{1}{2}E^2}{1-e} \right) = \frac{p}{1-ee}(1-e \cos E).$$

Porro fit $\frac{dE}{\cos \frac{1}{2}E^2} = \frac{dv}{\cos \frac{1}{2}v^2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, adeoque $dv = \frac{p dE}{r\sqrt{(1-ee)}}$; hinc

$$rr dv = \frac{r \dot{p} dE}{\sqrt{(1-ee)}} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}(1-e \cos E) dE,$$

atque integrando

$$kt\sqrt{p}\sqrt{(1+\mu)} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}(E - e \sin E) + \text{Const.}$$

Quodsi itaque tempus a transitu per perihelium inchoamus, ubi $v = 0$, $E = 0$ adeoque $\text{Const.} = 0$, habebimus, propter $\frac{p}{1-ee} = a$,

$$E - e \sin E = \frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

In hac aequatione angulus auxiliaris E , qui *anomaliam excentricam* dicitur, in partibus radii exprimi debet. Manifesto autem hunc angulum in gradibus etc. retinere licet, si modo etiam $e \sin E$ atque $\frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ eodem modo exprimantur; in minutis secundis hae quantitates exprimentur, si per numerum 206264,806 multiplicentur. Multiplicatione quantitatis posterioris supersedere possumus, si statim quantitatem k in secundis expressam adhibemus, adeoque, loco valoris supra dati, statuimus $k = 3548'',18761$, cuius logarithmus $= 3,550\,0065\,746$. — Hoc modo expressa quantitas $\frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ *anomaliam mediam* vocatur, quae igitur in ratione temporis crescit, et quidem quotidie augmento $\frac{k\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$, quod *motus medius diurnus* dicitur. Anomaliam mediam per M denotabimus.

7.

In perihelio itaque anomaliam vera, anomaliam excentricam et anomaliam mediam sunt $= 0$; crescente dein vera, etiam excentrica et media augentur, ita tamen, ut excentrica minor maneat quam vera, mediaque minor quam excentrica, usque ad aphelium, ubi omnes tres simul fiunt $= 180^0$; hinc vero usque ad perihelium excentrica perpetuo est maior quam vera, mediaque maior quam excentrica, donec in perihelio omnes tres fiant $= 360^0$, sive, quod eodem redit,

omnes iterum = 0. Generaliter vero patet, si anomaliae verae v respondeat excentrica E mediaque M , verae $360^0 - v$ respondere excentricam $360^0 - E$ atque mediam $360^0 - M$. Differentia inter anomaliam veram et mediam $v - M$ *aequatio centri* appellatur, quae itaque a perihelio ad aphelium positiva, ab aphelio ad perihelium negativa est, in perihelio ipso autem et aphelio evanescit. Quum igitur v et M circulum integrum a 0 usque ad 360^0 eodem tempore percurrant, tempus revolutionis unius, quod et *tempus periodicum* dicitur, in diebus expressum invenitur, dividendo 360^0 per motum diurnum $\frac{k\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$, unde patet, pro corporibus diversis circa Solem revolventibus quadrata temporum periodicorum cubis distantiarum mediarum proportionalia esse, quatenus ipsorum massas, aut potius massarum inaequalitatem, negligere liceat.

8.

Eas iam inter anomalias atque radium vectorem relationes, quae imprimis attentione dignae sunt, colligamus, quarum deductio nemini in analysi trigonometrica vel mediocriter versato difficultates obiicere poterit. Pluribus harum formularum concinnitas maior conciliatur, introducto pro e angulo cuius sinus est $= e$. Quo per φ designato, habemus $\sqrt{(1 - ee)} = \cos \varphi$, $\sqrt{(1 + e)} = \cos(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$, $\sqrt{(1 - e)} = \cos(45^0 + \frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \tan(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$, $\sqrt{(1 + e)} + \sqrt{(1 - e)} = 2 \cos \frac{1}{2}\varphi$, $\sqrt{(1 + e)} - \sqrt{(1 - e)} = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$. Ecce iam relationes praecipuas inter a , p , r , e , φ , v , E , M . ^[*)]

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & p = a \cos \varphi^2 \\
 \text{II.} \quad & r = \frac{p}{1 + e \cos v} \\
 \text{III.} \quad & r = a(1 - e \cos E) \\
 \text{IV.} \quad & \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}, \quad \text{sive} \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\
 \text{V.} \quad & \sin \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos E)} \\
 & = \sin \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e \cos v}} = \sin \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r(1 - e)}{p}} \\
 & = \sin \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r}{a(1 + e)}}
 \end{aligned}$$

[*] Handschriftliche Bemerkung:]

$$\begin{aligned}
 1 &= \cos v \cos E + \frac{\sin v \sin E}{\cos \varphi}, \\
 \cos \varphi &= \frac{\sin v \sin E}{1 - \cos v \cos E}, \\
 \sin \varphi &= \frac{\cos E - \cos v}{1 - \cos v \cos E}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{VI.} \quad \cos \frac{1}{2}E &= \sqrt{\frac{1}{2}}(1 + \cos E) \\
 &= \cos \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{1+e}{1+e \cos v}} = \cos \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r(1+e)}{p}} \\
 &= \cos \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r}{a(1-e)}}
 \end{aligned}$$

$$\text{VII.} \quad \tan \frac{1}{2}E = \tan \frac{1}{2}v \tan(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$$

$$\text{VIII.} \quad \sin E = \frac{r \sin v \cos \varphi}{p} = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IX.} \quad r \cos v &= a(\cos E - e) \\
 &= 2a \cos(\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\varphi + 45^0) \cos(\frac{1}{2}E - \frac{1}{2}\varphi - 45^0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{X.} \quad \sin \frac{1}{2}(v - E) &= \sin \frac{1}{2}\varphi \sin v \sqrt{\frac{r}{p}} \\
 &= \sin \frac{1}{2}\varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{XI.} \quad \sin \frac{1}{2}(v + E) &= \cos \frac{1}{2}\varphi \sin v \sqrt{\frac{r}{p}} \\
 &= \cos \frac{1}{2}\varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}
 \end{aligned}$$

$$\text{XII.} \quad M = E - e \sin E.$$

9.

Si perpendiculum e puncto quocunque ellipsis in lineam apsidum demissum retro producitur, usquedum circulo e centro ellipsis radio a descripto occurrat, inclinatio eius radii, qui puncto intersectionis respondet, contra lineam apsidum (simili modo intellecta ut supra pro anomalia vera) anomaliae excentricae aequalis erit, ut nullo negotio ex aequ. IX art. praec. deducitur. Porro patet, $r \sin v$ esse distantiam cuiusque puncti ellipsis a linea apsidum; quae quum per aequ. VIII fiat $= a \cos \varphi \sin E$, maxima erit pro $E = 90^0$, i. e. in centro ellipsis. Haecce distantia maxima, quae fit $= a \cos \varphi = \frac{p}{\cos \varphi} = \sqrt{ap}$, *semiaxis minor* appellatur. In foco ellipsis, i. e. pro $v = 90^0$, distantia ista manifesto fit $= p$, sive semiparametro aequalis.

10.

Aequationes art. 8 omnia continent, quae ad computum anomaliae excentricae et mediae e vera, vel excentricae et verae e media requiruntur. Pro deducenda excentrica e vera vulgo formula VII adhibetur; plerumque tamen praestat ad hunc finem aequ. X uti, praesertim quoties excentricitas non

nimis magna est, in quo casu E per X maiori praecisione computari potest, quam per VII. Praeterea adhibita aequatione X , logarithmus sinus E , qui in XII requiritur, protinus per aequationem VIII habetur, quem adhibita VII e tabulis arcessere oporteret; si igitur in illa methodo hic logarithmus etiam e tabulis desumitur, simul calculi recte instituti confirmatio hinc obtinetur. Huiusmodi calculi examina et comprobationes magni semper sunt aestimanda, quibus igitur consulere in omnibus methodis in hoc opere tradendis, ubi quidem commode fieri potest, assiduae nobis ubique curae erit. — Ad maiorem illustrationem exemplum complete calculatum adiungimus.

Data sint $v = 310^0 55' 29'', 64$, $\varphi = 14^0 12' 1'', 87$, $\log r = 0,3307640$; quaeruntur p , a , E et M .

$\log \sin \varphi$		9,389 7262
$\log \cos v$		9,816 2872
		9,206 0134
		unde $e \cos v = 0,1606991$
$\log(1 + e \cos v)$		0,064 7197
$\log r$		0,330 7640
$\log p$		0,395 4837
$\log \cos \varphi^2$		9,973 0448
$\log a$		0,422 4389
$\log \sin v$		9,878 2740 _n ^{*)}
$\log \sqrt{\frac{p}{r}}$		0,032 3598.5
		9,845 9141.5 _n
$\log \sin \frac{1}{2}\varphi$		9,092 0395
$\log \sin \frac{1}{2}(v - E)$		8,937 9536.5 _n

hinc

$$\frac{1}{2}(v - E) = -4^0 58' 22'', 94; \quad v - E = -9^0 56' 45'', 88;$$

$$E = 320^0 52' 15'', 52.$$

Porro fit

$\log e$		9,389 7262
$\log 206264,8$	...	5,314 4251
$\log e$ in sec:	...	4,704 1513
$\log \sin E$		9,800 0767 _n
		4,504 2280 _n

^{*)}Litera n logarithmo affixa indicat, numerum cui respondet negativum esse.

Calculus pro $\log \sin E$ per formulam VIII.

$\log \frac{r}{p} \sin v$		9,813 5543 _n
$\log \cos \varphi$		9,986 5224
$\log \sin E$		9,800 0767 _n

hinc

$$e \sin E \text{ in secundis} = -31932'',14 = -8^0 52' 12'',14$$

$$\text{atque } M = 329^0 44' 27'',66.$$

Per formulam VII calculus pro E ita se haberet:

$\frac{1}{2}v = 155^0 27' 44'',82$		
$\log \tan \frac{1}{2}v$		9,659 4579 _n
$45^0 - \frac{1}{2}\varphi = 37^0 53' 59'',065$		
$\log \tan(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$	...	9,891 2427
$\log \tan \frac{1}{2}E$		9,550 7006 _n

unde $\frac{1}{2}E = 160^0 26' 7'',76$ atque $E = 320^0 52' 15'',52$ ut supra.

11.

Problema inversum, celebre sub nomine *problematis KEPLERI*, scilicet ex anomaliam media invenire veram atque radium vectorem, longe frequentioris usus est. Astronomi aequationem centri per seriem infinitam secundum sinus angulorum M , $2M$, $3M$ etc. progredientem exhibere solent, quorum sinuum coëfficientes singuli et ipsi sunt series secundum potestates excentricitatis in infinitum excurrentes. Huic formulae pro aequatione centri, quam plures auctores evolverunt, hic immorari eo minus necessarium duximus, quod, nostro quidem iudicio, ad usum practicum, praesertim si excentricitas perparva non fuerit, longe minus idonea est, quam methodus indirecta, quam itaque in ea forma, quae maxime commoda nobis videtur, aliquanto fusius explicabimus.

Aequatio XII, $E = M + e \sin E$, quae ad transcendentium genus referenda est solutionemque per operationes finitas directas non admittit, tentando solvenda est, incipiendo a valore quodam approximato ipsius E , qui per methodos idoneas toties repetitas corrigitur, usque dum illi aequationi exacte satisfaciatur, i. e. vel omni quam tabulae sinuum permittunt praecisione, vel ea saltem, quae ad scopum propositum sufficit. Quodsi hae correctiones haud temere sed per normam tutam atque certam instituuntur, vix ullum discrimen essentiale inter methodum talem indirectam atque solutionem per series adest, nisi quod in illa valor primus incognitae aliquatenus est arbitrarius, quod potius pro lucro habendum, quum valor apte electus correctiones insigniter accelerare permittat. Supponamus, ϵ esse valorem approximatum ipsius

E , atque x correctionem illi adhuc adiciendam (in secundis expressam), ita ut valor $E = \epsilon + x$ aequationi nostrae exacte satisfaciatur. Computetur $e \sin \epsilon$ in secundis per logarithmos, quod dum perficitur, simul e tabulis notetur variatio ipsius $\log \sin \epsilon$ pro $1''$ variatione ipsius ϵ , atque variatio $\log e \sin \epsilon$ pro variatione unius unitatis in numero $e \sin \epsilon$; sint hae variationes sine respectu signorum resp. λ, μ , ubi vix opus est monere, utrumque logarithmum per aequae multas figuras decimales expressum supponi. Quodsi iam ϵ ad verum ipsius E valorem tam prope iam accedit, ut variationes logarithmi sinus ab ϵ usque ad $\epsilon + x$, variationesque logarithmi numeri ab $e \sin \epsilon$ usque ad $e \sin(\epsilon + x)$ pro uniformibus habere liceat, manifesto statui poterit $e \sin(\epsilon + x) = e \sin \epsilon \pm \frac{\lambda x}{\mu}$, signo superiori pro quadrante primo et quarto, inferiori pro secundo et tertio valente. Quare quum sit $\epsilon + x = M + e \sin(\epsilon + x)$, fit $x = \frac{\mu}{\mu \mp \lambda}(M + e \sin \epsilon - \epsilon)$, valorque verus ipsius E sive $\epsilon + x = M + e \sin \epsilon \pm \frac{\lambda}{\mu \mp \lambda}(M + e \sin \epsilon - \epsilon)$, signis ea qua diximus ratione determinatis. Ceterum facile perspicitur, esse sine respectu signi $\mu : \lambda = 1 : e \cos \epsilon$, adeoque semper $\mu > \lambda$, unde concluditur, in quadrante primo et ultimo $M + e \sin \epsilon$ iacere inter ϵ atque $\epsilon + x$, in secundo ac tertio vero $\epsilon + x$ inter ϵ atque $M + e \sin \epsilon$, quae regula attentionem ad signa sublevare potest. Si valor suppositus ϵ nimis adhuc a vero aberraverat, quam ut suppositionem supra traditam pro satis exacta habere liceret, certe per hanc methodum invenietur valor multo propior, quo eadem operatio iterum adhuc, pluriesve si opus videtur, repetenda erit. Nullo vero negotio patet, si differentia valoris primi ϵ a vero tamquam quantitas ordinis primi spectetur, errorem valoris novi ad ordinem secundum referendum fore, et per operationem iteratam ad ordinem quartum, octavum etc. deprimi. Quo minor insuper fuerit excentricitas, eo velocius correctiones successivae convergent.

12.

Valor approximatus ipsius E , a quo calculus incipi possit, plerumque satis obvius erit, praesertim ubi problema pro pluribus valoribus ipsius M solvendum est, e quibus quidam iam absoluti sunt. Deficientibus omnibus aliis subsidiis id saltem constat, quod E inter limites M et $M \pm e$ iacere debet (excentricitate e in secundis expressa, signoque superiori in quadrante primo et secundo, inferiori in tertio et quarto accepto); quocirca pro valore initiali ipsius E vel M vel valor secundum aestimationem qualemcunque auctus seu deminutus adoptari poterit. Vix opus est monere, calculum primum, quoties a valore parum accurato inchoetur, anxia praecisione haud indigere, tabulasque minores quales cel. LALANDE curavit, abunde sufficere. Praeterea, ut calculi commoditati consulatur, tales semper valores pro ϵ eligentur, quorum sinus e tabulis ipsis absque interpolatione excerpere licet; puta in minutis seu secundorum denariis completis, prout tabulae per singula minuta seu per singulos secundorum denarios progredientes adhibentur. Ceterum modifica-

tiones, quas haec praecepta patiuntur, si anguli secundum divisionem novam decimalem exprimantur, quisque sponte evolvere poterit.

13.

Exemplum. Sit excentricitas eadem quae in exemplo art. 10,

$$M = 332^0 28' 54'', 76.$$

Hic igitur est $\log e$ in secundis 4,704 1513, adeoque $e = 50600'' = 14^0 3' 20''$. Quare quum hic E minor esse debeat quam M , statuemus ad calculum primum $\epsilon = 326^0$, unde per tabulas minores fit

$$\begin{array}{rcl} \log \sin \epsilon & \dots & 9,74756_n, \quad \text{mutatio pro } 1' \dots 19, \text{ unde} \\ & & \lambda = 0,32 \\ \log e \text{ in sec} & \dots & 4,70415 \\ \hline & & 4,45171_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{hinc } e \sin \epsilon = -28295'' = -7^0 51' 35''. & \text{Mutatio logarithmi pro uni-} \\ & \text{tate tabulae, quae hic 10} \\ M + e \sin \epsilon = & 324 \quad 37 \quad 20 \quad \text{secundis aequivalet, } \dots \\ & 16; \text{ unde } \mu = 1,6 \end{array}$$

$$\text{Differt ab } \epsilon \dots \dots \dots 1 \quad 22 \quad 40 = 4960''.$$

Hinc $\frac{0,32}{1,28} \times 4960'' = 1240'' = 20' 40''$. Quare valor correctus ipsius E fit $= 324^0 37' 20'' - 20' 40'' = 324^0 16' 40''$, cum quo calculum secundum tabulas maiores repetemus.

$$\begin{array}{rcl} \log \sin \epsilon & \dots & 9,766 3058_n \quad \lambda = 29,25 \\ \log e & \dots & 4,704 1513 \\ \hline & & 4,470 4571_n \quad \mu = 147 \\ e \sin \epsilon = -29543'', 17 & = & -8^0 12' 23'', 17 \\ M + e \sin \epsilon = & & 324 \quad 16 \quad 31,59 \\ \text{Differt ab } \epsilon \dots \dots \dots & & 8,41. \end{array}$$

Multiplicata hac differentia per $\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{29,25}{117,75}$, prodit $2'', 09$, unde valor denuo correctus ipsius $E = 324^0 16' 31'', 59 - 2'', 09 = 324^0 16' 29'', 50$, intra $0'', 01$ exactus.

14.

Pro derivatione anomaliae verae radiique vectoris ex anomalia excentrica aequationes art. 8 plures methodos suppeditant, e quibus praestantissimas explicabimus.

I. Secundum methodum vulgarem v per aequationem VII, atque tunc r per aequationem II determinantur; hoc modo exemplum art. praec. ita se habet, retinendo pro p valorem in art. 10 traditum:

$\frac{1}{2}E = 162^0 8' 14'',75$	
$\log \tan \frac{1}{2}E$	 9,508 2198 _n
$\log \tan(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$	.. 9,891 2427
$\log \tan \frac{1}{2}v$	 9,616 9771 _n
$\frac{1}{2}v = 157^0 30' 41'',50$	
$v = 315 \quad 1 \quad 23,00$	
$\log e$	 9,389 7262
$\log \cos v$	 9,849 6597
	9,239 3859
$e \cos v =$	0,173 5345
$\log p$	 0,395 4837
$\log(1 + e \cos v)$	 0,069 4959
$\log r$	 0,325 9878

II. Brevior est methodus sequens, siquidem plures loci calculandi sunt, pro quibus logarithmos constantes quantitatum $\sqrt{a(1+e)}$, $\sqrt{a(1-e)}$ semel tantum computare oportet. Ex aequationibus V et VI habetur

$$\sin \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} = \sin \frac{1}{2}E \sqrt{a(1+e)}$$

$$\cos \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} = \cos \frac{1}{2}E \sqrt{a(1-e)},$$

unde $\frac{1}{2}v$ atque $\log \sqrt{r}$ expedite determinantur. Generaliter nimirum, quoties habetur $P \sin Q = A$, $P \cos Q = B$, invenitur Q per formulam $\tan Q = \frac{A}{B}$, atque tunc P per hanc $P = \frac{A}{\sin Q}$, vel per $P = \frac{B}{\cos Q}$: priorem adhibere praestat, quando $\sin Q$ est maior quam $\cos Q$; posteriorem, quando $\cos Q$ maior est quam $\sin Q$. Plerumque problemata, in quibus ad tales aequationes pervenitur (qualia in hoc opere frequentissime occurrunt), conditionem implicant, quod P esse debet quantitas positiva; tunc dubium, utrum Q inter 0 et 180^0 an inter 180^0 et 360^0 accipere oporteat, sponte hinc tollitur. Si vero talis conditio non adest, haec determinatio arbitrio nostro relinquitur.

In exemplo nostro habemus $e = 0,245 \, 3162$

$\log \sin \frac{1}{2}E$	 9,486 7632
$\log \sqrt{a(1+e)}$	... 0,258 8593
$\log \cos \frac{1}{2}E$	 9,978 5434 _n
$\log \sqrt{a(1-e)}$	... 0,150 1020

Hinc

$$\begin{array}{rcl}
 \log \sin \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} & \dots & 9,745\,6225 \\
 \log \cos \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} & \dots & 0,128\,6454_n
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \log \sin \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} \\ \log \cos \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} \end{array}} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{unde } \log \tan \frac{1}{2}v \dots 9,616\,9771_n \\ \frac{1}{2}v = 157^0\,30'\,41'',50 \\ v = 315\,1\,23,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \log \cos \frac{1}{2}v & \dots\dots & 9,965\,6515_n \\
 \hline
 \log \sqrt{r} & \dots\dots & 0,162\,9939 \\
 \log r & \dots\dots & 0,325\,9878
 \end{array}$$

III. His methodis tertiam adiicimus, quae aequae fere expedita est ac secunda, sed praecisione, si ultima desideretur, isti plerumque praeferenda. Scilicet primo determinatur r per aequationem III, ac dein v per X. Ecce exemplum nostrum hoc modo tractatum:

$$\begin{array}{rcl}
 \log e & \dots\dots\dots & 9,389\,7262 \\
 \log \cos E & \dots\dots\dots & 9,909\,4637 \\
 \hline
 & & 9,299\,1899 \\
 e \cos E = & & 0,199\,1544 \\
 \hline
 \log a & \dots\dots\dots & 0,422\,4389 \\
 \log(1 - e \cos E) & \dots\dots & 9,903\,5488 \\
 \hline
 \log r & \dots\dots\dots & 0,325\,9877 \\
 \\
 \log \sin E & \dots\dots\dots & 9,766\,3366_n \\
 \log \sqrt{(1 - e \cos E)} & \dots\dots & 9,951\,7744 \\
 \hline
 & & 9,814\,5622_n \\
 \log \sin \frac{1}{2}\varphi & \dots\dots\dots & 9,092\,0395 \\
 \hline
 \log \sin \frac{1}{2}(v - E) & \dots\dots & 8,906\,6017_n \\
 \frac{1}{2}(v - E) = -4^0\,37'\,33'',24 \\
 v - E = -9\,15\,6,48 \\
 v = 315\,1\,23,02
 \end{array}$$

Ad calculum confirmandum formula VIII vel XI percommoda est, praesertim, si v et r per methodum tertiam determinatae sunt. Ecce calculum:

$$\begin{array}{rcl}
 \log \frac{a}{r} \sin E & \dots\dots & 9,862\,7878_n \\
 \log \cos \varphi & \dots\dots\dots & 9,986\,5224 \\
 \hline
 & & 9,849\,3102_n \\
 \\
 \log \sin v & \dots\dots\dots & 9,849\,3102_n
 \end{array}$$

$\log \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$		9,814 5622 _n
$\log \cos \frac{1}{2}\varphi$		9,996 6567
		9,811 2189 _n
$\log \sin \frac{1}{2}(v + E)$	...	9,811 2189 _n

15.

Quum anomalia media M , ut vidimus, per v et φ complete determinata sit, sicuti v per M et φ , patet, si omnes tres quantitates simul ut variables spectentur, inter ipsarum variationes differentiales aequationem conditionalem locum habere debere, cuius investigatio haud superflua erit. Differentiando primo aequationem VII art. 8, prodit $\frac{dE}{\sin E} = \frac{dv}{\sin v} - \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$; differentiando perinde aequationem XII, fit $dM = (1 - e \cos E)dE - \sin E \cos \varphi d\varphi$. Eliminando ex his aequationibus differentialibus dE , obtinemus

$$dM = \frac{\sin E(1 - e \cos E)}{\sin v} dv - \left(\sin E \cos \varphi + \frac{\sin E(1 - e \cos E)}{\cos \varphi} \right) d\varphi$$

sive substituendo pro $\sin E$, $1 - e \cos E$ valores suos ex aequatt. VIII, III

$$dM = \frac{rr}{aa \cos \varphi} dv - \frac{r(r + p) \sin v}{aa \cos \varphi^2} d\varphi$$

sive denique, exprimendo utrumque coëfficientem per v et φ tantum,

$$dM = \frac{\cos \varphi^3}{(1 + e \cos v)^2} dv - \frac{(2 + e \cos v) \sin v \cos \varphi^2}{(1 + e \cos v)^2} d\varphi.$$

Vice versa considerando v tamquam functionem quantitatum M , φ , aequatio hancce formam obtinet:

$$dv = \frac{aa \cos \varphi}{rr} dM + \frac{(2 + e \cos v) \sin v}{\cos \varphi} d\varphi$$

sive introducendo E pro v .

$$dv = \frac{aa \cos \varphi}{rr} dM + \frac{aa}{rr} (2 - e \cos E - ee) \sin E d\varphi.$$

16.

Radius vector r per v et φ vel per M et φ plene nondum determinatus est, sed insuper a p vel a pendet; constabit igitur eius differentiale tribus membris. Per differentiationem aequationis II art. 8 nanciscimur

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} + \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} dv - \frac{\cos \varphi \cos v}{1 + e \cos v} d\varphi.$$

Statuendo hic $\frac{dp}{p} = \frac{da}{a} - 2 \tan \varphi d\varphi$ (quod sequitur e differentiatione aequ. I), exprimendoque secundum art. praec. dv per dM et $d\varphi$, prodit post debitas reductiones

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a} + \frac{a}{r} \tan \varphi \sin v dM - \frac{a}{r} \cos \varphi \cos v d\varphi$$

sive

$$dr = \frac{r}{a} da + a \tan \varphi \sin v dM - a \cos \varphi \cos v d\varphi.$$

Ceterum hae formulae, sicut eae quas in art. praec. evolvimus, suppositioni innituntur, v , φ et M sive potius dv , $d\varphi$ et dM in partibus radii exprimi. Quodsi igitur variationes angulorum v , φ , M in secundis exprimere placet: vel eas formularum partes quae dv , $d\varphi$ aut dM implicant, per 206264,8 dividere oportet, vel eas, quae continent dr , dp aut da , per eundem numerum multiplicare. Formulae igitur art. praec., quae hoc respectu sunt homogeneae, mutatione opus non habebunt.

17.

De indagatione *aequationis centri maximae* pauca adiecisse haud poenitebit. Primo sponte obvium est, differentiam inter anomaliam excentricam et mediam maximum esse pro $E = 90^0$, ubi fit $= e$ (in gradibus etc. exprimenda); radius vector in hoc puncto est $= a$, unde $v = 90^0 + \varphi$, adeoque aequatio centri tota $= \varphi + e$, quae tamen hic non est maximum, quoniam differentia inter v et E adhuc ultra φ crescere potest. *Haecce* differentia fit maximum pro $d(v - E) = 0$ sive pro $dv = dE$, ubi excentricitas manifesto ut constans spectanda est. Qua suppositione quum generaliter fiat $\frac{dv}{\sin v} = \frac{dE}{\sin E}$, patet, in eo puncto, ubi differentia inter v et E maximum est, esse debere $\sin v = \sin E$; unde erit, per aequatt. VIII, III,

$$r = a \cos \varphi$$

$$e \cos E = 1 - \cos \varphi$$

sive

$$\cos E = + \tan \frac{1}{2} \varphi.$$

Perinde invenitur $\cos v = - \tan \frac{1}{2} \varphi$, quapropter erit^{*)}

$$v = 90^0 + \arcsin \tan \frac{1}{2} \varphi$$

$$E = 90^0 - \arcsin \tan \frac{1}{2} \varphi;$$

^{*)}Ad ea maxima, quae inter aphelium et perihelium iacent, non opus est respicere, quum manifesto ab iis, quae inter perihelium et aphelium sita sunt, in signis tantum differant.

hinc porro $\sin E = \sqrt{(1 - \tan \frac{1}{2}\varphi^2)} = \frac{\sqrt{\cos \varphi}}{\cos \frac{1}{2}\varphi}$, ita ut aequatio centri tota in hoc puncto fiat

$$= 2 \text{ arc. sin } \tan \frac{1}{2}\varphi + 2 \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{\cos \varphi}$$

parte secunda in gradibus etc. expressa.

In eo denique puncto, ubi tota aequatio centri ipsa maximum est, fieri debet $dv = dM$, adeoque, secundum art. 15, $r = a\sqrt{\cos \varphi}$; hinc fit

$$\cos v = -\frac{1 - \cos \varphi^{\frac{3}{2}}}{e}$$

$$\cos E = \frac{1 - \sqrt{\cos \varphi}}{e} = \frac{1 - \cos \varphi}{e(1 + \sqrt{\cos \varphi})} = \frac{\tan \frac{1}{2}\varphi}{1 + \sqrt{\cos \varphi}},$$

per quam formulam E ultima praecisione determinare licet. Inventa E , erit per aequ. X, XII aequatio centri $= 2 \text{ arc. sin } \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi \sin E}{4\sqrt{\cos \varphi}} + e \sin E$ [*]. Expressioni aequationis centri maximae per seriem secundum potestates excentricitatis progredientem, quam plures auctores tradiderunt, hic non immoramur. Ut exemplum habeatur, conspectum trium maximorum, quae hic contemplati sumus, pro Iunone adiungimus, ubi excentricitas secundum elementa novissima $= 0,255\,4996$ supposita est.

Maximum	E	$E - M$	$v - E$	$v - M$
$E - M$	90° 0' 0''	14° 38' 20'',57	14° 48' 11'',48	29° 26' 32'',05
$v - E$	82 32 9	14 30 54,01	14 55 41,79	29 26 35,80
$v - M$	86 14 40	14 36 27,39	14 53 49,57	29 30 16,96

18.

In PARABOLA anomalia excentrica, anomalia media atque motus medius fierent $= 0$; hic igitur istae notiones comparationi motus cum tempore inseruire nequeunt. Attamen in parabola angulo auxiliari ad integrandum $rr\,dv$ omnino opus non habemus; fit enim

$$\begin{aligned} rr\,dv &= \frac{pp\,dv}{4 \cos \frac{1}{2}v^4} = \frac{pp\,d \tan \frac{1}{2}v}{2 \cos \frac{1}{2}v^2} \\ &= \frac{1}{2}pp(1 + \tan \frac{1}{2}v^2)\,d \tan \frac{1}{2}v \end{aligned}$$

[*] Handschriftliche Bemerkung:] $\sin E = \frac{\sqrt{\cos \varphi + 2\sqrt{\cos \varphi + \cos \varphi^{\frac{3}{2}}}}}{(1 + \sqrt{\cos \varphi})(1 + \cos \varphi)}$, Aequatio centri $= 2 \text{ arc. sin } \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \frac{4\sqrt{(1 - ee)}}{2}\right)} + e \sin E = \text{arc. cos } \frac{-1 + \sqrt{\cos \varphi + \cos \varphi + \cos \varphi^{\frac{3}{2}}}}{1 + \cos \varphi} + e \sin E = \text{arc. sin}(\tan \frac{1}{2}\varphi^2 \tan E) + e \sin E$.

adeoque $\int rr dv = \frac{1}{2}pp(\text{tang } \frac{1}{2}v + \frac{1}{3} \text{tang } \frac{1}{2}v^3) + \text{Const.}$ Si tempus a transitu per perihelium incipere supponitur, Constans fit = 0; habetur itaque

$$\text{tang } \frac{1}{2}v + \frac{1}{3} \text{tang } \frac{1}{2}v^3 = \frac{2tk\sqrt{(1+\mu)}}{p^{\frac{3}{2}}},$$

per quam formulam t ex v , atque v ex t derivare licet, simulac p et μ sunt cognitae. Pro p inter elementa parabolica radius vector in perihelio qui est $\frac{1}{2}p$ exhiberi, massaue μ omnino negligi solet. Vix certe unquam possibile erit, massam corporis talis, cuius orbita tamquam parabola computatur, determinare, reveraque omnes cometae per optimas recentissimasque observationes densitatem atque massam tam exiguum habere videntur, ut haec insensibilis censi tutoque negligi possit.

19.

Solutio problematis, ex anomalia vera deducere tempus, multoque adhuc magis solutio problematis inversi, magnopere abbreviari potest per tabulam auxiliarem, qualis in pluribus libris astronomicis reperitur. Longe vero commodissima est tabula BARKERiana, quae etiam operi egregio cel. OLBERS (*Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen*, Weimar 1797.) annexa est. Continet ea pro omnibus anomaliiis veris a 0 usque ad 180^0 per singula 5 minuta valorem expressionis $75 \text{tang } \frac{1}{2}v + 25 \text{tang } \frac{1}{2}v^3$ sub nomine *motus medii*. Si itaque tempus desideratur anomaliae verae v respondens, dividere oportebit motum medium e tabula argumento v excerptum per $\frac{150k}{p^{\frac{3}{2}}}$, quae quantitas *motus medius diurnus* dicitur; contra si e tempore anomalia vera computanda est, illud in diebus expressum per $\frac{150k}{p^{\frac{3}{2}}}$ multiplicabitur, ut motus medius prodeat, quo anomaliam respondentem e tabula sumere licebit. Ceterum manifesto valori negativo ipsius v motus medius tempusque idem sed negative sumtum respondet: eadem igitur tabula anomaliiis negativis et positivis perinde inservit. Si pro p distantia in perihelio $\frac{1}{2}p = q$ uti malumus, motus medius diurnus exprimitur per $\frac{k\sqrt{2812,5}}{q^{\frac{3}{2}}}$, ubi factor constans $k\sqrt{2812,5}$ fit = 0,912 2790 61, ipsiusque logarithmus 9,960 1277 069. — Inventa anomalia v radius vector determinabitur per formulam iam supra traditam $r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}v^2}$.

20.

Per differentiationem aequationis $\text{tang } \frac{1}{2}v + \frac{1}{3} \text{tang } \frac{1}{2}v^3 = 2tkp^{-\frac{3}{2}}$, si omnes quantitates v, t, p ceu variables tractantur, prodit

$$\frac{dv}{2 \cos \frac{1}{2}v^4} = 2kp^{-\frac{3}{2}} dt - 3tkp^{-\frac{5}{2}} dp$$

sive

$$dv = \frac{k\sqrt{p}}{rr} dt - \frac{3tk}{2rr\sqrt{p}} dp.$$

Si variationes anomaliae v in secundis expressae desiderantur, etiam ambae partes ipsius dv hoc modo exprimendae sunt, i. e. pro k valorem in art. 6 traditum $3548'',188$ accipere oportet. Quodsi insuper pro p introducatur $\frac{1}{2}p = q$, formula ita se habebit

$$dv = \frac{k\sqrt{2q}}{rr} dt - \frac{3kt}{rr\sqrt{2q}} dq,$$

ubi logarithmi constantes adhibendi sunt $\log k\sqrt{2} = 3,700\,5215\,724$,
 $\log 3k\sqrt{\frac{1}{2}} = 3,876\,6128\,315$.

Porro differentiatio aequationis $r = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2}v^2}$ suppeditat

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} + \tan \frac{1}{2}v dv$$

sive exprimendo dv per dt et dp

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{3kt \tan \frac{1}{2}v}{2rr\sqrt{p}} \right) dp + \frac{k\sqrt{p} \tan \frac{1}{2}v}{rr} dt.$$

Coëfficiens ipsius dp , substituendo pro t valorem suum per v , transit in

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} - \frac{3p \tan \frac{1}{2}v^2}{4rr} - \frac{p \tan \frac{1}{2}v^4}{4rr} \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2}v^2 - \frac{3}{2} \sin \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}v^2 \tan \frac{1}{2}v^2 \right) \\ &= \frac{\cos v}{2r}; \end{aligned}$$

coëfficiens ipsius dt autem fit $= \frac{k \sin v}{r\sqrt{p}}$. Hinc prodit $dr = \frac{1}{2} \cos v dp + \frac{k \sin v}{\sqrt{p}} dt$
 sive, introducendo q pro p ,

$$dr = \cos v dq + \frac{k \sin v}{\sqrt{2q}} dt.$$

Logarithmus constans hic adhibendus est $\log k\sqrt{\frac{1}{2}} = 8,085\,0664\,436$.

21.

In HYPERBOLA φ atque E quantitates imaginariae fierent, quales si aversamur, illarum loco aliae quantitates auxiliares sunt introducendae. Angulum cuius cosinus $= \frac{1}{e}$ iam supra per ψ designavimus, radiumque vectorem

$$= \frac{p}{2e \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)}$$

invenimus. Factores in denominatore huius fractionis, $\cos \frac{1}{2}(v - \psi)$ et $\cos \frac{1}{2}(v + \psi)$, aequales fiunt pro $v = 0$, secundus evanescit pro valore maximo positivo ipsius v , primus vero pro valore maximo negativo. Statuendo igitur $\frac{\cos \frac{1}{2}(v - \psi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \psi)} = u$, erit $u = 1$ in perihelio; crescit in infinitum, dum v ad limitem suum $180^\circ - \psi$ appropinquat; contra decrescit in infinitum, dum v ad limitem alterum $-(180^\circ - \psi)$ regredi supponitur: quod fiet ita, ut valoribus oppositis ipsius v valores reciproci ipsius u , vel quod idem est valores tales, quorum logarithmi oppositi sunt, respondeant.

Hic quotiens u percommode in hyperbola ut quantitas auxiliaris adhibetur; aequali fere concinnitate istius vice fungi potest angulus cuius tangens $= \tan \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$, quem ut analogiam cum ellipsi sequamur, per $\frac{1}{2}F$ denotabimus. Hoc modo facile sequentes relationes inter quantitates v , r , u , F colliguntur, ubi $a = -b$ statuimus, ita ut b evadat quantitas positiva.

$$\text{I. } b = p \cotang \psi^2$$

$$\text{II. } r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \tan \frac{1}{2}F &= \tan \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \\ &= \tan \frac{1}{2}v \tan \frac{1}{2}\psi = \frac{u-1}{u+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } u &= \frac{\cos \frac{1}{2}(v - \psi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \psi)} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}F}{1 - \tan \frac{1}{2}F} \\ &= \tan(45^\circ + \frac{1}{2}F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V. } \frac{1}{\cos F} &= \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \\ &= \frac{1 + \cos \psi \cos v}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}. \end{aligned}$$

Subtrahendo ab aeq. V utrimque 1, prodit

$$\begin{aligned} \text{VI. } \sin \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} &= \sin \frac{1}{2}F \cdot \sqrt{\frac{p}{(e-1) \cos F}} \\ &= \sin \frac{1}{2}F \cdot \sqrt{\frac{(e+1)b}{\cos F}} \\ &= \frac{1}{2}(u-1) \sqrt{\frac{p}{(e-1)u}} = \frac{1}{2}(u-1) \sqrt{\frac{(e+1)b}{u}}. \end{aligned}$$

Simili modo addendo utrimque 1 fit

$$\begin{aligned}
 \text{VII.} \quad \cos \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{r} &= \cos \frac{1}{2}F \cdot \sqrt{\frac{p}{(e+1)\cos F}} \\
 &= \cos \frac{1}{2}F \cdot \sqrt{\frac{(e-1)b}{\cos F}} \\
 &= \frac{1}{2}(u+1)\sqrt{\frac{p}{(e+1)u}} = \frac{1}{2}(u+1)\sqrt{\frac{(e-1)b}{u}}.
 \end{aligned}$$

Dividendo VI per VII ad III reveniremus; multiplicatio producit

$$\begin{aligned}
 \text{VIII.} \quad r \sin v &= p \cotang \psi \tang F = b \tang \psi \tang F \\
 &= \frac{1}{2}p \cotang \psi \cdot \left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}b \tang \psi \cdot \left(u - \frac{1}{u}\right).
 \end{aligned}$$

E combinatione aequatt. II, V porro facile deducitur

$$\text{IX.} \quad r \cos v = b \left(e - \frac{1}{\cos F}\right) = \frac{1}{2}b \left(2e - u - \frac{1}{u}\right)$$

$$\text{X.} \quad r = b \left(\frac{e}{\cos F} - 1\right) = \frac{1}{2}b \left\{e \left(u + \frac{1}{u}\right) - 2\right\}.$$

22.

Per differentiationem formulae IV prodit (spectando ψ ut quantitatem constantem)

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{u} &= \frac{1}{2} \left(\tang \frac{1}{2}(v + \psi) - \tang \frac{1}{2}(v - \psi) \right) dv \\
 &= \frac{r \tang \psi}{p} dv;
 \end{aligned}$$

hinc

$$rr \, dv = \frac{pr}{u \tang \psi} du$$

sive, substituendo pro r valorem ex X,

$$rr \, dv = bb \tang \psi \left\{ \frac{1}{2}e \left(1 + \frac{1}{uu}\right) - \frac{1}{u} \right\} du.$$

Integrando deinde ita, ut integrale in perihelio evanescat, fit

$$\begin{aligned}
 \int rr \, dv &= bb \tang \psi \left\{ \frac{1}{2}e \left(u - \frac{1}{u}\right) - \log u \right\} \\
 &= kt\sqrt{p} \cdot \sqrt{(1 + \mu)} = kt \tang \psi \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{(1 + \mu)}.
 \end{aligned}$$

Logarithmus hic est hyperbolicus; quodsi logarithmos e systemate BRIGGico vel generaliter e systemate cuius modulus = λ adhibere placet, massaque μ (quam pro corpore in hyperbola incedente haud determinabilem esse supponere possumus) negligitur, aequatio hancce formam induit:

$$\frac{1}{2}\lambda e \frac{uu-1}{u} - \log u = \frac{\lambda kt}{b^{\frac{3}{2}}},$$

XI. sive introducendo F

$$\lambda e \tan F - \log \tan(45^0 + \frac{1}{2}F) = \frac{\lambda kt}{b^{\frac{3}{2}}}.$$

Si logarithmos BRIGGicos adhiberi supponimus, habemus $\log \lambda = 9,637\,7843\,113$, $\log \lambda k = 7,873\,3657\,527$, sed praecisionem aliquantum maiorem attingere licet, si logarithmi hyperbolici immediate applicantur. Tangentium logarithmi hyperbolici in pluribus tabularum collectionibus reperiuntur, e. g. in iis quas SCHULZE curavit, maiorique adhuc extensione in BENI. URSINI Magno Canone Triangulorum Logarithmico, Colon. 1624, ubi per singula $10''$ progrediuntur. — Ceterum formula XI ostendit, valoribus reciprocis ipsius u , sive valoribus oppositis ipsius F et v , respondere valores oppositos ipsius t , quapropter partes hyperbolae aequales a perihelioque utrumque aequidistantes temporibus aequalibus describentur.

23.

Si pro inveniendo tempore ex anomalia vera quantitate auxiliari u uti placuerit, huius valor commodissime per aequ. IV determinatur; formula dein II absque novo calculo statim dat p per r , vel r per p . Inventa u formula XI dabit quantitatem $\frac{\lambda kt}{b^{\frac{3}{2}}}$, quae analogae est anomaliae mediae in ellipsi et per N denotabitur, unde demanabit tempus post transitum per perihelium elapsum. Quum pars prior ipsius N puta $\frac{\lambda e(uu-1)}{2u}$ per formulam VIII fiat $= \frac{\lambda r \sin v}{b \sin \psi}$, calculus duplex huius quantitatis ipsius praecisioni examinandae inservire, aut si mavis, N absque u ita exhiberi potest

$$\text{XII. } N = \frac{\lambda \tan \psi \sin v}{2 \cos \frac{1}{2}(v + \psi) \cos \frac{1}{2}(v - \psi)} - \log \frac{\cos \frac{1}{2}(v - \psi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \psi)}.$$

Exemplum. Sit $e = 1,261\,8820$ sive $\psi = 37^0\,35'\,0''$, $v = 18^0\,51'\,0''$, $\log r = 0,033\,3585$. Tum calculus pro u , p , b , N , t ita se habet:

$\log \cos \frac{1}{2}(v - \psi)$		9,994 1706	}	hinc $\log u$	0,049 1129
$\log \cos \frac{1}{2}(v + \psi)$		9,945 0577		$u = 1,119 7289$	
				$uu = 1,253 7928$	
$\log r$		0,033 3585			
$\log 2e$		0,402 0488			
$\log p$		0,374 6356			
$\log \cotang \psi^2$		0,227 4244			
$\log b$		0,602 0600			

$\log \frac{r}{b}$		9,431 2985
$\log \sin v$		9,509 3258
$\log \lambda$		9,637 7843
Compl. $\log \sin \psi$		0,214 7309
		8,793 1395
Pars prima ipsius $N =$		0,062 1069
$\log u =$		0,049 1129
$N =$		0,012 9940

Calculus alter

$\log(uu - 1)$		9,404 4793
Compl. $\log u$		9,950 8871
$\log \lambda$		9,637 7843
$\log \frac{1}{2}e$		9,799 9888
		8,793 1395

$\log N$		8,113 7429
----------	-------	------------

$\log \lambda k$		7,873 3658	}	Differentia	6,970 2758
$\frac{3}{2} \log b$		0,903 0900		$\log t$	1,143 4671
				$t =$	13,91448

24.

Si calculum per logarithmos hyperbolicos exsequi constitutum est, quantitate auxiliari F uti praestat, quae per aequ. III determinabitur, atque inde N per XI; semiparameter e radio vectore, vel vicissim hic ex illo, per formulam VIII computabitur; pars secunda ipsius N duplici si lubet modo erui potest, scilicet per formulam $\log \text{hyp tang}(45^0 + \frac{1}{2}F)$, et per hanc $\log \text{hyp cos} \frac{1}{2}(v - \psi) - \log \text{hyp cos} \frac{1}{2}(v + \psi)$. Ceterum patet, quantitatem N hic ubi $\lambda = 1$ in ratione 1 : λ maiorem evadere, quam si logarithmi BRIGGici adhibeantur. Ecce exemplum nostrum hoc modo tractatum:

$\log \tan \frac{1}{2}\psi$		9,531 8179
$\log \tan \frac{1}{2}v$		9,220 1009
$\log \tan \frac{1}{2}F$		8,751 9188
$\log e$		0,101 0188
$\log \tan F$		9,054 3366
		9,155 3554
$e \tan F =$		0,143 0063 8
$\log \text{hyp} \tan(45^0 + \frac{1}{2}F) =$		0,113 0866 6
$N =$		0,029 9197 2

$$\frac{1}{2}F = 3^0 13' 58'', 12$$

C. $\log \text{hyp} \cos \frac{1}{2}(v - \psi) =$	0,013 4226 6
C. $\log \text{hyp} \cos \frac{1}{2}(v + \psi) =$	0,126 5093 0
Differ. $=$	0,113 0866 4
$\log N$	 8,475 9575

$\log k$	8,235 5814	}	Differ.	7,332 4914
$\frac{3}{2} \log b$	0,903 0900		$\log t$	1,143 4661
			$t =$	13,91445

25.

Ad solutionem problematis inversi, e tempore anomaliam veram radiumque vectorem determinare, primo ex $N = \lambda k b^{-\frac{3}{2}} t$ per aequationem XI elicienda est quantitas auxiliaris u vel F . Solutio huius aequationis transcendentis tentando perficienda erit, et per artificia iis quae in art. 11 exposuimus analogia abbreviari poterit. Haec autem fusius explicare supersedemus: neque enim operae pretium esse videtur, praecepta pro motu hyperbolico in coelis vix unquam fortasse se oblaturum aequae anxie expolire ac pro motu elliptico, praetereaque omnes casus qui forte occurrere possent per methodum aliam infra tradendam absolvere licebit. Postquam F vel u inventa erit, v inde per formulam III, ac dein r vel per II vel per VIII determinabitur; commodius adhuc per formulas VI et VII v et r simul eruentur; e formulis reliquis una alterave pro confirmatione calculi, si lubet, in usum vocari poterit.

26.

Exemplum. Manentibus e et b ut in exemplo praecedente, sit $t = 65,41236$: quaeruntur v et r . Utendo logarithmis BRIGGicis habemus

$\log t$		1,815 6598
$\log \lambda kb^{-\frac{3}{2}}$		6,970 2758
$\log N$		8,785 9356,

unde $N = 0,061\,0851\,4$.

Hinc aequationi $N = \lambda e \tan F - \log \tan(45^0 + \frac{1}{2}F)$ satisfieri invenitur per

$$F = 25^0\,24'\,27'',66,$$

unde fit per formulam III

$\log \tan \frac{1}{2}F$		9,353 0120
$\log \tan \frac{1}{2}\psi$		9,531 8179
$\log \tan \frac{1}{2}v$		9,821 1941

adeoque $\frac{1}{2}v = 33^0\,31'\,29'',89$ atque $v = 67^0\,2'\,59'',78$. Hinc porro habetur

$$\left. \begin{array}{ll} \text{C. log cos } \frac{1}{2}(v + \psi) & \dots \quad 0,213\,7476 \\ \text{C. log cos } \frac{1}{2}(v - \psi) & \dots \quad 0,014\,5197 \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{differentia} & \dots \quad 0,199\,2279 \\ \log \tan(45^0 + \frac{1}{2}F) & \dots \quad 0,199\,2280 \end{array}$$

$\log \frac{p}{2e}$		9,972 5868
$\log r$		0,200 8541

27.

Si aequatio IV ita differentiatur, ut u , v , ψ simul ut variables tractentur, prodit

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= \frac{\sin \psi \, dv + \sin v \, d\psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)} \\ &= \frac{r \tan \psi}{p} \, dv + \frac{r \sin v}{p \cos \psi} \, d\psi. \end{aligned}$$

Differentiando perinde aequationem XI, inter variationes differentiales quantitatum u , ψ , N emergit relatio

$$\frac{dN}{\lambda} = \left\{ \frac{1}{2}e \left(1 + \frac{1}{uu} \right) - \frac{1}{u} \right\} du + \frac{(uu - 1) \sin \psi}{2u \cos \psi^2} d\psi$$

sive

$$\frac{dN}{\lambda} = \frac{r}{bu} \, du + \frac{r \sin v}{b \cos \psi} \, d\psi.$$

Hinc eliminando du adiumento aequationis praecedentis obtinemus

$$\frac{dN}{\lambda} = \frac{rr}{bb \tan \psi} \, dv + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{r \sin v}{b \cos \psi} \, d\psi$$

sive

$$\begin{aligned} dv &= \frac{bb \operatorname{tang} \psi}{\lambda rr} dN - \left(\frac{b}{r} + \frac{b}{p} \right) \frac{\sin v \operatorname{tang} \psi}{\cos \psi} \cdot d\psi \\ &= \frac{bb \operatorname{tang} \psi}{\lambda rr} dN - \left(1 + \frac{p}{r} \right) \frac{\sin v}{\sin \psi} d\psi. \end{aligned}$$

28.

Differentiando aequationem X, omnibus r , b , e , u pro variabilibus habitis, substituendo $de = \frac{\sin \psi}{\cos \psi^2} d\psi$, eliminandoque du adiumento aequationis inter dN , du , $d\psi$ in art. praec. traditae, prodit

$$\begin{aligned} dr &= \frac{r}{b} db + \frac{bbe(uu - 1)}{2\lambda ur} dN \\ &\quad + \frac{b}{2 \cos \psi^2} \left\{ \left(u + \frac{1}{u} \right) \sin \psi - \left(u - \frac{1}{u} \right) \sin v \right\} d\psi. \end{aligned}$$

Coëfficiens ipsius dN per aequ. VIII transit in $\frac{b \sin v}{\lambda \sin \psi}$; coëfficiens ipsius $d\psi$ autem, substituendo, per aequ. IV, $u(\sin \psi - \sin v) = \sin(\psi - v)$, $\frac{1}{u}(\sin \psi + \sin v) = \sin(\psi + v)$, mutatur in $\frac{b \sin \psi \cos v}{\cos \psi^2} = \frac{p \cos v}{\sin \psi}$, ita ut habeatur

$$dr = \frac{r}{b} db + \frac{b \sin v}{\lambda \sin \psi} dN + \frac{p \cos v}{\sin \psi} d\psi.$$

Quatenus porro N ut functio ipsarum b et t spectatur, fit $dN = \frac{N}{t} dt - \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{b} db$, quo valore substituto, dr , ac perinde in art. praec. dv , per dt , db , $d\psi$ expressae habebuntur. Ceterum quod supra monuimus etiam hic repetendum est, scilicet si angulorum v et ψ variationes non in partibus radii sed in secundis expressae concipiantur, vel omnes terminos qui dv , $d\psi$ continent per 206264,8 dividi, vel omnes reliquos per hunc numerum multiplicari debere.

29.

Quum quantitates auxiliares in ellipsi adhibitae φ , E , M in hyperbola valores imaginarios obtineant, haud abs re erit, horum nexum cum quantitativis realibus, quibus hic usi sumus, investigare: apponimus itaque relationes praecipuas, ubi quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$ per i denotamus.

$$\sin \varphi = e = \frac{1}{\cos \psi}$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = i\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = i \operatorname{tang} \frac{1}{2}\psi$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{2} \cotang(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) - \frac{1}{2} \operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = -\frac{i}{\sin \psi}$$

$$\cos \varphi = i \operatorname{tang} \psi$$

$$\varphi = 90^0 + i \log(\sin \varphi + i \cos \varphi) = 90^0 - i \log \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\psi)$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}E = i \operatorname{tang} \frac{1}{2}F = \frac{i(u-1)}{u+1}$$

$$\frac{1}{\sin E} = \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \frac{1}{2}E + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2}E = -i \operatorname{cotang} F$$

sive

$$\sin E = i \operatorname{tang} F = \frac{i(uu-1)}{2u}$$

$$\operatorname{cotang} E = \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \frac{1}{2}E - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2}E = -\frac{i}{\sin F}$$

sive

$$\operatorname{tang} E = i \sin F = \frac{i(uu-1)}{uu+1}$$

$$\cos E = \frac{1}{\cos F} = \frac{uu+1}{2u}$$

$$iE = \log(\cos E + i \sin E) = \log \frac{1}{u}$$

sive

$$E = i \log u = i \log \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}F)$$

$$M = E - e \sin E = i \log u - \frac{ie(uu-1)}{2u} = -\frac{iN}{\lambda}.$$

Logarithmi in his formulis sunt hyperbolici.

30.

Quum omnes quos e tabulis logarithmicis et trigonometricis depromimus numeri praecisionem absolutam non admittant, sed ad certum tantummodo gradum sint approximati, ex omnibus calculis illarum adiumento perfectis proxime tantum vera resultare possunt. In plerisque quidem casibus tabulae vulgares ad septimam figuram decimalem usque exactae, i. e. ultra dimidiam unitatem in figura septima excessu seu defectu nunquam aberrantes a vero, praecisionem plus quam sufficientem suppeditant, ita ut errores inevitabiles nullius plane sint momenti: nihilominus utique fieri potest, ut errores tabularum in casibus specialibus effectum suum exserant augmentatione tanta, ut methodum alias optimam plane abdicare aliamque ei substituere cogamur. Huiusmodi casus in iis quoque calculis, quos hactenus explicavimus, occurrere potest; quamobrem ab instituto nostro haud alienum erit, disquisitiones quasdam circa gradum praecisionis, quam tabulae vulgares in illis permittunt, hic instituere. Etsi vero ad hoc argumentum calculatori practico gravissimum

exhaustiendum hic non sit locus, investigationem eo perducemus, ut ad propositum nostrum sufficiat, et a quolibet, cuius interest, ulterius expoliri et ad quasvis alias operationes extendi possit.

31.

Quilibet logarithmus, sinus, tangens etc. (aut generaliter quaelibet quantitas irrationalis e tabulis excerpta) errori obnoxius est, qui ad dimidiam unitatem in figura ultima ascendere potest: designabimus hunc erroris limitem per ω , qui itaque in tabulis vulgaribus fit = 0,000 0000 5. Quodsi logarithmus etc. e tabulis immediate desumi non potuit, sed per interpolationem erui debuit, error duplici caussa aliquantulum adhuc maior esse potest. *Primo* enim pro parte proportionali, quoties (figuram ultimam tamquam unitatem spectando) non est integer, adoptari solet integer proxime maior vel minor: hac ratione errorem tantum non usque ad duplum augeri posse facile perspicitur. Ad hanc vero erroris augmentationem omnino hic non respicimus, quum nihil obstat, quominus unam alteramve figuram decimalem parti illi proportionali affigamus, nulloque negotio pateat, logarithmum interpolatum, si pars proportionalis absolute exacta esset, errori maiori obnoxium non esse quam logarithmos in tabulis immediate expressos, quatenus quidem horum variationes tamquam uniformes considerare liceat. Erroris augmentatio *altera* inde nascitur, quod suppositio ista omni rigore non est vera: sed hanc quoque negligimus, quoniam effectus differentiarum secundarum altiorumque in omnibus propemodum casibus nullius plane momenti est (praesertim si pro quantitibus trigonometricis tabulae excellentissimae quas TAYLOR curavit adhibentur), facilique negotio ipsius ratio haberi possit, ubi forte paullo maior evaderet. Statuamus itaque pro omnibus casibus tabularum errorem maximum inevitabilem = ω , siquidem argumentum (i. e. numerus cuius logarithmus, seu angulus cuius sinus etc. quaeritur) praecisione absoluta habetur. Si vero argumentum ipsum proxime tantum innotuit, errorique maximo, cui obnoxium esse potest, respondere supponitur logarithmi etc. variatio ω' (quam per rationem differentialium definire licet), error maximus logarithmi per tabulas computati usque ad $\omega + \omega'$ ascendere potest.

Vice versa, si adiumento tabularum argumentum logarithmo dato respondens computatur, error maximus ei eius variationi aequalis est, quae respondet variationi ω in logarithmo, si hic exacte datur, vel quae respondet variationi logarithmi $\omega + \omega'$, si logarithmus ipse usque ad ω' erroneus esse potest. Vix opus erit monere, ω et ω' eodem signo affici debere.

Si plures quantitates intra certos tantum limites exactae adduntur, aggregati error maximus aequalis erit aggregato singulorum errorum maximorum, iisdem signis affectorum; quare etiam in subtractione quantitatum proxime exactarum differentiae error maximus summae errorum singulorum maximorum aequalis erit. In multiplicatione vel divisione quantitatis non absolute

exactae error maximus in eadem ratione augetur vel diminuitur ut quantitas ipsa.

32.

Progredimur iam ad applicationem horum principiorum ad utilissimas operationum supra explicatarum.

I. Adhibendo ad computum anomaliae verae ex anomalia excentrica in motu elliptico formulam VII art. 8, si φ et E exacte haberi supponuntur, in $\log \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ et $\log \tan \frac{1}{2}E$ committi potest error ω , adeoque in differentia $= \log \tan \frac{1}{2}v$ error 2ω ; error maximus itaque in determinatione anguli $\frac{1}{2}v$ erit $\frac{3\omega d\frac{1}{2}v}{d \log \tan \frac{1}{2}v} = \frac{3\omega \sin v}{2\lambda}$, designante λ modulum logarithmorum ad hunc calculum adhibitorum. Error itaque, cui anomalia vera v obnoxia est, in secundis expressus fit $= \frac{3\omega \sin v}{\lambda} 206265'' = 0'',0712 \sin v$, si logarithmi BRIGGici ad septem figuras decimales adhibentur, ita ut semper intra $0'',07$ de valore ipsius v certi esse possimus: si tabulae minores ad quinque tantum figuras adhibentur, error usque ad $7'',12$ ascendere posset.

II. Si $e \cos E$ adiumento logarithmorum computatur, error committi potest usque ad $\frac{3\omega e \cos E}{\lambda}$; eidem itaque errori obnoxia erit quantitas $1 - e \cos E$ sive $\frac{r}{a}$. In computando ergo logarithmo huius quantitatis error usque ad $(1 + \delta)\omega$ ascendere potest, designando per δ quantitatem $\frac{3e \cos E}{1 - e \cos E}$ positive sumtam: ad eundem limitem $(1 + \delta)\omega$ ascendit error in $\log r$ possibilis, siquidem $\log a$ exacte datus supponitur. Quoties excentricitas parva est, quantitas δ arctis semper limitibus coërcetur: quando vero e parum differt ab 1, $1 - e \cos E$ perparva manet, quamdiu E parva est; tunc igitur δ ad magnitudinem haud contemnendam increscere potest, quocirca in hoc casu formula III art. 8 minus idonea esset. Quantitas δ ita etiam exprimi potest $\frac{3(a-r)}{r} = \frac{3e(\cos v + e)}{1 - ee}$, quae formula adhuc clarius ostendit, quando errorem $(1 + \delta)\omega$ contemnere liceat.

III. Adhibendo formulam X art. 8 ad computum anomaliae verae ex excentrica, $\log \sqrt{\frac{a}{r}}$ obnoxius erit errori $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta)\omega$, adeoque $\log \sin \frac{1}{2}\varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$ huic $(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\delta)\omega$; hinc error maximus in determinatione anguli $v - E$ vel v possibilis eruitur $= \frac{\omega}{\lambda}(7 + \delta) \tan \frac{1}{2}(v - E)$, sive in secundis expressus, si septem figurae decimales adhibentur, $= (0'',166 + 0'',024 \delta) \tan \frac{1}{2}(v - E)$. Quoties excentricitas modica est, δ et $\tan \frac{1}{2}(v - E)$ quantitates parvae erunt, quapropter haec methodus praecisionem maiorem permittet, quam ea quam in I contemplati sumus: haecce contra methodus tunc praeferenda erit, quando excentricitas valde magna est propeque ad unitatem accedit, ubi δ et $\tan \frac{1}{2}(v - E)$ valores valde considerabiles nancisci possunt. Per formulas nostras, utra methodus alteri praeferenda sit, facile semper decidi poterit.

IV. In determinatione anomaliae mediae ex excentrica per formulam XII art. 8 error quantitatis $e \sin E$, adiumento logarithmorum computatae, adeoque etiam ipsius anomaliae M , usque ad $\frac{3\omega e \sin E}{\lambda}$ ascendere potest, qui erroris

limes si in secundis expressus desideratur per 206265'' est multiplicandus. Hinc facile concluditur, in problemate inverso, ubi E ex M tentando determinatur, E quantitate $\frac{3\omega e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{dE}{dM} \cdot 206265'' = \frac{3\omega e a \sin E}{\lambda r} \cdot 206265''$ erroneam esse posse, etsi aequationi $E - e \sin E = M$ omni quam tabulae permittunt praecisione satisfactum fuerit.

Anomalia vera itaque e media computata duabus rationibus erronea esse potest, siquidem mediam tamquam exacte datam consideramus, primo propter errorem in computo ipsius v ex E commissum, qui ut vidimus levis semper momenti est, secundo ideo quod valor anomaliae excentricae ipse iam erroneus esse potuit. Effectus rationis posterioris definietur per productum erroris in E commissi per $\frac{dv}{dE}$, quod productum fit $= \frac{3\omega e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dM} \cdot 206265'' = \frac{3\omega e a \sin v}{\lambda r} \cdot 206265'' = \left(\frac{e \sin v + \frac{1}{2}ee \sin 2v}{1-ee} \right) 0'',0712$, si septem figurae adhibentur. Hic error, pro valoribus parvis ipsius e semper modicus, permagnus evadere potest, quoties e ab unitate parum differt, uti tabella sequens ostendit, quae pro quibusdam valoribus ipsius e valorem maximum illius expressionis exhibet.

e	error maximus	e	error maximus	e	error maximus
0,90	0'',42	0,94	0'',73	0,98	2'',28
0,91	0,48	0,95	0,89	0,99	4,59
0,92	0,54	0,96	1,12	0,999	46,23
0,93	0,62	0,97	1,50		

V. In motu hyperbolico, si v per formulam III art. 21 ex F et ψ exacte notis determinatur, error usque ad $\frac{3\omega \sin v}{\lambda} \cdot 206265''$ ascendere potest; si vero per formulam $\tan \frac{1}{2}v = \frac{(u-1) \cotang \frac{1}{2}\psi}{u+1}$ computatur, u et ψ exacte notis, erroris limes triente maior erit, puta $= \frac{4\omega \sin v}{\lambda} \cdot 206265'' = 0'',09 \sin v$ pro septem figuris.

VI. Si per formulam XI art. 22 quantitas $\frac{\lambda kt}{b^{\frac{3}{2}}} = N$ adiumento logarithmorum BRIGGicorum computatur, e et u vel e et F tamquam exacte notas supponendo, pars prima obnoxia erit errori $\frac{5(uu-1)e\omega}{2u}$, si computata est in forma $\frac{\lambda e(u-1)(u+1)}{2u}$, vel errori $\frac{3(uu+1)e\omega}{2u}$, si computata est in forma $\frac{1}{2}\lambda eu - \frac{\lambda e}{2u}$, vel errori $3e\omega \tan F$, si computata est in forma $\lambda e \tan F$, siquidem errorem in $\log \lambda$ vel $\log \frac{1}{2}\lambda$ commissum contemnimus. In casu primo error etiam per $5e\omega \tan F$, in secundo per $\frac{3e\omega}{\cos F}$ exprimi potest, unde patet, in casu tertio errorem omnium semper minimum esse, in primo autem vel secundo maior erit, prout u aut $\frac{1}{u} > 2$ vel < 2 , sive prout $\pm F > 36^0 52'$ vel $< 36^0 52'$. — Pars secunda ipsius N autem semper obnoxia erit errori ω .

VII. Vice versa patet, si u vel F ex N tentando eruatur, u obnoxiam fore errori $(1 \pm 5e \tan F)\omega \frac{du}{dN}$, vel huic $(1 + \frac{3e}{\cos F})\omega \frac{du}{dN}$, prout membrum primum in valore ipsius N vel in factores vel in partes resolutum adhibeatur; F autem errori huic $(1 \pm 3e \tan F)\omega \frac{dF}{dN}$. Signa superiora post perihelium,

inferiora ante perihelium valent. Quodsi hic pro $\frac{du}{dN}$ vel pro $\frac{dF}{dN}$ substituitur $\frac{dv}{dN}$, emerget effectus huius erroris in determinationem ipsius v , qui igitur erit $\frac{bb \tan \psi (1 \pm 5e \tan F) \omega}{\lambda rr}$ aut $\frac{bb \tan \psi (1 + 3e \sec F) \omega}{\lambda rr}$, si quantitas auxiliaris u adhibita est; contra, si adhibita est F , ille effectus fit

$$= \frac{bb \tan \psi (1 \pm 3e \tan F) \omega}{\lambda rr}$$

$$= \frac{\omega}{\lambda} \left\{ \frac{(1 + e \cos v)^2}{\tan \psi^3} \pm \frac{3e \sin v (1 + e \cos v)}{\tan \psi^2} \right\}.$$

Adiicere oportet factorem 206265'', si error in secundis exprimendus est. Manifesto hic error tunc tantum considerabilis evadere potest, quando ψ est angulus parvus, sive e paullo maior quam 1; ecce valores maximos huius tertiae expressionis pro quibusdam valoribus ipsius e , si septem figurae decimales adhibentur:

e	error maximus
1,3	0'',34
1,2	0,54
1,1	1,31
1,05	3,36
1,01	34,41
1,001	1064,65

Huic errori ex erroneo valore ipsius F vel u orto adiicere oportet errorem in V determinatum, ut incertitudo totalis ipsius v habeatur.

VIII. Si aequatio XI art. 22 adiumento logarithmorum hyperbolicorum solvitur, F pro quantitate auxiliari adhibita, effectus erroris in hac operatione possibilis in determinationem ipsius v per similia ratiocinia invenitur

$$= \frac{(1 + e \cos v)^2 \omega'}{\tan \psi^3} \pm \frac{3e \sin v (1 + e \cos v) \omega}{\lambda \tan \psi^2},$$

ubi per ω' incertitudinem maximam in tabulis logarithmorum hyperbolicorum designamus. Pars secunda huius expressionis identica est cum parte secunda expressionis in VII traditae, prima vero in ratione $\lambda \omega' : \omega$ minor quam prima in illa expressione, i. e. in ratione 1 : 23, si tabulam URSINI ad octo ubique figuras exactam sive $\omega' = 0,000\,0000\,05$ supponere liceret.

33.

In iis igitur sectionibus conicis, quarum excentricitas ab unitate parum differt, i. e. in ellipsis et hyperbolis, quae ad parabolam proxime accedunt, methodi supra expositae tum pro determinatione anomaliae verae e tempore,

tum pro determinatione temporis ex anomalia vera^{*)}, omnem quae desiderari posset praecisionem non patiuntur: quin adeo errores inevitabiles, crescentes dum orbita magis ad parabolae similitudinem vergit, tandem omnes limites egrederentur. Tabulae maiores ad plures quam septem figuras constructae hanc incertitudinem diminuerent quidem, sed non tollerent, nec impedirent, quominus omnes limites superaret, simulac orbita ad parabolam nimis prope accederet. Praeterea methodi supra traditae in hocce casu satis molestae fiunt, quoniam pars earum indirecta tentamina saepius repetita requirit: cuius incommodi taedium vel gravius est, si tabulis maioribus operamur. Haud sane igitur superfluum erit, methodum peculiarem excolere, per quam in hoc casu incertitudinem illam evitare, soloque tabularum vulgarium adminiculo praecisionem sufficientem assequi liceat.

34.

Methodus vulgaris, per quam istis incommodis remedium afferri solet, sequentibus principiis innititur. Respondeat in ellipsi vel hyperbola, cuius excentricitas e , semiparameter p adeoque distantia in perihelio $= \frac{p}{1+e} = q$, tempori post perihelium t anomalia vera v ; respondeat porro eidem tempori in parabola, cuius semiparameter $= 2q$, sive distantia in perihelio $= q$, anomalia vera w , massa μ vel utrimque neglecta vel utrimque aequali supposita. Tunc patet haberi

$$\int \frac{pp \, dv}{(1 + e \cos v)^2} : \int \frac{4qq \, dw}{(1 + \cos w)^2} = \sqrt{p} : \sqrt{2q}$$

integralibus a $v = 0$ et $w = 0$ incipientibus, sive

$$\int \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}} dv}{(1+e \cos v)^2 \sqrt{2}} = \int \frac{2dw}{(1+\cos w)^2}.$$

Designando $\frac{1-e}{1+e}$ per α , $\tan \frac{1}{2}v$ per θ , integrale prius invenitur

$$= \sqrt{(1+\alpha)} \cdot \left\{ \theta + \frac{1}{3}\theta^3(1-2\alpha) - \frac{1}{5}\theta^5(2\alpha-3\alpha\alpha) + \frac{1}{7}\theta^7(3\alpha\alpha-4\alpha^3) - \text{etc.} \right\},$$

posterius $= \tan \frac{1}{2}w + \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2}w^3$. Ex hac aequatione facile est determinare w per α et v , atque v per α et w , adiumento serierum infinitarum: pro α si magis placet introduci potest $1-e = \frac{2\alpha}{1+\alpha} = \delta$. Quum manifesto pro $\alpha = 0$ vel $\delta = 0$ fiat $v = w$, hae series sequentem formam habebunt:

$$w = v + \delta v' + \delta \delta v'' + \delta^3 v''' + \text{etc.}$$

$$v = w + \delta w' + \delta \delta w'' + \delta^3 w''' + \text{etc.},$$

^{*)}Quoniam tempus implicat factorem $a^{\frac{3}{2}}$ vel $b^{\frac{3}{2}}$, error in M vel N commissus eo magis augetur, quo maior fuerit $a = \frac{p}{1-ee}$, vel $b = \frac{p}{ee-1}$.

ubi v' , v'' , v''' etc. erunt functiones ipsius v , atque w' , w'' , w''' etc. functiones ipsius w . Quoties δ est quantitas perparva, hae series celeriter convergent, paucique termini sufficient ad determinandum w ex v , vel v ex w . Ex w invenitur t , vel w ex t eo quem supra pro motu parabolico explicavimus modo.

35.

Expressiones analyticas trium coëfficientium primorum seriei secundae w' , w'' , w''' BESSEL noster evolvit, simulque pro valoribus numericis duorum primorum w' , w'' tabulam ad singulos argumenti w gradus constructam addidit (VON ZACH Monatliche Correspondenz, vol. XII. p. 197). Pro coëfficiente primo w' tabula iam ante habebatur a SIMPSON computata, quae operi clar. OLBERS supra laudato annexa est. In plerisque casibus hacce methodo adiumento tabulae BESSELianae anomaliam veram e tempore praecisione sufficiente determinare licet: quod adhuc desiderandum relinquitur, ad haecce fere momenta reducitur:

I. In problemate inverso, temporis puta ex anomalia vera determinatione, ad methodum quasi indirectam confugere atque w ex v tentando derivare oportet. Cui incommodo ut obveniretur, series prior eodem modo tractata esse deberet ac secunda: et quum facile perspiciatur, $-v'$ esse eandem functionem ipsius v , qualis w' est ipsius w , ita ut tabula pro w' signo tantum mutato pro v' inservire possit, nihil tam requireretur nisi tabula pro v'' , quo utrumque problema aequali praecisione solvere liceat.

II. Interdum utique occurrere possunt casus, ubi excentricitas ab unitate parum quidem differt, ita ut methodi generales supra expositae praecisionem haud sufficientem dare videantur, nimis tamen etiamnum, quam ut in methodo peculiari modo adumbrata effectum potestatis tertiae ipsius δ altiorumque tuto contemnere liceat. In motu imprimis hyperbolico eiusmodi casus sunt possibiles, ubi, sive illas methodos adoptes sive hanc, errorem plurimum secundorum evitare non possis, siquidem tabulis vulgaribus tantum ad septem figuras constructis utaris. Etiam si vero huiusmodi casus in praxi raro occurrant, aliquid certe deesse videri posset, si in *omnibus* casibus anomaliam veram intra $0'',1$ aut saltem $0'',2$ determinare non liceret, nisi tabulae maiores consulerentur, quas tamen ad libros rariores referendas esse constat. Haud igitur prorsus superfluum visum iri speramus expositionem methodi peculiaris, qua iamdudum uti sumus, quaeque eo etiam nomine se commendabit, quod ad excentricitates ab unitate parum diversas haud limitata est, sed hocce saltem respectu applicationem generalem patitur.

36.

Antequam hanc methodum exponere aggrediamur, observare conveniet, incertitudinem methodorum generalium supra traditarum in orbitis ad parabolae

similitudinem vergentibus sponte desinere, simulac E vel F ad magnitudinem considerabilem increverint, quod quidem in magnis demum a Sole distantiiis fiet. Quod ut ostendamus, errorem maximum in ellipsi possibilem, quem in art. 32, IV invenimus $\frac{3\omega ea \sin v}{\lambda r} \cdot 206265''$ ita exhibemus

$$\frac{3\omega e \sqrt{(1 - ee) \cdot \sin E}}{\lambda(1 - e \cos E)^2} \cdot 206265'',$$

unde sponte patet, errorem arcus semper limitibus circumscriptum esse, simulac E valorem considerabilem acquisiverit, sive simulac $\cos E$ ab unitate magis recesserit quantumvis magna sit excentricitas. Quod adhuc luculentius apparebit per tabulam sequentem, in qua valorem numericum maximum istius formulae pro quibusdam valoribus determinatis computavimus (pro septem figuris decimalibus):

$E = 10^0$	error maximus =	$3'',04$
20		0,76
30		0,34
40		0,19
50		0,12
60		0,08

Simili modo res se habet in hyperbola, ut statim apparet, si expressio in art. 32, VII eruta sub hanc formam ponitur $\frac{\omega \cos F \cdot (\cos F + 3e \sin F) \sqrt{(ee - 1)}}{\lambda(e - \cos F)^2} 206265''$. Valores maximos huius expressionis pro quibusdam valoribus determinatis ipsius F tabula sequens exhibet:

F	u		error maximus
10^0	1,192	0,839	$8'',66$
20	1,428	0,700	1,38
30	1,732	0,577	0,47
40	2,144	0,466	0,22
50	2,747	0,364	0,11
60	3,732	0,268	0,06
70	5,671	0,176	0,03

Quoties itaque E vel F ultra 40^0 vel 50^0 egreditur (qui tamen casus in orbitis a parabola parum discrepantibus haud facile occurret, quum corpora coelestia in talibus orbitis incedentia in tantis a Sole distantiiis oculis nostris plerumque se subducant), nulla aderit ratio, cur methodum generalem deseramus. Ceterum in tali casu etiam series de quibus in art. 34 egimus nimis lente convergerent: neutiquam igitur pro defectu methodi nunc explicandae haberi potest, quod iis imprimis casibus adaptata est, ubi E vel F ultra valores modicos nondum excrevit.

37.

Resumamus in motu elliptico aequationem inter anomaliam excentricam et tempus

$$E - e \sin E = \frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

ubi E in partibus radii expressam supponimus. Factorem $\sqrt{(1+\mu)}$ abhinc omittemus; si unquam casus occurreret, ubi eius rationem habere in potestate operaeque pretium esset, signum t non tempus ipsum post perihelium, sed hoc tempus per $\sqrt{(1+\mu)}$ multiplicatum exprimere deberet. Designamus porro per q distantiam in perihelio, et pro E et $\sin E$ introducimus quantitates $E - \sin E$ et $E - \frac{1}{10}(E - \sin E) = \frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E$: rationem cur has potissimum eligamus lector attentus ex sequentibus sponte deprehendet. Hoc modo aequatio nostra formam sequentem induit:

$$(1-e)\left(\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e\right)(E - \sin E) = kt \left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Quatenus E ut quantitas parva ordinis primi spectatur, erit $\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E = E - \frac{1}{60}E^3 + \frac{1}{1200}E^5 - \text{etc.}$ quantitas ordinis primi, contra $E - \sin E = \frac{1}{6}E^3 - \frac{1}{120}E^5 + \frac{1}{5040}E^7 - \text{etc.}$ quantitas ordinis tertii. Statuendo itaque

$$\frac{6(E - \sin E)}{\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E} = 4A, \quad \frac{\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E}{2\sqrt{A}} = B,$$

erit $4A = E^2 - \frac{1}{30}E^4 - \frac{1}{5040}E^6 - \text{etc.}$ quantitas ordinis secundi, atque $B = 1 + \frac{3}{2800}E^4 - \text{etc.}$ ab unitate quantitate quarti ordinis diversa. Aequatio nostra autem hinc fit

$$1) \quad B \left\{ 2(1-e)A^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{15}(1+9e)A^{\frac{3}{2}} \right\} = kt \left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Per tabulas vulgares trigonometricas $\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E$ quidem praecisione sufficiente calculari potest, non tamen $E - \sin E$, quoties E est angulus parvus: hacce igitur via quantitates A et B satis exacte determinare non liceret. Huic autem difficultati remedium afferret tabula peculiaris, ex qua cum argumento E aut ipsum B aut logarithmum ipsius B excerpere possemus: subsidia ad constructionem talis tabulae necessaria cuique in analysi vel mediocriter versato facile se offerent. Adiumento aequationis

$$\frac{9E + \sin E}{20B} = \sqrt{A}$$

etiam $\sqrt{A}$, atque hinc t per formulam 1), omni quae desiderari potest praecisione determinare liceret.

Ecce specimen talis tabulae, quod saltem léntam augmentationem ipsius $\log B$ manifestabit: superfluum esset, hanc tabulam maiori extensione elaborare, infra enim tabulas formae multo commodioris descripturi sumus:

E	$\log B$	E	$\log B$	E	$\log B$
0^0	0,000 0000	25^0	0,000 0168	50^0	0,000 2675
5	00	30	0349	55	3910
10	04	35	0645	60	5526
15	22	40	1099		
20	69	45	1758		

38.

Haud inutile erit, ea quae in art. praec. sunt tradita exemplo illustrare. Proposita sit anomalia vera = 100^0 , excentricitas = 0,967 6456 7, $\log q$ = 9,765 6500. Ecce iam calculum pro E , B , A et t :

$$\begin{array}{rcl} \log \tan \frac{1}{2}v & \dots & 0,076\,1865 \\ \log \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} & \dots & 9,107\,9927 \\ \hline \log \tan \frac{1}{2}E & \dots & 9,184\,1792, \end{array}$$

unde $\frac{1}{2}E = 8^0\,41'\,19'',32$, atque $E = 17^0\,22'\,38'',64$. Huic valori ipsius E respondet $\log B = 0,000\,0040$; porro invenitur in partibus radii $E = 0,303\,2928$, $\sin E = 0,298\,6643$, unde $\frac{9}{20}E + \frac{1}{20}\sin E = 0,151\,4150$, cuius logarithmus = 9,180 1689, adeoque $\log A^{\frac{1}{2}} = 9,180\,1649$. Hinc deducitur per formulam 1) art. praec.

$$\begin{array}{rcl} \log \frac{2Bq^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{(1-e)}} & \dots & 2,458\,9614 \\ \log A^{\frac{1}{2}} & \dots & 9,180\,1649 \\ \hline \log 43,56386 & = & 1,639\,1263 \\ \frac{19,98014}{63,54400} & = & t \\ \\ \log \frac{2B(1+9e)}{15k} \left(\frac{q}{1-e} \right)^{\frac{3}{2}} & \dots & 3,760\,1038 \\ \log A^{\frac{3}{2}} & \dots & 7,540\,4947 \\ \hline \log 19,98014 & = & 1,300\,5985 \end{array}$$

Tractando idem exemplum secundum methodum vulgarem, invenitur $e \sin E$ in secundis = 59610'',79 = $16^0\,33'\,30'',79$, unde anomalia media = $49^0\,7'',85 = 2947'',85$. Hinc et ex $\log k \left(\frac{1-e}{q} \right)^{\frac{3}{2}} = 1,666\,4302$ derivatur $t = 63,54410$.

Differentia, quae hic tantum est 10 000^{ma} pars unius diei, conspirantibus erroribus facile triplo vel quadruplo maior evadere potuisset.

Ceterum patet, solo adiumento talis tabulae pro $\log B$ etiam problema inversum omni praecisione solvi posse, determinando E per tentamina repetita, ita ut valor ipsius t inde calculatus cum proposito congruat. Sed haec operatio satis molesta foret: quamobrem iam ostendemus, quomodo tabulam auxiliarem multo commodius adornare, tentamina vaga omnino evitare, totumque calculum ad algorithmum maxime concinnum atque expeditum reducere liceat, qui nihil desiderandum relinquere videtur.

39.

Dimidiam fere partem laboris quem illa tentamina requirerent abscindi posse statim obvium est, si tabula ita adornata habeatur, ex qua $\log B$ immediate argumento A desumere liceat. Tres tunc superessent operationes; prima indirecta, puta determinatio ipsius A , ut aequationi 1) art. 37 satisfiat; secunda, determinatio ipsius E ex A et B , quae fit directe vel per aequationem $E = 2B(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{15}A^{\frac{3}{2}})$, vel per hanc $\sin E = 2B(A^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5}A^{\frac{3}{2}})$; tertia, determinatio ipsius v ex E per aequ. VII art. 8. Operationem primam ad algorithmum expeditum et a tentaminibus vagis liberum reducemus; secundam et tertiam vero in unicam contrahemus, tabulae nostrae quantitatem novam C inserendo, quo pacto ipsa E omnino opus non habebimus, simulque pro radio vectore formulam elegantem et commodam nanciscemur. Quae singula ordine suo iam persequemur.

Primo aequationem 1) ita transformabimus, ut tabulam BARKERianam ad eius solutionem adhibere liceat. Statuamus ad hunc finem $A^{\frac{1}{2}} = \tan \frac{1}{2}w \cdot \sqrt{\frac{5-5e}{1+9e}}$, unde fit

$$75 \tan \frac{1}{2}w + 25 \tan \frac{1}{2}w^3 = \frac{75kt\sqrt{(\frac{1}{5} + \frac{9}{5}e)}}{2Bq^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha t}{B},$$

designando constantem $\frac{75k\sqrt{(\frac{1}{5} + \frac{9}{5}e)}}{2q^{\frac{3}{2}}}$ per α [*]. Si itaque B esset cognita, w illico e tabula BARKERiana desumi posset, ubi est anomalia vera, cui respondet motus medius $\frac{\alpha t}{B}$; ex w derivabitur A per formulam $A = \beta \tan^2 \frac{1}{2}w$, designando constantem $\frac{5-5e}{1+9e}$ per β . Iam etsi B demum ex A per tabulam nostram auxiliarem innotescat, tamen propter perparvam ipsius ab unitate differentiam praevidere licet, w et A levi tantum errore affectas provenire posse, si ab initio divisor B omnino negligatur. Determinabimus itaque primo, levi tantum calamo, w et A , statuendo $B = 1$; cum valore approximato

[*] Handschriftliche Bemerkung:] Wenn man BURCKHARDTS Tafel [Connaissance des Temps 1818; s. auch Bd. VI. S. 596] braucht, $\frac{\sqrt{(\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e)}}{q^{\frac{3}{2}}} = \alpha$.

ipsius A e tabula nostra auxiliari inveniemus ipsam B , cum qua eundem calculum exactius repetemus; plerumque respondebit valori sic correcto ipsius A prorsus idem valor ipsius B , qui ex approximato inventus erat, ita ut nova operationis repetitio superflua sit, talibus casibus exceptis, ubi valor ipsius E iam valde considerabilis fuerit. Ceterum vix opus erit monere, si forte iam ab initio valor ipsius B quomodocunque approximatus aliunde innotuerit (quod semper fiet, quoties e pluribus locis, haud multum ab invicem distantibus, computandis unus aut alter iam sunt absoluti), praestare, hoc statim in prima approximatione uti: hoc modo calculator scitus saepissime ne una quidem calculi repetitione opus habebit. Hanc celerrimam approximationem inde assecuti sumus, quod B ab 1 differentia ordinis quarti tantum distat, in coëfficientem perparvum numericum insuper multiplicata, quod commodum praeparatum esse iam perspicietur per introductionem quantitatum $E - \sin E$, $\frac{9}{10}E + \frac{1}{10} \sin E$ loco ipsarum E , $\sin E$.

40.

Quum ad operationem tertiam, puta determinationem anomaliae verae, angulus E ipse non requiratur, sed tantum $\tan \frac{1}{2}E$ sive potius $\log \tan \frac{1}{2}E$, operatio illa cum secunda commode iungi posset, si tabula nostra immediate suppeditaret logarithmum quantitatis $\frac{\tan \frac{1}{2}E}{\sqrt{A}}$, quae ab 1 quantitate ordinis secundi differt. Maluimus tamen tabulam nostram modo aliquantulum diverso adornare, quo extensione minuta nihilominus interpolationem multo commodiorem assecuti sumus. Scribendo brevitatis gratia T pro $\tan \frac{1}{2}E^2$, valor ipsius A in art. 37 traditus $\frac{15(E - \sin E)}{9E + \sin E}$ facile transmutatur in

$$A = \frac{T - \frac{6}{5}T^2 + \frac{9}{7}T^3 - \frac{12}{9}T^4 + \frac{15}{11}T^5 - \text{etc.}}{1 - \frac{6}{15}T + \frac{7}{25}T^2 - \frac{8}{35}T^3 + \frac{9}{45}T^4 - \text{etc.}},$$

ubi lex progressionis obvia est. Hinc deducitur per conversionem serierum

$$\begin{aligned} \frac{A}{T} &= 1 - \frac{4}{5}A + \frac{8}{175}A^2 + \frac{8}{525}A^3 \\ &\quad + \frac{1896}{336875}A^4 + \frac{28744}{13138125}A^5 + \text{etc.}^{[*]} \end{aligned}$$

Statuendo igitur $\frac{A}{T} = 1 - \frac{4}{5}A + C$, erit C quantitas ordinis quarti, qua in tabulam nostram recepta, ab A protinus transire possumus ad v per formulam

$$\tan \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \sqrt{\frac{A}{1 - \frac{4}{5}A + C}} = \frac{\gamma \tan \frac{1}{2}w}{\sqrt{(1 - \frac{4}{5}A + C)}},$$

[*] Handschriftliche Bemerkung:]

$$\begin{aligned} \log \text{hyp} \frac{A}{T} &= -\frac{4}{5}A - \frac{48}{175}A^2 - \frac{104}{875}A^3 - \dots \\ &= -\frac{4}{5}T + \frac{64}{175}T^2 - \frac{8}{35}T^3 + \dots \end{aligned}$$

designando per γ constantem $\sqrt{\frac{5+5e}{1+9e}}$. Hoc modo simul lucramur calculum percommodum pro radio vectore. Fit enim (art. 8, VI)

$$\begin{aligned} r &= \frac{q \cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{q}{(1+T) \cos \frac{1}{2} v^2} \\ &= \frac{(1 - \frac{4}{5} A + C) q}{(1 + \frac{1}{5} A + C) \cos \frac{1}{2} v^2}. \end{aligned}$$

41.

Nihil iam superest, nisi ut etiam problema inversum, puta determinationem temporis ex anomalia vera, ad algorithmum expeditiorem reducamus: ad hunc finem tabulae nostrae columnam novam pro T adiecimus. Computabitur itaque primo T ex v per formulam $T = \frac{1-e}{1+e} \tan \frac{1}{2} v^2$; dein ex tabula nostra argumento T desumetur A et $\log B$, sive (quod exactius, imo etiam commodius est) C et $\log B$, atque hinc A per formulam $A = \frac{(1+C)T}{1+\frac{4}{5}T}$; tandem ex A et B eruatur t per formulam 1) art. 37. Quodsi hic quoque tabulam BARKERianam in usum vocare placet, quod tamen in hoc problemate inverso calculum minus sublevat, non opus est ad A respicere, sed statim habetur

$$\tan \frac{1}{2} w = \tan \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1+C}{\gamma \gamma (1 + \frac{4}{5} T)}},$$

atque hinc tempus t , multiplicando motum medium anomaliae verae w in tabula BARKERiana respondentem per $\frac{B}{\alpha}$.

42.

Tabulam, qualem hactenus descripsimus, extensione idonea construximus, operique huic adiecimus (Tab. I.). Ad ellipsin sola pars prior spectat; partem alteram, quae motum hyperbolicum complectitur, infra explicabimus. Argumentum tabulae, quod est quantitas A , per singulas partes millesimas a 0

$$\log \frac{A}{T} = -2Am = -2Tm'$$

A	$\log m$	$\log n$	T	$\log m'$
0.000	9.23984	9.63778	0.000	9.23984
0.010	9.24134	9.63909	0.010	9.23787
0.020	9.24284	9.64041	0.020	9.23591
0.030	9.24435	9.64172		

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} v &= M \gamma \tan \frac{1}{2} w, & r &= \frac{q \sec \frac{1}{2} v^2}{N}, \\ \log M &= Am, & \log N &= An. \end{aligned}$$

usque ad 0,300 progreditur; sequuntur $\log B$ et C , quas quantitates in partibus 10 000 000^{mis}, sive ad septem figuras decimales expressas subintelligere oportet; cifrae enim primae, figuris significativis praeceuntes, suppressae sunt; columna denique quarta exhibet quantitatem T primo ad 5 dein ad 6 figuras computatam, quae praecisio abunde sufficit, quum haec columna ad eum tantummodo usum requiratur, ut argumento T valores respondententes ipsius $\log B$ et C habeantur, quoties ad normam art. praec. t ex v determinare lubet. Quum problema inversum, quod longe frequentioris usus est, puta determinatio ipsius v et r ex t , omnino absque quantitatis T subsidio absolvatur, quantitatem A pro argumento tabulae nostrae eligere maluimus quam T , quae alioquin argumentum aequae fere idoneum fuisset, imo tabulae constructionem aliquantulum facilitavisset. Haud superfluum erit monere, omnes tabulae numeros ad decem figuras ab origine calculatos fuisse, septemque adeo figuris, quas hic damus, ubique tuto confidere licere; methodis autem analyticis ad hunc laborem in usum vocatis hoc loco immorari non possumus, quarum explicatione copiosa nimium ab instituto nostro distraheremur. Ceterum tabulae extensio omnibus casibus, ubi methodum hactenus expositam sequi prodest, abunde sufficit, quum ultra limitem $A = 0,3$, cui respondet $T = 0,392374$ sive $E = 64^0 8'$, methodis artificialibus commode ut supra ostensum est abstinere liceat.

43.

Ad maiorem disquisitionum praecedentium illustrationem exemplum calculi completi pro anomalia vera et radio vectore ex tempore adiicimus, ad quem finem numeros art. 38 resumemus. Statuimus itaque $e = 0,967\,6456\,7$, $\log q = 9,765\,6500$, $t = 63,54400$, unde primo deducimus constantes $\log \alpha = 0,305\,2357$, $\log \beta = 8,221\,7364$, $\log \gamma = 0,002\,8755$.

Hinc fit $\log \alpha t = 2,108\,3102$, cui respondet in tabula BARKERI valor approximatus ipsius $w = 99^0 6'$, unde derivatur $A = 0,02292$, et ex tabula nostra $\log B = 0,000\,0040$. Hinc argumentum correctum quo tabulam BARKERI intrare oportet fit $= \log \frac{\alpha t}{B} = 2,108\,3062$, cui respondet $w = 99^0 6' 13'', 18$; dein calculus ulterior ita se habet:

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} w^2$		0,138 5934
$\log \beta$		8,221 7364
$\log A$		8,360 3298
A	=	0,022 9260 8
hinc $\log B$ perinde ut ante;		
C	=	0,000 0242
$1 - \frac{4}{5} A + C$	=	0,981 6833
$1 + \frac{1}{5} A + C$	=	1,004 6094

$\log \tan \frac{1}{2}w$		0,069 2967
$\log \gamma$		0,002 8755
$\frac{1}{2} \text{Comp.} \log(1 - \frac{4}{5}A + C)$	.	0,004 0143
$\log \tan \frac{1}{2}v$		0,076 1865
$\frac{1}{2}v$	=	50 ⁰ 0' 0''
v	=	100 0 0
$\log q$		9,765 6500
$2 \text{Comp.} \log \cos \frac{1}{2}v$		0,383 8650
$\log(1 - \frac{4}{5}A + C)$		9,991 9714
$C. \log(1 + \frac{1}{5}A + C)$		9,998 0028
$\log r$		0,139 4892

Si in hoc calculo factor B omnino esset neglectus, anomalia vera errorusculo 1'' tantum (in excessu) prodiisset affecta.

44.

Motum *hyperbolicum* eo brevius absolvere licebit, quoniam methodo ei quam hactenus pro motu elliptico exposuimus prorsus analogia tractandus est. Aequationem inter tempus t atque quantitatem auxiliarem u forma sequente exhibemus:

$$(e-1) \left\{ \frac{1}{20} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{9}{10} \log u \right\} + \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) - \log u \right\} = kt \left(\frac{e-1}{q} \right)^{\frac{3}{2}},$$

ubi logarithmi sunt hyperbolici, atque $\frac{1}{20} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{9}{10} \log u$ quantitas ordinis primi, $\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) - \log u$ quantitas ordinis tertii, simulac $\log u$ tamquam quantitas parva ordinis primi spectatur. Statuendo itaque

$$\frac{6 \left\{ \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) - \log u \right\}}{\frac{1}{20} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{9}{10} \log u} = 4A,$$

$$\frac{\frac{1}{20} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{9}{10} \log u}{2\sqrt{A}} = B,$$

erit A quantitas ordinis secundi, B autem ab unitate differentia ordinis quarti discrepabit. Aequatio nostra tunc formam sequentem induet:

$$2) \quad B \left\{ 2(e-1)A^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{15}(1+9e)A^{\frac{3}{2}} \right\} = kt \left(\frac{e-1}{q} \right)^{\frac{3}{2}},$$

quae aequationi 1) art. 37 prorsus analoga est. Statuendo porro $\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2 = T$, erit T ordinis secundi, et per methodum serierum infinitarum invenietur

$$\begin{aligned}\frac{A}{T} &= 1 + \frac{4}{5}A + \frac{8}{175}A^2 - \frac{8}{525}A^3 \\ &\quad + \frac{1896}{336875}A^4 - \frac{28744}{13138125}A^5 + \text{etc.}\end{aligned}$$

Quamobrem ponendo $\frac{A}{T} = 1 + \frac{4}{5}A + C$, erit C quantitas ordinis quarti, atque $A = \frac{(1+C)T}{1 - \frac{4}{5}T}$. Denique pro radio vectore ex aequ. VII art. 21 facile sequitur

$$r = \frac{q}{(1-T) \cos \frac{1}{2}v^2} = \frac{(1 + \frac{4}{5}A + C)q}{(1 - \frac{1}{5}A + C) \cos \frac{1}{2}v^2}.$$

45.

Pars posterior tabulae primae operi huic annexae ad motum hyperbolicum spectat, ut iam supra monuimus, et pro argumento A (utrique tabulae parti communi) logarithmum ipsius B atque quantitatem C ad septem figuras decimales (cifris praecedentibus omissis), quantitatem T vero ad quinque dein ad sex figuras sistit. Extensa est haec pars, perinde ut prior, usque ad $A = 0,300$, cui respondet $T = 0,241207$, $u = 2,930$ vel $= 0,341$, $F = \pm 52^0 19'$; ulterior extensio superflua fuisset (art. 36).

Ecce iam ordinem calculi tum pro determinatione temporis ex anomalia vera tum pro determinatione anomaliae verae ex tempore. In problemate priori habebitur T per formulam $T = \frac{e-1}{e+1} \tan^2 \frac{1}{2}v^2$; ex T tabula nostra dabit $\log B$ et C , unde erit $A = \frac{(1+C)T}{1 - \frac{4}{5}T}$; hinc tandem per formulam 2) art. praec. invenietur t . In problemate posteriori computabuntur primo logarithmi constantium

$$\alpha = \frac{75k\sqrt{(\frac{1}{5} + \frac{9}{5}e)^{[*]}}}{2q^{\frac{3}{2}}}$$

$$\beta = \frac{5e - 5}{1 + 9e}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{5e + 5}{1 + 9e}}.$$

Tunc determinabitur A ex t prorsus eodem modo ut in motu elliptico, ita scilicet ut motui medio $\frac{\alpha t}{B}$ in tabula BARKERI respondeat anomalia vera w

[*] Handschriftliche Bemerkung, welche sich auf eine von GAUSS zu seinem eignen Gebrauch im Jahr 1816 berechnete noch nicht gedruckte Tafel bezieht, auf die in diesem Bande zurückgekommen werden wird:] in tabula nostra $\alpha = \frac{k\sqrt{(\frac{1}{5} + \frac{9}{5}e)}}{q^{\frac{3}{2}}}$.

atque fiat $A = \beta \tan \frac{1}{2}w^2$; eruetur scilicet primo valor approximatus ipsius A neglecto vel si subsidia adsunt aestimato factore B ; hinc tabula nostra suppeditabit valorem approximatum ipsius B , cum quo operatio repetetur; valor novus ipsius B hoc modo prodiens vix unquam correctionem sensibilem passus, neque adeo nova calculi iteratio necessaria erit. Correcto valore ipsius A e tabula desumetur C , quo facto habebitur

$$\tan \frac{1}{2}v = \frac{\gamma \tan \frac{1}{2}w}{\sqrt{(1 + \frac{4}{5}A + C)}},$$

$$r = \frac{(1 + \frac{4}{5}A + C)q}{(1 - \frac{1}{5}A + C) \cos \frac{1}{2}v^2}.$$

Patet hinc, inter formulas pro motu elliptico et hyperbolico nullam omnino differentiam reperiri, si modo β , A et T in motu hyperbolico tamquam quantitates negativas tractemus.

46.

Motum hyperbolicum quoque aliquot exemplis illustravisse haud inutile erit, ad quem finem numeros artt. 23, 26 resumemus.

I. Data sunt $e = 1,261\ 8820$, $\log q = 0,020\ 1657$, $v = 18^0\ 51'\ 0''$: quaeritur t . Habemus

$2 \log \tan \frac{1}{2}v$		8,440 2018
$\log \frac{e-1}{e+1}$		9,063 6357
$\log T$		7,503 8375
T	=	0,003 1903 4
$\log B$	=	0,000 0001
C	=	0,000 0005
$\log \frac{2Bq^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{(e-1)}}$		2,386 6444
$\log A^{\frac{1}{2}}$		8,752 4738
$\log 13,77584$	=	1,139 1182
$\frac{0,13861}{13,91445}$	= t	
$\log T$		7,503 8375
$\log(1 + C)$		0,000 0002
$C. \log(1 - \frac{4}{5}T)$		0,001 1099
$\log A$		7,504 9476

$\log \frac{2B(1+9e)}{15k} \left(\frac{q}{e-1} \right)^{\frac{3}{2}}$	...	2,884 3582
$\log A^{\frac{3}{2}}$		6,257 4214
$\log 0,138605$		= 9,141 7796

II. Manentibus e et q ut ante, datur $t = 65,41236$, quaeruntur v et r .
Invenimus logarithmos constantium

$$\begin{aligned}\log \alpha &= 9,975\,8345 \\ \log \beta &= 9,025\,1649 \\ \log \gamma &= 9,980\,7646.\end{aligned}$$

Porro prodit $\log \alpha t = 1,791\,4943$, unde per tabulam BARKERI valor approximatus ipsius $w = 70^0\,31'\,44''$, atque hinc $A = 0,052983$. Huic A in tabula nostra respondet $\log B = 0,000\,0207$; unde $\log \frac{\alpha t}{B} = 1,791\,4736$, valor correctus ipsius $w = 70^0\,31'\,36'',86$. Calculi operationes reliquae ita se habent:

$2 \log \tan \frac{1}{2}w$		9,698 9398
$\log \beta$		9,025 1649
$\log A$		8,724 1047
A	=	0,052 9791 1
$\log B$ ut ante		
C	=	0,000 1261
$1 + \frac{4}{5}A + C$	=	1,042 5094
$1 - \frac{1}{5}A + C$	=	0,989 5303
$\log \tan \frac{1}{2}w$		9,849 4699
$\log \gamma$		9,980 7646
$\frac{1}{2}C. \log(1 + \frac{4}{5}A + C)$	..	9,990 9600
$\log \tan \frac{1}{2}v$		9,821 1945
$\frac{1}{2}v$	=	33 ⁰ 31' 29'',98
v	=	67 2 59,96
$\log q$		0,020 1657
$2 C. \log \cos \frac{1}{2}v$		0,158 0378
$\log(1 + \frac{4}{5}A + C)$		0,018 0800
$C. \log(1 - \frac{1}{5}A + C)$	...	0,004 5709
$\log r$		0,200 8544

Quae supra (art. 26) inveneramus $v = 67^0 2' 59'',78$, $\log r = 0,200\,8541$, minus exacta sunt, proprieque evadere debuisset $v = 67^0 3' 0'',00$, quo valore supposito valor ipsius t per tabulas maiores fuerat computatus.

SECTIO SECUNDA.

Relationes ad locum simplicem in spatio spectantes.

47.

In Sectione prima de motu corporum coelestium in orbitis suis actum est, nulla situs, quem hae orbitae in spatio occupant, ratione habita. Ad hunc situm determinandum, quo relationem locorum corporis coelestis ad quaevis alia spatii puncta assignare liceat, manifesto requiritur tum situs plani in quo orbita iacet respectu cuiusdam plani cogniti (e. g. plani orbitae telluris, *eclipticae*), tum situs apsidum in illo plano. Quae quum commodissime ad trigonometriam sphaericam referantur, superficiem sphaericam radio arbitrario circa Solem ut centrum descriptam fingimus, in qua quodvis planum per Solem transiens circulum maximum, quaevis autem recta e Sole ducta punctum depinget. Planis aut rectis per Solem ipsum non transeuntibus plana rectasque parallelas per Solem ducimus, circulosque maximos et puncta in sphaerae superficie his respondentia etiam illa repraesentare concipimus: potest quoque sphaera radio ut vocant infinito magno descripta supponi, in qua plana rectaeque parallelae perinde repraesentantur.

Nisi itaque planum orbitae cum plano eclipticae coincidit, circuli maximi illis planis respondentes (quos etiam simpliciter orbitam et eclipticam vocabimus) duobus punctis se intersecant, quae *nodi* dicuntur; in nodorum altero corpus e Sole visum e regione australi per eclipticam in borealem transibit, in altero ex hac in illam revertet; nodus prior *ascendens*, posterior *descendens* appellatur. Nodorum situs in ecliptica per eorum distantiam ab aequinoctio vernali medio (*longitudinem*) secundum ordinem signorum numeratam assignamus. Sit, in Fig. 1, Ω nodus ascendens, $A\Omega B$ pars eclipticae, $C\Omega D$ pars orbitae; motus terrae et corporis coelestis fiant in directionibus ab A versus B et a C versus D , patetque angulum sphaericum, quem ΩD facit cum ΩB , a 0 usque ad 180^0 crescere posse, neque tamen ultra, quin Ω nodus ascendens esse desinat: hunc angulum *inclinationem orbitae* ad eclipticam dicimus. Situ plani orbitae per longitudinem nodi atque inclinationem orbitae determinato, nihil aliud iam requiritur, nisi distantia perihelii a nodo ascendente, quam secundum ipsam directionem motus numeramus, adeoque negativam sive inter 180^0 et 360^0 assumimus, quoties perihelium ab ecliptica ad austrum situm est. Notentur adhuc expressiones sequentes. Longitudo cuiusvis puncti in circulo orbitae numeratur ab eo puncto, quod retrorsum a nodo ascendente in orbita tantundem distat, quantum aequinoctium vernale ab eodem puncto retrorsum in ecliptica: hinc *longitudo perihelii* erit summa longitudinis nodi et distantiae perihelii a nodo; *longitudo vera* corporis *in orbita* autem summa anomaliae verae et longitudinis perihelii. Denique *longitudo media* vocatur summa anomaliae mediae et longitudinis perihelii: haec postrema expressio manifesto in orbitis ellipticis tantum locum habere potest.

48.

Ut igitur corporis coelestis locum in spatio pro quovis temporis momento assignare liceat, sequentia in orbita elliptica nota esse oportebit.

I. Longitudo media pro quodam temporis momento arbitrario, quod *epocha* vocatur: eodem nomine interdum ipsa quoque longitudo designatur. Plerumque pro epocha eligitur initium alicuius anni, scilicet meridies 1. Ianuarii in anno bissextili, sive meridies 31. Decembris anno communi praecedentis.

II. Motus medius inter certum temporis intervallum, e. g. in uno die solari medio, sive in diebus 365, $365\frac{1}{4}$ aut 36525.

III. Semiaxis maior, qui quidem omitti posset, quoties corporis massa aut nota est aut negligi potest, quum per motum medium iam detur (art. 7): commoditatis tamen gratia uterque semper proferri solet.

IV. Excentricitas.

V. Longitudo perihelii.

VI. Longitudo nodi ascendentis.

VII. Inclinatio orbitae.

Haec septem momenta vocantur *elementa* motus corporis.

In parabola et hyperbola tempus transitus per perihelium elementi primi vice fungetur; pro II tradentur quae in his sectionum conicarum generibus motui medio diurno analogae sunt (v. art. 19; in motu hyperbolico quantitas $\lambda kb^{-\frac{3}{2}}$ art. 23). In hyperbola elementa reliqua. perinde retineri poterunt, in parabola vero, ubi axis maior infinitus atque excentricitas = 1, loco elementi III et IV sola distantia in perihelio proferetur.

49.

Secundum vulgarem loquendi morem inclinatio orbitae, quam nos a 0 usque ad 180^0 numeramus, ad 90^0 tantum extenditur, atque si angulus orbitae cum arcu ΩB (Fig. 1) angulum rectum egreditur, angulus orbitae cum arcu ΩA (qui est illius complementum ad 180^0) tamquam inclinatio orbitae spectatur; in tali tunc casu addere oportebit, motum esse *retrogradum* (veluti si in figura nostra $E\Omega F$ partem orbitae repraesentat), ut a casu altero ubi motus *directus* dicitur distinguatur. Longitudo in orbita tunc ita numerari solet, ut in Ω cum longitudine huius puncti in ecliptica conveniat, in directione ΩF autem *decreseat*; punctum initiale itaque a quo longitudines contra ordinem motus numerantur in directione ΩF tantundem a Ω distat, quantum aequinoctium vernale ab eodem Ω in directione ΩA . Quare in hoc casu longitudo perihelii erit longitudo nodi deminuta distantia perihelii a nodo. Hoc modo alteruter loquendi usus facile in alterum convertitur, nostrum autem ideo praetulimus, ut distinctione inter motum directum et retrogradum superseedere, et pro utroque semper formulas easdem adhibere possemus, quum usus vulgaris saepenumero praecepta duplicia requirat.

Ratio simplicissima, puncti cuiusvis in superficie sphaerae coelestis situm respectu eclipticae determinandi, fit per ipsius distantiam ab ecliptica (*latitudinem*), atque distantiam puncti, ubi ecliptica a perpendicularo demisso secatur, ab aequinoctio (*longitudinem*). Latitudo, ab utraque eclipticae parte usque ad 90^0 numerata, in regione boreali ut positiva, in australi ut negativa spectatur. Respondeant corporis coelestis loco heliocentrico, i. e. proiectioni rectae a Sole ad corpus ductae in sphaeram coelestem, longitudo λ , latitudo β ; sit porro u distantia loci heliocentrici a nodo ascendente (quae *argumentum latitudinis* dicitur), i inclinatio orbitae, Ω longitudo nodi ascendentis, habebunturque inter i , u , β , $\lambda - \Omega$, quae quantitates erunt partes trianguli sphaerici rectanguli, relationes sequentes, quas sine ulla restrictione valere facile evincitur:

- I. $\tan(\lambda - \Omega) = \cos i \tan u$
- II. $\tan \beta = \tan i \sin(\lambda - \Omega)$
- III. $\sin \beta = \sin i \sin u$
- IV. $\cos u = \cos \beta \cos(\lambda - \Omega)$.

Quando i et u sunt quantitates datae, $\lambda - \Omega$ inde per aequ. I determinabitur, ac dein β per II vel per III, siquidem β non nimis ad $\pm 90^0$ appropinquat; formula IV si placet ad calculi confirmationem adhiberi potest. Ceterum formulae I et IV docent, $\lambda - \Omega$ et u semper in eodem quadrante iacere, quoties i est inter 0 et 90^0 ; contra $\lambda - \Omega$ et $360^0 - u$ ad eundem quadrantem pertinebunt, quoties i est inter 90^0 et 180^0 , sive, secundum usum vulgarem, quoties motus est retrogradus; hinc ambiguitas, quam determinatio ipsius $\lambda - \Omega$ per tangentem secundum formulam I relinquit, sponte tollitur.

Formulae sequentes e praecedentium combinatione facile derivantur:

- V. $\sin(u - \lambda + \Omega) = 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$
- VI. $\sin(u - \lambda + \Omega) = \tan \frac{1}{2} i \sin \beta \cos(\lambda - \Omega)$
- VII. $\sin(u - \lambda + \Omega) = \tan \frac{1}{2} i \tan \beta \cos u$
- VIII. $\sin(u + \lambda - \Omega) = 2 \cos \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$
- IX. $\sin(u + \lambda - \Omega) = \cotang \frac{1}{2} i \sin \beta \cos(\lambda - \Omega)$
- X. $\sin(u + \lambda - \Omega) = \cotang \frac{1}{2} i \tan \beta \cos u$.

Angulus $u - \lambda + \Omega$, quoties i est infra 90^0 , aut $u + \lambda - \Omega$, quoties i est ultra 90^0 , secundum usum vulgarem *reductio ad eclipticam* dicitur, est scilicet differentia inter longitudinem heliocentricam λ atque longitudinem in orbita quae secundum illum usum est $\Omega \pm u$ (secundum nostrum $\Omega + u$). Quoties inclinatio vel parva est vel a 180^0 parum diversa, ista reductio tamquam quantitas secundi ordinis spectari potest, et in hoc quidem casu praestabit,

β primo per formulam III ac dein λ per VII aut X computare, quo pacto praecisionem maiorem quam per formulam I assequi licebit.

Demisso perpendiculari a loco corporis coelestis in spatio ad planum eclipticae, distantia puncti intersectionis a Sole *distantia curtata* appellatur. Quam per r' , radium vectorem autem per r designando, habebimus

$$\text{XI. } r' = r \cos \beta.$$

51.

Exempli caussa calculum in artt. 13, 14 inchoatum, cuius numeros planeta Iunonis suppeditaverat, ulterius continuabimus. Supra inveneramus anomaliam veram $315^0 1' 23'',02$, logarithmum radii vectoris 0,325 9877: sit iam $i = 13^0 6' 44'',10$, distantia perihelii a nodo = $241^0 10' 20'',57$, adeoque $u = 196^0 11' 43'',59$; denique sit $\Omega = 171^0 7' 48'',73$. Hinc habemus:

log tang u		9,463 0573
log cos i		9,988 5266
log tang($\lambda - \Omega$)	..	9,451 5839
$\lambda - \Omega$	=	$195^0 47' 40'',25$
$\lambda =$		6 55 28,98
log r		0,325 9877
log cos β		9,999 1289
log r'		0,325 1166
log sin($\lambda - \Omega$)		9,434 8692 _n
log tang i		9,367 2304
log tang β		8,802 0996 _n
β	=	$-3^0 37' 40'',02$
log cos β		9,999 1289
log cos($\lambda - \Omega$)	...	9,983 2852 _n
		9,982 4141 _n
log cos u		9,982 4141 _n

Calculus secundum formulas III, VII ita se haberet:

log sin u		9,445 4714 _n
log sin i		9,355 7570
log sin β		8,801 2284 _n
$\beta =$		$-3^0 37' 40'',02$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}i$		9,060 4258
$\log \operatorname{tang} \beta$		8,802 0996 _n
$\log \cos u$		9,982 4141 _n
$\log \sin(u - \lambda + \mathfrak{Q})$	...	7,844 9395
$u - \lambda + \mathfrak{Q} =$		0 ⁰ 24' 3'',34
$\lambda - \mathfrak{Q} =$		195 47 40,25

52.

Spectando i et u tamquam quantitates variables, differentiatio aequationis III art. 50 suggerit:

$$\cotang \beta d\beta = \cotang i di + \cotang u du$$

sive

$$\text{XII. } d\beta = \sin(\lambda - \mathfrak{Q}) di + \sin i \cos(\lambda - \mathfrak{Q}) du.$$

Perinde per differentiationem aequationis I obtenemus

$$\text{XIII. } d(\lambda - \mathfrak{Q}) = -\operatorname{tang} \beta \cos(\lambda - \mathfrak{Q}) di + \frac{\cos i}{\cos \beta^2} du.$$

Denique e differentiatione aequationis XI prodit

$$dr' = \cos \beta dr - r \sin \beta d\beta$$

sive

$$\begin{aligned} \text{XIV. } dr' = & \cos \beta dr - r \sin \beta \sin(\lambda - \mathfrak{Q}) di \\ & - r \sin \beta \sin i \cos(\lambda - \mathfrak{Q}) du. \end{aligned}$$

In hac ultima aequatione vel partes quae continent di et du per 206265'' sunt dividendae, vel reliquae per hunc numerum multiplicandae, si mutationes ipsarum i et u in minutis secundis expressae supponuntur.

53.

Situs puncti cuiuscunque in spatio commodissime per distantias a tribus planis sub angulis rectis se secantibus determinatur. Assumendo pro planorum uno planum eclipticae, designandoque per z distantiam corporis coelestis ab hoc plano a parte boreali positive, ab australi negative sumendam, manifesto habebimus

$$z = r' \operatorname{tang} \beta = r \sin \beta = r \sin i \sin u.$$

Plana duo reliqua, quae per Solem quoque ducta supponemus, in sphaera coelesti circulos maximos proiicient, qui eclipticam sub angulis rectis secabunt,

quorumque adeo poli in ipsa ecliptica iacebunt et 90^0 ab invicem distabunt. Utriusque plani polum istum, a cuius parte distantiae positivae censentur, *polum positivum* appellamus. Sint itaque N et $N + 90^0$ longitudines polorum positivorum, designenturque distantiae a planis quibus respondent respective per x , y . Tunc facile perspicietur haberi

$$\begin{aligned} x &= r' \cos(\lambda - N) \\ &= r \cos \beta \cos(\lambda - \mathfrak{O}) \cos(N - \mathfrak{O}) \\ &\quad + r \cos \beta \sin(\lambda - \mathfrak{O}) \sin(N - \mathfrak{O}) \\ y &= r' \sin(\lambda - N) \\ &= r \cos \beta \sin(\lambda - \mathfrak{O}) \cos(N - \mathfrak{O}) \\ &\quad - r \cos \beta \cos(\lambda - \mathfrak{O}) \sin(N - \mathfrak{O}), \end{aligned}$$

qui valores transeunt in

$$\begin{aligned} x &= r \cos(N - \mathfrak{O}) \cos u + r \cos i \sin(N - \mathfrak{O}) \sin u \\ y &= r \cos i \cos(N - \mathfrak{O}) \sin u - r \sin(N - \mathfrak{O}) \cos u. \end{aligned}$$

Quodsi itaque polus positivus plani ipsarum x in ipso nodo ascendente collocatur, ut sit $N = \mathfrak{O}$, habebimus coordinatarum x , y , z expressiones simplicissimas

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \\ y &= r \cos i \sin u \\ z &= r \sin i \sin u. \end{aligned}$$

Si vero haec suppositio locum non habet, tamen formulae supra datae formam aequae fere commodam nanciscuntur per introductionem quatuor quantitatum auxiliarium a , b , A , B ita determinatarum ut habeatur ^[*)]

$$\begin{aligned} \cos(N - \mathfrak{O}) &= a \sin A \\ \cos i \sin(N - \mathfrak{O}) &= a \cos A \\ -\sin(N - \mathfrak{O}) &= b \sin B \\ \cos i \cos(N - \mathfrak{O}) &= b \cos B \end{aligned}$$

[*) Handschriftliche Bemerkung, wozu vgl. Seite 69 Zeile 7:]

$$\begin{aligned} -\cos \mathfrak{O}' &= a \sin A \\ \cos i' \sin \mathfrak{O}' &= a \cos A \\ -\sin \mathfrak{O}' &= b \sin B \\ -\cos i' \cos \mathfrak{O}' &= b \cos B. \end{aligned}$$

(vid. art. 14, II). Manifesto tunc erit

$$\begin{aligned}x &= ra \sin(u + A) \\y &= rb \sin(u + B) \\z &= r \sin i \sin u.\end{aligned}$$

54.

Relationes motus ad eclipticam in praec. explicatae manifesto perinde valebunt, etiamsi pro ecliptica quodvis aliud planum substituatur, si modo situs plani orbitae ad hoc planum innotuerit; expressiones longitudo et latitudo autem tunc supprimendae erunt. Offert itaque se problema: *e situ cognito plani orbitae aliusque plani novi ad eclipticam derivare situm plani orbitae ad hoc novum planum*. Sint $n\Omega$, $\Omega\Omega'$, $n\Omega'$ partes circulorum maximorum, quos planum eclipticae, planum orbitae planumque novum in sphaera coelesti proiciunt (Fig. 2). Ut inclinatio circuli secundi ad tertium locusque nodi ascendentis absque ambiguitate assignari possit, in circulo tertio alterutra directio eligi debet tamquam ei analoga, quae in ecliptica est secundum ordinem signorum; sit haec in fig. nostra directio ab n versus Ω' . Praeterea duorum hemisphaeriorum, quae circulus $n\Omega'$ separat, alterum censere oportebit analogum haemisphaerio boreali, alterum australi: haec vero hemisphaeria sponte iam sunt distincta, quatenus id semper quasi boreale spectatur, quod in circulo secundum ordinem signorum progredienti^{*)} a dextra est. In figura igitur nostra sunt Ω , n , Ω' nodi ascendentis circuli secundi in primo, tertii in primo, secundi in tertio; $180^\circ - n\Omega\Omega'$, $\Omega n\Omega'$, $n\Omega'\Omega$ inclinationes secundi ad primum, tertii ad primum, secundi ad tertium. Pendet itaque problema nostrum a solutione trianguli sphaerici, ubi e latere uno angulisque adiacentibus reliqua sunt deducenda. Praecepta vulgaria, quae in trigonometria sphaerica pro hoc casu traduntur, tamquam abunde nota supprimimus: commodius autem methodus alia in usum vocatur ex aequationibus quibusdam petita, quae in libris nostris trigonometricis frustra quaeruntur. Ecce has aequationes,

^{*)}Putat in *interiori* sphaerae superficie, quam figura nostra repraesentat.

quibus in sequentibus frequenter utemur: designant a, b, c latera trianguli sphaerici atque A, B, C angulos illis resp. oppositos: ^[**)]

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}A} \\ \text{II.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}A} \\ \text{III.} \quad & \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B+C)}{\cos \frac{1}{2}A} \\ \text{IV.} \quad & \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+C)}{\sin \frac{1}{2}A}. \end{aligned}$$

Quamquam demonstrationem harum propositionum brevitatis causa hic praeterire oporteat, quisque tamen earum veritatem in triangulis, quorum nec latera nec anguli 180^0 excedunt, haud difficile confirmare poterit. Quodsi quidem idea trianguli sphaerici in maxima generalitate concipitur, ut nec latera nec anguli ullis limitibus restringantur (quod plurima commoda insignia praestat, attamen quibusdam dilucidationibus praeliminaribus indiget), casus existere possunt, ubi in cunctis aequationibus praecedentibus signum mutare oporteat; quoniam vero signa priora manifesto restituuntur, simulac unus angulorum vel unum laterum 360^0 augetur vel diminuitur, signa, qualia tradidimus, semper tuto retinere licebit, sive e latere angulisque adiacentibus reliqua determinanda sint, sive ex angulo lateribusque adiacentibus; semper enim vel quaesitorum valores ipsi vel 360^0 a veris diversi hisque adeo aequivalentes per formulas nostras elicientur. Dilucidationem copiosiore huius argumenti ad aliam occasionem nobis reservamus: quod vero praecepta, quae tum pro solutione problematis nostri tum in aliis occasionibus formulis istis superstruemus, in omnibus casibus generaliter valent, tantisper adiumento

[**)] Handschriftliche Bemerkung:] Si duo triangula communia habent duo latera b, c , erit

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(a' - a)}{\sin \frac{1}{2}(A' - A)} = \frac{\sin b \sin \frac{1}{2}(C' + C)}{\cos \frac{1}{2}(B' - B)} = \frac{\sin c \sin \frac{1}{2}(B' + B)}{\cos \frac{1}{2}(C' - C)} \\ \text{II.} \quad & - \frac{\sin \frac{1}{2}(a' + a)}{\sin \frac{1}{2}(A' - A)} = \frac{\sin b \cos \frac{1}{2}(C' + C)}{\sin \frac{1}{2}(B' - B)} = \frac{\sin c \cos \frac{1}{2}(B' + B)}{\sin \frac{1}{2}(C' - C)} \\ \text{III.} \quad & - \frac{\sin \frac{1}{2}(a' - a)}{\sin \frac{1}{2}(A' + A)} = \frac{\sin b \sin \frac{1}{2}(C' - C)}{\cos \frac{1}{2}(B' + B)} = \frac{\sin c \sin \frac{1}{2}(B' - B)}{\cos \frac{1}{2}(C' + C)} \\ \text{IV.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(a' + a)}{\sin \frac{1}{2}(A' + A)} = \frac{\sin b \cos \frac{1}{2}(C' - C)}{\sin \frac{1}{2}(B' + B)} = \frac{\sin c \cos \frac{1}{2}(B' - B)}{\sin \frac{1}{2}(C' + C)}. \end{aligned}$$

inductionis rigorosae, i. e. completae omnium casuum enumerationis, haud difficile comprobari poterit.

55.

Designando ut supra longitudinem nodi ascendentis orbitae in ecliptica per Ω , inclinationem per i ; porro longitudinem nodi ascendentis plani novi in ecliptica per n , inclinationem per ϵ ; distantiam nodi ascendentis orbitae in plano novo a nodo ascendente plani novi in ecliptica (arcum $n\Omega'$ in Fig. 2) per Ω' , inclinationem orbitae ad planum novum per i' ; denique arcum ab Ω ad Ω' secundum directionem motus per Δ : erunt trianguli sphaerici nostri latera $\Omega - n$, Ω' , Δ , angulique oppositi i' , $180^0 - i$, ϵ . Hinc erit secundum formulas art. praec.

$$\sin \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\Omega' + \Delta) = \sin \frac{1}{2}(\Omega - n) \sin \frac{1}{2}(i + \epsilon)$$

$$\sin \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\Omega' + \Delta) = \cos \frac{1}{2}(\Omega - n) \sin \frac{1}{2}(i - \epsilon)$$

$$\cos \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\Omega' - \Delta) = \sin \frac{1}{2}(\Omega - n) \cos \frac{1}{2}(i + \epsilon)$$

$$\cos \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\Omega' - \Delta) = \cos \frac{1}{2}(\Omega - n) \cos \frac{1}{2}(i - \epsilon).$$

Duae primae aequationes suppeditabunt $\frac{1}{2}(\Omega' + \Delta)$ atque $\sin \frac{1}{2}i'$; duae reliquae $\frac{1}{2}(\Omega' - \Delta)$ atque $\cos \frac{1}{2}i'$; ex $\frac{1}{2}(\Omega' + \Delta)$ et $\frac{1}{2}(\Omega' - \Delta)$ demanabunt Ω' et Δ ; ex $\sin \frac{1}{2}i'$ aut $\cos \frac{1}{2}i'$ (quorum consensus calculo confirmando inserviet) prodibit i' . Ambiguitas, utrum $\frac{1}{2}(\Omega' + \Delta)$ et $\frac{1}{2}(\Omega' - \Delta)$ inter 0 et 180^0 vel inter 180^0 et 360^0 accipere oporteat, ita tolletur, ut tum $\sin \frac{1}{2}i'$ tum $\cos \frac{1}{2}i'$ fiant positivi, quoniam per rei naturam i' infra 180^0 cadere debet.

56.

Praecepta praecedentia exemplo illustravisse haud inutile erit. Sit $\Omega = 172^0 28' 13'', 7$, $i = 34^0 38' 1'', 1$; porro sit planum novum aequatori parallelum, adeoque $n = 180^0$; angulum ϵ , qui erit obliquitas eclipticae, statuimus $= 23^0 27' 55'', 8$. Habemus itaque

$\Omega - n =$	$-7^0 31' 46'', 3$
$i + \epsilon =$	$58 \quad 5 \quad 56,9$
$i - \epsilon =$	$11 \quad 10 \quad 5,3$
$\log \sin \frac{1}{2}(\Omega - n)$	$\dots \quad 8,817 \, 3026_n$
$\log \sin \frac{1}{2}(i + \epsilon)$	$\dots \quad 9,686 \, 2484$
$\log \cos \frac{1}{2}(i + \epsilon)$	$\dots \quad 9,941 \, 6108$

$\frac{1}{2}(\mathfrak{Q} - n) =$	$-3^0 45' 53'', 15$
$\frac{1}{2}(i + \epsilon) =$	$29 \quad 2 \quad 58,45$
$\frac{1}{2}(i - \epsilon) =$	$5 \quad 35 \quad 2,65$
$\log \cos \frac{1}{2}(\mathfrak{Q} - n)$	$\dots \quad 9,999\,0618$
$\log \sin \frac{1}{2}(i - \epsilon)$	$\dots \quad 8,988\,1405$
$\log \cos \frac{1}{2}(i - \epsilon)$	$\dots \quad 9,997\,9342$

Hinc fit

$\log \sin \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}' + \Delta)$	$\dots \quad 8,503\,5510_n$
$\log \sin \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}' + \Delta)$	$\dots \quad 8,987\,2023$
unde $\frac{1}{2}(\mathfrak{Q}' + \Delta) =$	$341^0 49' 19'', 01$
$\log \sin \frac{1}{2}i'$	$\dots \quad 9,009\,4368$
$\log \cos \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}' - \Delta)$	$\dots \quad 8,758\,9134_n$
$\log \cos \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}' - \Delta)$	$\dots \quad 9,996\,9960$
unde $\frac{1}{2}(\mathfrak{Q}' - \Delta) =$	$356^0 41' 31'', 43$
$\log \cos \frac{1}{2}i'$	$\dots \quad 9,997\,7202$

Obtinemus itaque $\frac{1}{2}i' = 5^0 51' 56'', 445$, $i' = 11^0 43' 52'', 89$,
 $\mathfrak{Q}' = 338^0 30' 50'', 44$, $\Delta = -14^0 52' 12'', 42$. Ceterum punctum n in sphaera
 coelesti manifesto respondet- aequinoctio autumnali; quocirca distantia nodi
 ascendentis orbitae in aequatore ab aequinoctio vernali (eius *rectascensio*) erit
 $158^0 30' 50'', 44$.

Ad illustrationem art. 53 hoc exemplum adhuc ulterius continuabimus, for-
 mulasque pro coordinatis respectu trium planorum per Solem transeuntium
 evolvemus, quorum unum aequatori parallelum sit, duorumque reliquorum
 poli positivi in ascensione recta 0^0 et 90^0 sint siti: distantiae ab his planis
 sint resp. z , x , y . Iam si insuper distantia loci heliocentrici in sphaera coelesti
 a punctis $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ resp. denotetur per u , u' , fiet $u' = u - \Delta = u + 14^0 52' 12'', 42$,
 et quae in art. 53 per i , $N - \mathfrak{Q}$, u exprimebantur, hic erunt i' , $180^0 - \mathfrak{Q}'$, u' .
 Sic per formulas illic datas prodit

$\log a \sin A$	$\dots \quad 9,968\,7197_n$
$\log a \cos A$	$\dots \quad 9,554\,6380_n$
unde $A =$	$248^0 55' 22'', 97$
$\log a$	$\dots \quad 9,998\,7923$
$\log b \sin B$	$\dots \quad 9,563\,8058$
$\log b \cos B$	$\dots \quad 9,959\,5519_n$
unde $B =$	$158^0 5' 54'', 97$
$\log b$	$\dots \quad 9,992\,0848$

Habemus itaque

$$\begin{aligned}
 x &= ar \sin(u' + 248^0 55' 22'', 97) \\
 &= ar \sin(u + 263^0 47' 35'', 39) \\
 y &= br \sin(u' + 158 \quad 5 \quad 54, 97) \\
 &= br \sin(u + 172 \quad 58 \quad 7, 39) \\
 z &= cr \sin u' \\
 &= cr \sin(u + 14 \quad 52 \quad 12, 42),
 \end{aligned}$$

ubi $\log c = \log \sin i' = 9,308\,1870$.

Alia solutio problematis hic tractati invenitur in VON ZACH *Monatliche Correspondenz* B. IX. S. 385 [*].

57.

Corporis itaque coelestis distantia a quovis plano per Solem transeunte reduci poterit ad formam $kr \sin(v + K)$, designante v anomaliam veram, eritque k sinus inclinationis orbitae ad hoc planum, K distantia perihelii a nodo ascendente orbitae in eodem plano. Quatenus situs plani orbitae, lineaeque apsidum in eo, nec non situs plani ad quod distantiae referuntur pro constantibus haberi possunt, etiam k et K constantes erunt. Frequentius tamen illa methodus in tali casu in usum vocabitur, ubi tertia saltem suppositio non permittitur, etiamsi perturbationes negligantur, quae primam atque secundam semper aliquatenus afficiunt. Illud evenit, quoties distantiae referuntur ad aequatorem, sive ad planum aequatorem sub angulo recto in rectascensione data secans: quum enim situs aequatoris propter praecessionem aequinoctiorum insuperque propter nutationem (siquidem de vero non de medio situ sermo fuerit) mutabilis sit, in hoc casu etiam k et K mutationibus, lentis utique, obnoxiae erunt. Computus harum mutationum per formulas differentiales absque difficultate eruendas absolvi potest: hic vero brevitatis caussa sufficiat, variationes differentiales ipsarum i' , ϖ' , Δ apposuisse, quatenus a variationibus ipsarum $\varpi - n$ atque ϵ pendent.

$$\begin{aligned}
 di' &= \sin \epsilon \sin \varpi' d(\varpi - n) - \cos \varpi' d\epsilon \\
 d\varpi' &= \frac{\sin i \cos \Delta}{\sin i'} d(\varpi - n) + \frac{\sin \varpi'}{\tan i'} d\epsilon \\
 d\Delta &= \frac{\sin \epsilon \cos \varpi'}{\sin i'} d(\varpi - n) + \frac{\sin \varpi'}{\sin i'} d\epsilon.
 \end{aligned}$$

Ceterum quoties id tantum agitur, ut plures corporis coelestis loci respectu talium planorum mutabilium calculentur, qui temporis intervallum medio-cre complectuntur (e. g. unum annum), plerumque commodissimum erit,

[*] Mai 1804. Band VI. S. 94.]

quantitates a, A, b, B, c, C pro duabus epochis intra quas illi cadunt reipsa calculare, ipsarumque mutationes pro singulis temporibus propositis ex illis per simplicem interpolationem eruere.

58.

Formulae nostrae pro distantiiis a planis datis involvunt v et r : quoties has quantitates e tempore prius determinare oportet, partem operationum adhuc contrahere, atque sic laborem notabiliter allevare licebit. Derivari enim possunt illae distantiae per formulam persimplicem statim ex anomalia excentrica in ellipsi, vel e quantitate auxiliari F aut u in hyperbola, ita ut computo anomaliae verae radiique vectoris plane non sit opus. Mutatur scilicet expressio $kr \sin(v + K)$

I. *pro ellipsi*, retentis characteribus art. 8, in

$$ak \cos \varphi \cos K \sin E + ak \sin K (\cos E - e).$$

Determinando itaque l, L, λ per aequationes

$$ak \sin K = l \sin L$$

$$ak \cos \varphi \cos K = l \cos L$$

$$-eak \sin K = -el \sin L = \lambda,$$

expressio nostra transit in $l \sin(E + L) + \lambda$, ubi l, L, λ constantes erunt, quatenus k, K, e pro constantibus habere licet; sin minus, de illarum mutationibus computandis eadem valebunt, quae in art. praec. monuimus.

Exempli caussa transformationem expressionis pro x in art. 56 inventi apponimus, ubi longitudinem perihelii $= 121^0 17' 34'', 4$, $\varphi = 14^0 13' 31'', 97$, $\log a = 0,442\,3790$ statuimus. Fit igitur distantia perihelii a nodo ascendente in ecliptica $= 308^0 49' 20'', 7 = u - v$; hinc $K = 212^0 36' 56'', 09$. Habemus itaque

$\log ak$		0,441 1713
$\log \sin K$		9,731 5887 _n
$\log ak \cos \varphi$	...	0,427 6456
$\log \cos K$		9,925 4698 _n
$\log l \sin L$		0,172 7600 _n
$\log l \cos L$		0,353 1154 _n
unde $L =$		213 ⁰ 25' 51'', 31
$\log l$		0,431 6627
$\log \lambda$		9,563 2352
$\lambda =$		+0,365 7929

II. In hyperbola formula $kr \sin(v + K)$ secundum art. 21 transit in

$$\lambda + \mu \operatorname{tang} F + \nu \operatorname{secans} F,$$

si statuitur

$$ebk \sin K = \lambda, \quad bk \operatorname{tang} \psi \cos K = \mu, \quad -bk \sin K = \nu;$$

manifesto eandem expressionem etiam sub formam $\frac{n \sin(F+N)+\nu}{\cos F}$ reducere licet. Si loco ipsius F quantitas auxiliaris u adhibita est, expressio $kr \sin(v + K)$ per art. 21 transibit in $\alpha + \beta u + \frac{\gamma}{u}$, ubi α , β , γ determinantur per formulas

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda = ebk \sin K \\ \beta &= \frac{1}{2}(\nu + \mu) = -\frac{1}{2}ebk \sin(K - \psi) \\ \gamma &= \frac{1}{2}(\nu - \mu) = -\frac{1}{2}ebk \sin(K + \psi). \end{aligned}$$

III. In parabola, ubi anomalia vera e tempore immediate derivatur, nihil aliud supererit, nisi ut pro radio vectore valor suus substituatur. Denotando itaque distantiam in perihelio per q , expressio $kr \sin(v + K)$ fit $= \frac{qk \sin(v+K)}{\cos \frac{1}{2}v^2}$.

59.

Praecepta pro determinandis distantiiis a planis per Solem transeuntibus manifesto etiam ad distantias terrae applicare licet: hic vero simplicissimi tantum casus occurrere solent. Sit R distantia terrae a Sole, L longitudo heliocentrica terrae (quae 180^0 a longitudine geocentrica Solis differt), denique X , Y , Z distantiae terrae a tribus planis in Sole sub angulis rectis se secantibus. Iam si

I. Planum ipsarum Z est ipsa ecliptica, longitudinesque polorum planorum reliquorum, a quibus distantiae sunt X , Y , resp. N et $N + 90^0$: erit

$$X = R \cos(L - N), \quad Y = R \sin(L - N), \quad Z = 0.$$

II. Si planum ipsarum Z aequatori parallelum est, atque rectascensiones polorum planorum reliquorum, a quibus distantiae sunt X , Y , resp. 0 et 90^0 , habebimus, obliquitate eclipticae per ϵ designata,

$$X = R \cos L, \quad Y = R \cos \epsilon \sin L, \quad Z = R \sin \epsilon \sin L.$$

Tabularum solarium recentissimarum editores, clarr. DE ZACH et DE LAMBRE, latitudinis Solis rationem habere coeperunt, quae quantitas a perturbationibus reliquorum planetarum atque lunae producta vix unum minutum secundum attingere potest. Designando latitudinem heliocentricam terrae,

quae latitudini Solis semper aequalis sed signo opposito affecta erit, per B , habebimus:

in casu I.	in casu II.
$X = R \cos B \cos(L - N)$	$X = R \cos B \cos L$
$Y = R \cos B \sin(L - N)$	$Y = R \cos B \cos \epsilon \sin L - R \sin B \sin \epsilon$
$Z = R \sin B$	$Z = R \cos B \sin \epsilon \sin L + R \sin B \cos \epsilon.$

Pro $\cos B$ hic semper tuto substitui poterit 1, angulusque B in partibus radii expressus pro $\sin B$.

Coordinatae ita inventae ad *centrum* terrae referuntur: si ξ , η , ζ sunt distantiae puncti cuiuslibet in terrae *superficie* a tribus planis per centrum terrae ductis iisque quae per Solem ducta erant parallelis, distantiae illius puncti a planis per Solem transeuntibus manifesto erunt $X + \xi$, $Y + \eta$, $Z + \zeta$, valores coordinatarum ξ , η , ζ autem pro utroque casu facile determinantur sequenti modo. Sit ρ radius globi terrestris (sive sinus parallaxis horizontalis mediae Solis), λ longitudo puncti sphaerae coelestis, ubi recta a terrae centro ad punctum superficie ductum proiicitur, β eiusdem latitudo, α ascensio recta, δ declinatio, eritque

in casu I.	in casu II.
$\xi = \rho \cos \beta \cos(\lambda - N)$	$\xi = \rho \cos \delta \cos \alpha$
$\eta = \rho \cos \beta \sin(\lambda - N)$	$\eta = \rho \cos \delta \sin \alpha$
$\zeta = \rho \sin \beta$	$\zeta = \rho \sin \delta.$

Punctum illud sphaerae coelestis manifesto respondet ipsi zenith loci in superficie (siquidem terra tamquam sphaera spectatur), quocirca ipsius ascensio recta conveniet cum ascensione recta medii coeli sive cum tempore siderali in gradus converso, declinatio autem cum elevatione poli; si operae pretium esset, figurae terrestris sphaeroidicae rationem habere, pro δ elevationem poli *correctam*, atque pro ρ distantiam veram loci a centro terrae accipere oporteret, quae per regulas notas eruuntur. Ex α et δ longitudo et latitudo λ et β per regulas notas infra quoque tradendas deducuntur; ceterum patet, λ convenire cum longitudine *nonagesimi*, atque $90^0 - \beta$ cum eiusdem altitudine.

60.

Designantibus x , y , z distantias corporis coelestis a tribus planis in Sole sub angulis rectis se secantibus; X , Y , Z distantias terrae (sive centri sive puncti in superficie) ab iisdem planis; patet, $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ fore distantias corporis coelestis a tribus planis illis parallele per terram ductis, hasque distantias ad distantiam corporis a terra ipsiusque *locum geocentricum*^{*)}, i. e.

^{*)}In sensu latiori: proprie enim haec expressio ad eum casum refertur, ubi recta e terrae *centro* ducitur.

situm projectionis rectae a terra ad ipsum ductae in sphaera coelesti, relationem eandem habituras, quam x , y , z habent ad distantiam a Sole locumque heliocentricum. Sit Δ distantia corporis coelestis a terra; concipiatur in sphaera coelesti perpendicularum a loco geocentrico ad circulum maximum, qui respondet plano distantiarum z , demissum, sitque a distantia intersectionis a polo positivo circuli maximi, qui respondet plano ipsarum x , denique sit b longitudo ipsius perpendiculari sive distantia loci geocentrici a circulo maximo distantibus z respondente. Tunc erit b latitudo aut declinatio geocentrica, prout planum distantiarum z est ecliptica aut aequator; contra $a + N$ longitudo seu ascensio recta geocentrica, si N designat in casu priori longitudinem in posteriori ascensionem rectam poli plani distantiarum x . Quamobrem erit

$$x - X = \Delta \cos b \cos a$$

$$y - Y = \Delta \cos b \sin a$$

$$z - Z = \Delta \sin b.$$

Duae priores aequationes dabunt a atque $\Delta \cos b$; quantitas posterior (quam positivam fieri oportet) cum aequatione tertia combinata dabit b atque Δ .

61.

Tradidimus in praecedentibus methodum facillimam, corporis coelestis locum geocentricum respectu eclipticae seu aequatoris, a parallaxi liberum sive ea affectum, ac perinde a nutatione liberum seu ea affectum determinandi. Quod enim attinet ad nutationem, omnis differentia in eo versabitur, utrum aequatoris positionem mediam adoptemus an veram, adeoque in casu priori longitudes ab aequinoctio medio, in posteriori a vero numeremus, sicuti in casu illo eclipticae obliquitas media, in hoc vera adhibenda est. Ceterum sponte elucet, quo plures abbreviationes in calculo coordinatarum introducantur, eo plures operationes praeliminares esse instituendas: quamobrem praestantia methodi supra explicatae, coordinatas immediate ex anomalia excentrica deducendi, tunc potissimum se manifestabit, ubi multos locos geocentricos determinare oportet: contra quoties unus tantum locus computandus esset, aut perpauci, neutiquam operae pretium foret, laborem tot quantitates auxiliares calculandi suscipere. Quin potius in tali casu methodum vulgarem haud deserere praestabit, secundum quam ex anomalia excentrica deducitur vera atque radius vector; hinc locus heliocentricus respectu eclipticae; hinc longitudo et latitudo geocentrica, atque hinc tandem rectascensio et declinatio. Ne quid igitur hic deesse videatur, duas ultimas operationes adhuc breviter explicabimus.

Sit corporis coelestis longitudo heliocentrica λ , latitudo β ; longitudo geocentrica l , latitudo b , distantia a Sole r , a terra Δ ; denique terrae longitudo heliocentrica L , latitudo B , distantia a Sole R . Quum non statuamus $B = 0$, formulae nostrae ad eum quoque casum applicari poterunt, ubi loci heliocentrici et geocentrics non ad eclipticam sed ad quodvis aliud planum referuntur, modo denominationes longitudinis et latitudinis suppressere oportebit: praeterea parallaxeos ratio statim haberi potest, si modo locus heliocentricus terrae non ad centrum sed ad locum in superficie immediate refertur. Statuamus porro $r \cos \beta = r'$, $\Delta \cos b = \Delta'$, $R \cos B = R'$. Iam referendo locum corporis coelestis atque terrae in spatio ad tria plana, quorum unum sit ecliptica, secundumque et tertium polos suos habeant in longitudine N et $N + 90^0$, protinus emergent aequationes sequentes:

$$\begin{aligned} r' \cos(\lambda - N) - R' \cos(L - N) &= \Delta' \cos(l - N) \\ r' \sin(\lambda - N) - R' \sin(L - N) &= \Delta' \sin(l - N) \\ r' \tan \beta - R' \tan B &= \Delta' \tan b, \end{aligned}$$

ubi angulus N omnino arbitrarius est. Aequatio prima et secunda statim determinabunt $l - N$ atque Δ' , unde et ex tertia demanabit b ; ex b et Δ' habebis Δ . Iam ut labor calculi quam commodissimus evadat, angulum arbitrium N tribus modis sequentibus determinamus:

I. Statuendo $N = L$, faciemus $\frac{r'}{R'} \sin(\lambda - L) = P$, $\frac{r'}{R'} \cos(\lambda - L) - 1 = Q$, invenienturque $l - L$, $\frac{\Delta'}{R'}$ atque b per formulas

$$\begin{aligned} \tan(l - L) &= \frac{P}{Q} \\ \frac{\Delta'}{R'} &= \frac{P}{\sin(l - L)} = \frac{Q}{\cos(l - L)} \\ \tan b &= \frac{\frac{r'}{R'} \tan \beta - \tan B}{\frac{\Delta'}{R'}}. \end{aligned}$$

II. Statuendo $N = \lambda$, faciemus $\frac{R'}{r'} \sin(\lambda - L) = P$, $1 - \frac{R'}{r'} \cos(\lambda - L) = Q$, eritque

$$\begin{aligned} \tan(l - \lambda) &= \frac{P}{Q} \\ \frac{\Delta'}{r'} &= \frac{P}{\sin(l - \lambda)} = \frac{Q}{\cos(l - \lambda)} \\ \tan b &= \frac{\tan \beta - \frac{R'}{r'} \tan B}{\frac{\Delta'}{r'}}. \end{aligned}$$

III. Statuendo $N = \frac{1}{2}(\lambda + L)$, invenientur l atque Δ' per aequationes

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\{l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L)\} &= \frac{r' + R'}{r' - R'} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda - L) \\ \Delta' &= \frac{(r' + R') \sin \tfrac{1}{2}(\lambda - L)}{\sin(l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L))} = \frac{(r' - R') \cos \tfrac{1}{2}(\lambda - L)}{\cos(l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L))} \end{aligned}$$

ac dein b per aequationem supra datam. Logarithmus fractionis $\frac{r'+R'}{r'-R'}$ commode calculatur, si statuitur $\frac{R'}{r'} = \operatorname{tang} \zeta$, unde fit $\frac{r'+R'}{r'-R'} = \operatorname{tang}(45^0 + \zeta)$. Hoc modo methodus III ad determinationem ipsius l aliquanto brevior est, quam I et II, ad operationes reliquas autem has illi praeferendas censemus.

63.

Exempli caussa calculum in art. 51 usque ad locum heliocentricum productum ulterius continuamus. Respondeat illi loco longitudo heliocentrica terrae $24^0 19' 49'',05 = L$, atque $\log R = 9,998\,0979$; latitudinem B statuimus $= 0$. Habemus itaque $\lambda - L = -17^0 24' 20'',07$, $\log R' = \log R$, adeoque secundum methodum II

$\log \frac{R'}{r'}$		9,672 9813
$\log \sin(\lambda - L)$	...	9,475 8653 _n
$\log \cos(\lambda - L)$	...	9,979 6445
$\log P$		9,148 8466 _n
$\log Q$		9,740 8421
$\log(1 - Q)$		9,652 6258
$1 - Q =$		0,449 3925
$Q =$		0,550 6075
Hinc $l - \lambda =$		$-14^0 21' 6'',75$
$\log \frac{\Delta'}{r'}$		9,754 6117
$\log \operatorname{tang} \beta$		8,802 0996 _n
$\log \operatorname{tang} b$		9,047 4879 _n
$b =$		$-6^0 21' 55'',07$
unde $l =$		$352^0 34' 22'',23$
unde $\log \Delta'$		0,079 7283
$\log \cos b$		9,997 3144
$\log \Delta$		0,082 4139

Secundum methodum III ex $\log \tan \zeta = 9,672\,9813$ habetur $\zeta = 25^0\,13'\,6'',31$, adeoque

$$\begin{array}{rcl}
 \log \tan(45^0 + \zeta) & \dots\dots & 0,444\,1090 \\
 \log \tan \frac{1}{2}(\lambda - L) & \dots\dots & 9,184\,8938_n \\
 \hline
 \log \tan(l - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}L) & \dots & 9,629\,0028_n \\
 \\
 \left. \begin{array}{l} l - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}L = -23^0\,3'\,16'',79 \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}L = 15\,37\,39,015 \end{array} \right\} & \text{unde } l = & 352^0\,34'\,22'',225
 \end{array}$$

64.

Circa problema art. 62 sequentes adhuc observationes adiicimus.

I. Statuendo in aequatione secunda illic tradita $N = \lambda$, $N = L$, $N = l$, prodit $R' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - \lambda)$; $r' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - L)$; $r' \sin(l - \lambda) = R' \sin(l - L)$; aequatio prima aut secunda commode ad calculi confirmationem applicatur, si methodus I aut II art. 62 adhibita est. Ita habetur in exemplo nostro

$$\begin{array}{rcl}
 \log \sin(\lambda - L) & \dots & 9,475\,8653_n \\
 \log \frac{\Delta'}{r'} & \dots\dots\dots & 9,754\,6117 \\
 \hline
 & & 9,721\,2536_n \\
 \log \sin(l - L) & \dots & 9,721\,2536_n
 \end{array}$$

$$l - L = -31^0\,45'\,26'',82$$

II. Sol duoque in plano eclipticae puncta, quae sunt proiectiones loci corporis coelestis atque loci terrae, triangulum planum formant, cuius latera sunt Δ' , R' , r' , angulique oppositi vel $\lambda - L$, $l - \lambda$, $180^0 - l + L$, vel $L - \lambda$, $\lambda - l$, $180^0 - L + l$: ex hoc principio relationes in I traditae sponte sequuntur.

III. Sol, locus verus corporis coelestis in spatio, locusque verus terrae aliud triangulum formabunt, cuius latera erunt Δ , R , r : angulis itaque his resp. oppositis per S , T , $180^0 - S - T$ denotatis, erit $\frac{\sin S}{\Delta} = \frac{\sin T}{R} = \frac{\sin(S+T)}{r}$. Planum huius trianguli in sphaera coelesti circulum maximum proiiciet, in quo locus heliocentricus terrae, locus heliocentricus corporis coelestis eiusdemque locus geocentricus siti erunt, et quidem ita ut distantia secundi a primo, tertii a secundo, tertii a primo, secundum eandem directionem numeratae, resp. sint S , T , $S + T$.

IV. Vel ex notis variationibus differentialibus partium trianguli plani, vel aequae facile e formulis art. 62 sequentes aequationes differentiales derivantur:

$$dl = \frac{r' \cos(\lambda - l)}{\Delta'} d\lambda + \frac{\sin(\lambda - l)}{\Delta'} dr'$$

$$\begin{aligned}
 d\Delta' &= -r' \sin(\lambda - l) d\lambda + \cos(\lambda - l) dr' \\
 db &= \frac{r' \cos b \sin b \sin(\lambda - l)}{\Delta'} d\lambda + \frac{r' \cos b^2}{\Delta' \cos \beta^2} d\beta \\
 &\quad + \frac{\cos b^2}{\Delta'} (\text{tang } \beta - \cos(\lambda - l) \text{tang } b) dr',
 \end{aligned}$$

ubi partes quae continent dr' , $d\Delta'$ per 206265'' sunt multiplicandae, vel reliquae per 206265'' dividendae, si mutationes angulorum in minutis secundis exprimuntur.

V. Problema inversum, scilicet determinatio loci heliocentrici e geocentrico, problemati supra evoluto prorsus analogum est, quamobrem superfluum foret, illi amplius inhaerere. Omnes enim formulae art. 62 etiam pro illo problemate valent, si modo, omnibus quantitativis quae ad locum corporis coelestis heliocentricum spectant cum analogis iis quae ad geocentricum referuntur permutatis, pro L , B resp. substituitur $L + 180^0$, $-B$, sive quod idem est pro loco heliocentrico terrae geocentricus Solis accipitur.

65.

Etiam si in eo casu, ubi ex elementis datis paucissimi tantum loci geocentrici sunt determinandi, omnia artificia supra tradita, per quae ab anomalia excentrica statim ad longitudinem et latitudinem geocentricam, vel adeo ad rectascensionem et declinationem, transire licet, in usum vocare vix operae pretium sit, quoniam compendia inde demanantia a multitudine quantitatum auxiliarium antea computandarum absorberentur: semper tamen contractio reductionis ad eclipticam cum calculo longitudinis et latitudinis geocentricae lucrum haud spernendum praestabit. Si enim pro plano coordinatarum z assumitur ipsa ecliptica, poli autem planorum coordinatarum x , y collocantur in longitudine $\mathfrak{Q}$, $90^0 + \mathfrak{Q}$, coordinatae facillime absque ulla quantitatum auxiliarium necessitate determinantur. Habetur scilicet

$$\begin{array}{l|l|l}
 x = r \cos u & X = R' \cos(L - \mathfrak{Q}) & x - X = \Delta' \cos(l - \mathfrak{Q}) \\
 y = r \cos i \sin u & Y = R' \sin(L - \mathfrak{Q}) & y - Y = \Delta' \sin(l - \mathfrak{Q}) \\
 z = r \sin i \sin u & Z = R' \text{tang } B & z - Z = \Delta' \text{tang } b.
 \end{array}$$

Quoties $B = 0$, est $R' = R$, $Z = 0$. Secundum has formulas exemplum nostrum numeris sequentibus absolvitur: $L - \mathfrak{Q} = 213^0 12' 0'', 32$

$\log r$		0,325 9877
$\log \cos u$		9,982 4141 _n
$\log \sin u$		9,445 4714 _n
$\log x$		0,308 4018 _n
$\log r \sin u$		9,771 4591 _n
$\log \cos i$		9,988 5266
$\log \sin i$		9,355 7570
$\log y$		9,759 9857 _n
$\log z$		9,127 2161 _n
$\log R'$		9,998 0979
$\log \cos(L - \mathfrak{Q})$	...	9,922 6027 _n
$\log \sin(L - \mathfrak{Q})$	...	9,738 4353 _n
$\log X$		9,920 7006 _n
$\log Y$		9,736 5332 _n
$Z =$		0

Hinc fit

$\log(x - X)$		0,079 5906 _n
$\log(y - Y)$		8,480 7165 _n
$\text{unde } (l - \mathfrak{Q}) =$		181 ⁰ 26' 33'',49
$\log \Delta'$		0,079 7283
$\log \text{tang } b$		9,047 4878 _n

$$l = 352^0 34' 22'',22$$

$$b = -6 \quad 21 \quad 55,06$$

66.

E longitude et latitudine puncti cuiusvis in sphaera coelesti eius rectascensio et declinatio derivantur per solutionem trianguli sphaerici, quod ab illo puncto polisque arcticis eclipticae et aequatoris formatur. Sit ϵ obliquitas eclipticae, l longitudo, b latitudo, α ascensio recta, δ declinatio, eruntque trianguli latera ϵ , $90^0 - b$, $90^0 - \delta$; pro angulis lateri secundo et tertio oppositis accipere licebit $90^0 + \alpha$, $90^0 - l$ (siquidem trianguli sphaerici ideam

maxima generalitate concipimus); angulum tertium lateri ϵ oppositum statuemus $= 90^0 - E$. Habebimus itaque per formulas art. 54

$$\begin{aligned}\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta) \sin \tfrac{1}{2}(E + \alpha) &= \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}l) \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon + b)) \\ \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta) \cos \tfrac{1}{2}(E + \alpha) &= \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}l) \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon - b)) \\ \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta) \sin \tfrac{1}{2}(E - \alpha) &= \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}l) \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon - b)) \\ \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta) \cos \tfrac{1}{2}(E - \alpha) &= \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}l) \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon + b)).\end{aligned}$$

Aequationes duae primae dabunt $\tfrac{1}{2}(E + \alpha)$ atque $\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)$; duae ultimae $\tfrac{1}{2}(E - \alpha)$ atque $\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)$; ex $\tfrac{1}{2}(E + \alpha)$ et $\tfrac{1}{2}(E - \alpha)$ habebitur α simulque E ; ex $\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)$ aut $\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)$, quorum consensus calculo confirmando inserviet, determinabitur $45^0 - \tfrac{1}{2}\delta$ atque hinc δ . Determinatio angulorum $\tfrac{1}{2}(E + \alpha)$, $\tfrac{1}{2}(E - \alpha)$ per tangentes suos ambiguitati non est obnoxia, quoniam tum sinus tum cosinus anguli $45^0 - \tfrac{1}{2}\delta$ positivus evadere debet.

Mutationes differentiales quantitatum α , δ e mutationibus ipsarum l , b secundum principia nota ita inveniuntur:

$$\begin{aligned}d\alpha &= \frac{\sin E \cos b}{\cos \delta} dl - \frac{\cos E}{\cos \delta} db \\ d\delta &= \cos E \cos b dl + \sin E db.\end{aligned}$$

67.

Methodus alia, problema art. praec. solvendi, ex aequationibus ^[*]

$$\begin{aligned}\cos \epsilon \sin l &= \sin \epsilon \tan b + \cos l \tan \alpha \\ \sin \delta &= \cos \epsilon \sin b + \sin \epsilon \cos b \sin l \\ \cos b \cos l &= \cos \alpha \cos \delta\end{aligned}$$

petitur. Determinetur angulus auxiliaris θ per aequationem

$$\tan \theta = \frac{\tan b}{\sin l},$$

[*] Handschriftliche Bemerkung:]

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \delta &= -\sin \epsilon \sin b + \cos \epsilon \cos b \sin l \\ \cos \alpha \cos \delta &= \cos b \cos l \\ \sin \delta &= \cos \epsilon \sin b + \sin \epsilon \cos b \sin l.\end{aligned}$$

eritque

$$\text{tang } \alpha = \frac{\cos(\epsilon + \theta) \text{ tang } l}{\cos \theta}$$

$$\text{tang } \delta = \sin \alpha \text{ tang}(\epsilon + \theta),$$

quibus aequationibus ad calculi confirmationem adiaci potest

$$\cos \delta = \frac{\cos b \cos l}{\cos \alpha} \quad \text{sive} \quad \cos \delta = \frac{\cos(\epsilon + \theta) \cos b \sin l}{\cos \theta \sin \alpha}.$$

Ambiguitas in determinatione ipsius α per aequ. secundam eo tollitur, quod $\cos \alpha$ et $\cos l$ eadem signa habere debent.

Haec methodus minus expedita est, si praeter α et δ etiam E desideratur: formula commodissima ad hunc angulum determinandum tunc erit $\cos E = \frac{\sin \epsilon \cos \alpha}{\cos b} = \frac{\sin \epsilon \cos l}{\cos \delta}$. Sed per hanc formulam E accurate computari nequit, quoties $\pm \cos E$ parum ab unitate differt; praeterea ambiguitas remanet, utrum E inter 0 et 180^0 an inter 180^0 et 360^0 accipere oporteat. Incommodum prius raro ullius momenti est, praesertim, quum ad computandas rationes differentiales ultima praecisio in valore ipsius E non requiratur: ambiguitas vero illa adiumento aequationis $\cos b \cos \delta \sin E = \cos \epsilon - \sin b \sin \delta$ facile tollitur, quae ostendit E inter 0 et 180^0 vel inter 180^0 et 360^0 accipi debere, prout $\cos \epsilon$ maior fuerit vel minor quam $\sin b \sin \delta$: manifesto hoc examen ne necessarium quidem est, quoties alteruter angulorum b, δ limitem $66^0 32'$ non egreditur: tunc enim $\sin E$ semper fiet positivus. Ceterum eadem aequatio in casu supra addigitato ad determinationem exactiorem ipsius E , si operae pretium videtur, adhiberi poterit.

68.

Solutio problematis inversi, puta determinatio longitudinis et latitudinis ex ascensione recta et declinatione, eidem triangulo sphaerico superstruitur: formulae itaque supra traditae huic fini accomodabuntur per solam permutationem ipsius b cum δ , ipsiusque l cum $-\alpha$. Etiam has formulas, propter usum frequentem, hic apposuisse haud pigebit:

Secundum methodum art. 66 habemus

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}b) \sin \tfrac{1}{2}(E - l) = \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon + \delta))$$

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}b) \cos \tfrac{1}{2}(E - l) = \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon - \delta))$$

$$\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}b) \sin \tfrac{1}{2}(E + l) = \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon - \delta))$$

$$\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}b) \cos \tfrac{1}{2}(E + l) = \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}(\epsilon + \delta)).$$

Contra ad instar methodi alterius art. 67 determinabimus angulum auxiliarem ζ per aequationem

$$\text{tang } \zeta = \frac{\text{tang } \delta}{\sin \alpha},$$

eritque

$$\text{tang } l = \frac{\cos(\zeta - \epsilon) \text{tang } \alpha}{\cos \zeta}$$

$$\text{tang } b = \sin l \text{tang}(\zeta - \epsilon).$$

Ad calculi confirmationem adiungi poterit

$$\cos b = \frac{\cos \delta \cos \alpha}{\cos l} = \frac{\cos(\zeta - \epsilon) \cos \delta \sin \alpha}{\cos \zeta \sin l}.$$

Pro determinatione ipsius E inservient perinde ut in art. praec. aequationes

$$\cos E = \frac{\sin \epsilon \cos \alpha}{\cos b} = \frac{\sin \epsilon \cos l}{\cos \delta}$$

$$\cos b \cos \delta \sin E = \cos \epsilon - \sin b \sin \delta.$$

Variationes differentiales ipsarum l , b hisce formulis exhibebuntur:

$$dl = \frac{\sin E \cos \delta}{\cos b} d\alpha + \frac{\cos E}{\cos b} d\delta$$

$$db = -\cos E \cos \delta d\alpha + \sin E d\delta.$$

69.

Exempli caussa ex ascensione recta $355^0 43' 45'',30 = \alpha$, declinatione $-8^0 47' 25'' = \delta$, obliquitate eclipticae $23^0 27' 59'',26 = \epsilon$ longitudinem et latitudinem computabimus. Est igitur $45^0 + \frac{1}{2}\alpha = 222^0 51' 52'',65$, $45^0 - \frac{1}{2}(\epsilon + \delta) = 37^0 39' 42'',87$, $45^0 - \frac{1}{2}(\epsilon - \delta) = 28^0 52' 17'',87$; hinc porro

$\log \cos(45^0 + \frac{1}{2}\alpha)$		9,865 0820 _n
$\log \sin(45^0 - \frac{1}{2}(\epsilon + \delta))$	...	9,786 0418
$\log \cos(45^0 - \frac{1}{2}(\epsilon + \delta))$	...	9,898 5222
$\log \sin(45^0 + \frac{1}{2}\alpha)$		9,832 6803 _n
$\log \sin(45^0 - \frac{1}{2}(\epsilon - \delta))$	...	9,683 8112
$\log \cos(45^0 - \frac{1}{2}(\epsilon - \delta))$	...	9,942 3572

$$\begin{array}{ll} \log \sin(45^0 - \frac{1}{2}b) \sin \frac{1}{2}(E - l) & \dots \quad 9,651\,1238_n \\ \log \sin(45^0 - \frac{1}{2}b) \cos \frac{1}{2}(E - l) & \dots \quad 9,775\,0375_n \end{array}$$

unde $\frac{1}{2}(E - l) = 216^0 56' 5'', 39$; $\log \sin(45^0 - \frac{1}{2}b) = 9,872\,3171$.

$$\begin{array}{ll} \log \cos(45^0 - \frac{1}{2}b) \sin \frac{1}{2}(E + l) & \dots \quad 9,516\,4915_n \\ \log \cos(45^0 - \frac{1}{2}b) \cos \frac{1}{2}(E + l) & \dots \quad 9,763\,6042_n \end{array}$$

unde $\frac{1}{2}(E + l) = 209^0 30' 49'', 94$; $\log \cos(45^0 - \frac{1}{2}b) = 9,823\,9669$.

Fit itaque $E = 426^0 26' 55'', 33$, $l = -7^0 25' 15'', 45$, sive quod eodem redit $E = 66^0 26' 55'', 33$, $l = 352^0 34' 44'', 55$; angulus $45^0 - \frac{1}{2}b$ e logarithmo sinus habetur $48^0 10' 58'', 11$, e logarithmo cosinus $48^0 10' 58'', 17$, e tangente, cuius logarithmus illorum differentia est, $48^0 10' 58'', 14$; hinc $b = -6^0 21' 56'', 28$.

Secundum methodum alteram calculus ita se habet:

$$\begin{array}{ll} \log \tan \delta & \dots\dots\dots 9,189\,3062_n \\ \log \sin \alpha & \dots\dots\dots 8,871\,9792_n \\ \hline \log \tan \zeta & \dots\dots\dots 0,317\,3270 \\ \zeta = & 64^0 17' 6'', 83 \\ \zeta - \epsilon = & 40 \quad 49 \quad 7,57 \\ \\ \text{C. } \log \cos \zeta & \dots\dots\dots 0,362\,6190 \\ \log \cos(\zeta - \epsilon) & \dots\dots\dots 9,878\,9703 \\ \log \tan \alpha & \dots\dots\dots 8,873\,1869_n \\ \hline \log \tan l & \dots\dots\dots 9,114\,7762_n \\ l = & 352^0 34' 44'', 50 \\ \\ \log \sin l & \dots\dots\dots 9,111\,1232_n \\ \log \tan(\zeta - \epsilon) & \dots\dots\dots 9,936\,3874 \\ \hline \log \tan b & \dots\dots\dots 9,047\,5106_n \\ b = & -6^0 21' 56'', 26 \end{array}$$

Ad determinandum angulum E habemus calculum duplicem:

$$\begin{array}{ll} \log \sin \epsilon & \dots\dots\dots 9,600\,1144 \\ \log \cos \alpha & \dots\dots\dots 9,998\,7924 \\ \text{C. } \log \cos b & \dots\dots\dots 0,002\,6859 \\ \hline \log \cos E & \dots\dots\dots 9,601\,5927 \end{array}$$

$\log \sin \epsilon$		9,600 1144
$\log \cos l$		9,996 3470
$C. \log \cos \delta$		0,005 1313
$\log \cos E$		9,601 5927

unde $E = 66^0 26' 55'', 35$.

70.

Ne quid eorum, quae ad calculum locorum geocentricorum requiruntur, hic desideretur, quaedam adhuc de *parallaxi* atque *aberratione* adiicienda sunt. Methodum quidem supra iam descripsimus, secundum quam locus parallaxi affectus, i. e. cuilibet in superficie terrae puncto respondens, immediate maximaque facilitate determinari potest: sed quum in methodo vulgari in art. 62 et sequ. tradita locus geocentricus ad terrae centrum referri soleat, in quo casu a parallaxi liber dicitur, methodum peculiarem pro determinanda parallaxi, quae est inter utrumque locum differentia, adicere oportebit.

Sint corporis coelestis longitudo et latitudo geocentrica respectu centri terrae λ , β ; eadem respectu puncti cuiusvis in superficie terrae l , b ; distantia corporis a terrae centro r , a puncto superficiei Δ ; denique respondeat in sphaera coelesti ipsi zenith huius puncti longitudo L , latitudo B , designeturque radius terrae per R . Sponte iam patet, omnes aequationes art. 62 etiam hic locum esse habituras; sed notabiliter contrahi poterunt, quum R hic exprimat quantitatem prae r et Δ tantum non evanescentem. Ceterum eadem aequationes manifesto etiamnum valebunt, si λ , l , L pro longitudinibus ascensionibus rectas, atque β , b , B pro latitudinibus declinationes exprimunt. In hoc casu $l - \lambda$, $b - \beta$ erunt parallaxes ascensionis rectae et declinationis, in illo vero parallaxes longitudinis et latitudinis. Quodsi iam R ut quantitas primi ordinis tractatur, eiusdem ordinis erunt $l - \lambda$, $b - \beta$, $\Delta - r$, neglectisque ordinibus superioribus e formulis art. 62 facile derivabitur:

- I. $l - \lambda = \frac{R \cos B \sin(\lambda - L)}{r \cos \beta}$
- II. $b - \beta = \frac{R \cos B \cos \beta}{r} \{ \tan \beta \cos(\lambda - L) - \tan B \}$
- III. $\Delta - r = -R \cos B \sin \beta \{ \cotang \beta \cos(\lambda - L) + \tan B \}$.

Accipiendo angulum auxiliarem θ ita ut fiat $\tan \theta = \frac{\tan B}{\cos(\lambda - L)}$, aequationes II, III formam sequentem nanciscuntur:

$$\text{II. } b - \beta = \frac{R \cos B \cos(\lambda - L) \sin(\beta - \theta)}{r \cos \theta} = \frac{R \sin B \sin(\beta - \theta)}{r \sin \theta}$$

$$\text{III. } \Delta - r = -\frac{R \cos B \cos(\lambda - L) \cos(\beta - \theta)}{\cos \theta} = -\frac{R \sin B \cos(\beta - \theta)}{\sin \theta}.$$

Ceterum patet, ut in I et II $l - \lambda$ et $b - \beta$ in minutis secundis obtineantur, pro R accipi debere parallaxem mediam solarem in minutis secundis expressam; in III vero pro R eadem parallaxis per $206265''$ divisa accipienda est. Tandem nullo praecisionis detrimento in valoribus parallaxium pro r , λ , β adhibere licebit Δ , l , b , quoties in problemate inverso e loco parallaxi affecto locum ab eadem liberum determinare oportet.

Exemplum. Sit ascensio recta Solis pro centro terrae $220^0 46' 44'',65 = \lambda$, declinatio $-15^0 49' 43'',94 = \beta$, distantia $0,9904311 = r$; porro tempus siderum in aliquo loco in terrae superficie gradibus expressum $78^0 20' 38'' = L$, loci elevatio poli $45^0 27' 57'' = B$, parallaxis media solaris $8'',6 = R$. Quaeritur locus Solis ex hoc loco visus, distantiaque ab eodem.

$\log R$		0,93450
$\log \cos B$		9,84593
$C. \log r$		0,00418
$C. \log \cos \beta$		0,01679
$\log \sin(\lambda - L)$	...	9,78509
$\log(l - \lambda)$		0,58649
$l - \lambda =$		$+3'',86$
$l =$		$220^0 46' 48'',51$
$\log \tan B$		0,00706
$\log \cos(\lambda - L)$	..	9,89909 _n
$\log \tan \theta$		0,10797 _n
$\theta =$		$127^0 57' 0''$
$\beta - \theta =$		$-143^0 46' 44''$

$\log R$		0,93450
$\log \sin B$		9,85299
$C. \log r$		0,00418
$C. \log \sin \theta$		0,10317
$\log \sin(\beta - \theta)$	...	9,77152 _n
$\log(b - \beta)$		0,66636 _n
$b - \beta =$		$-4'',64$
$b =$		$-15^0 49' 48'',58$
$\log(b - \beta)$		0,66636 _n
$\log \cotang(\beta - \theta)$		0,13522
$\log r$		9,99582
$\log 1''$		4,68557
$\log(r - \Delta)$		5,48297 _n
$r - \Delta =$		$-0,000\ 0304$
$\Delta =$		0,990 4615

71.

Aberratio fixarum, nec non pars ea aberrationis planetarum et cometarum, quae soli motui terrae debetur, oritur inde, quod cum terra integra *tubus* movetur, dum radius luminis ipsius axem opticum percurrit. Corporis coelestis locus observatus (qui et apparens seu aberratione affectus dicitur) determinatur per situm axis optici telescopii ita collocati, ut radius luminis ab illo egressus in via sua utramque huius axis extremitatem attingat: hic autem situs diversus est a situ vero radii luminis in spatio. Distinguamus duo temporis momenta t , t' , ubi radius luminis extremitatem anteriorem (centrum vitri obiectivi), ubique posteriorem (focum vitri obiectivi) attingit; sint harum extremitatum loci in spatio pro momento priori a , b ; pro posteriori a' , b' . Tunc patet, rectam ab' esse situm verum radii in spatio, loco apparenti autem respondere rectam ab vel $a'b'$ (quas pro parallelis habere licet): nullo porro negotio perspicitur, locum apparentem a longitudine tubi non pendere. Differentia inter situm rectarum $b'a$, ba est aberratio qualis pro stellis fixis locum habet: modum eam calculandi hic tamquam notum silentio transimus. Pro stellis errantibus autem ista differentia nondum est aberratio completa: planeta scilicet, dum radius ex ipso egressus ad terram descendit, locum suum ipse mutat, quapropter situs huius radii non respondet loco geocentrico vero tempore observationis. Supponamus, radium luminis qui tempore t

in tubum impingit tempore T e planeta egressum esse; designeturque locus planetae in spatio tempore T per P , tempore t autem per p ; denique sit A locus extremitatis antecedentis axis tubi pro tempore T . Tunc patet

1° rectam AP exhibere locum verum planetae tempore T ;

2° rectam ap autem locum verum tempore t ;

3° rectam ba vel $b'a'$ locum apparentem tempore t vel t' (quorum differentia ceu quantitas infinite parva spectari potest);

4° rectam $b'a$ eundem locum apparentem ab aberratione fixarum purgatum.

Iam puncta P , a , b' in linea recta iacent, eruntque partes Pa , ab' proportionales temporum intervallis $t - T$, $t' - t$, siquidem motus luminis celeritate uniformi peragitur. Temporis intervallum $t' - T$ propter immensam luminis velocitatem semper est perparvum, intra quod motum terrae tamquam rectilineum ac celeritate uniformi peractum supponere licet: sic etiam A , a , a' in directum iacebunt, partesque Aa , aa' quoque intervallis $t - T$, $t' - t$ proportionales erunt. Hinc facile concluditur, rectas AP , $b'a'$ esse parallelas, adeoque locum primum cum tertio identicum.

Tempus $t - T$ erit productum distantiae Pa in 493^s, intra quod lumen percurrit distantiam mediam terrae a Sole, quam pro unitate accepimus. In hoc calculo pro distantia Pa etiam PA vel pa accipere licebit, quum differentia nullius momenti esse possit.

Ex his principiis tres demanant methodi, planetae vel cometae locum apparentem pro quovis tempore t determinandi, e quibus modo hanc modo illam praeferre conveniet.

I. Subtrahatur a tempore proposito tempus intra quod lumen a planeta ad terram descendit: sic prodibit tempus reductum T , pro quo locus verus more solito computatus cum apparente pro t identicus erit. Ad computum reductionis temporis $t - T$ distantiam a terra novisse oportet: plerumque ad hunc finem subsidia commoda non deerunt, e. g. per ephemeridem vel levi tantum calamo calculatam, alioquin distantiam veram pro tempore t more solito sed neglecta praecisione nimia per calculum praeliminarem determinare sufficiet.

II. Computetur pro tempore proposito t locus verus atque distantia, ex hac reductio temporis $t - T$, atque hinc adiumento motus diurni (in longitudine et latitudine vel in ascensione recta et declinatione) reductio loci veri ad tempus T .

III. Computetur locus heliocentricus terrae quidem pro tempore t : locus heliocentricus planetae autem pro tempore T : dein ex horum combinatione more solito locus geocentricus planetae, qui aberratione fixarum (per methodum notam eruenda sive e tabulis depromenda) auctus locum apparentem quaesitum suppeditabit.

Methodus secunda, quae vulgo in usum vocari solet, eo quidem prae reliquis se commendat, quod ad distantiam determinandam nunquam opus est calculo duplici, attamen eo laborat incommodo, quod adhiberi nequit, nisi plures loci vicini vel calculentur vel ex observationibus iam innotuerint; alioquin enim motum diurnum pro dato habere non liceret.

Incommodum, quo methodus prima et tertia premuntur, plane tollitur, quoties plures loci sibi vicini calculandi sunt. Quam primum enim pro quibusdam distantiae iam innotuerunt, percommode et praecisione sufficiente distantias proxime sequentes per subsidia trita concludere licebit. Ceterum si distantia est nota, methodus prima tertiae ideo plerumque praeferenda erit, quod aberratione fixarum opus non habet; sin vero ad calculum duplicem refugiendum est, tertia eo se commendat, quod in calculo altero locus terrae saltem retinendus est.

Sponte iam se offerunt, quae ad problema inversum requiruntur, puta si e loco apparente verus derivandus est. Scilicet secundum methodum I retinebis locum ipsum immutatum, sed tempus t , cui locus propositus ut apparens respondet, convertes in reductum T , cui idem tamquam verus respondebit. Secundum methodum II retinebis tempus t , sed loco proposito adicies motum intra tempus $t-T$, quasi istum ad tempus $t+(t-T)$ reducere velles. Secundum methodum III locum propositum ab aberratione fixarum liberatum tamquam locum verum pro tempore T considerabis, sed terrae locus verus tempori t respondens retinendus est ac si ad istud pertineret. Utilitas methodi tertiae in Libro secundo clarius elucebit.

Ceterum, ne quid desit, adhuc observamus, locum Solis ab aberratione perinde affici ac locum planetae: sed quoniam tum distantia a terra tum motus diurnus propemodum sunt constantes, aberratio ipsa semper valorem tantum non constantem obtinet motui medio Solis in 493^s aequalem, adeoque $= 20'',25$, quae quantitas a longitudine vera subtrahenda est, ut apparens prodeat. Valor aberrationis exactus est in ratione composita distantiae et motus diurni, sive quod eodem redit in ratione inversa distantiae, unde ille valor medius in apogeo $0'',34$ diminuendus in perigeo tantumdem augendus esset. Ceterum tabulae nostrae solares aberrationem constantem $-20'',25$ iam includunt; quapropter ad obtinendum longitudinem veram tabulari $20'',25$ addere oportebit.

72.

Finem huic Sectioni imponent quaedam problemata, quae in determinatione orbitalium planetarum et cometarum usum frequentem praestant. Ac primo quidem ad parallaxem reveniemus, a qua locum observatum liberare in art. 70 docuimus. Talis reductio ad centrum terrae, quum planetae distantiam a terra proxime saltem notam supponat, institui nequit, quoties planetae

observati orbita omnino adhuc incognita est. Attamen in hoc quoque casu finem saltem eundem assequi licet, cuius caussa reductio ad centrum terrae suscipitur, ideo scilicet, quod hoc centro in plano eclipticae iacente vel iacere supposito plures formulae maiorem simplicitatem et concinnitatem nanciscuntur, quam si observatio ad punctum extra planum eclipticae referretur. Hoc itaque respectu nihil interest, utrum observatio ad centrum terrae an ad quodvis aliud punctum in plano eclipticae reducatur. Iam patet, si ad hunc finem punctum intersectionis plani eclipticae cum recta a planeta ad locum verum observationis ducta eligatur, observationem ipsam nulla prorsus reductione opus habere, quum planeta ex omnibus punctis illius rectae perinde videatur^{*)}: quamobrem hoc punctum quasi locum fictum observationis pro vero substituere licebit. Situm illius puncti sequenti modo determinamus.

Sit corporis coelestis longitudo λ , latitudo β , distantia Δ , omnia respectu loci veri observationis in terrae superficie, cuius zenith respondeat longitudo l , latitudo b ; porro sit π semidiameter terrae, L longitudo heliocentrica centri terrae, B eiusdem latitudo, R eiusdem distantia a Sole; denique L' longitudo heliocentrica loci ficti, R' ipsius distantia a Sole, $\Delta + \delta$ ipsius distantia a corpore coelesti. Tunc nullo negotio eruentur aequationes sequentes, denotante N angulum arbitrarium:

$$\begin{aligned} R' \cos(L' - N) + \delta \cos \beta \cos(\lambda - N) &= R \cos B \cos(L - N) \\ &\quad + \pi \cos b \cos(l - N) \\ R' \sin(L' - N) + \delta \cos \beta \sin(\lambda - N) &= R \cos B \sin(L - N) \\ &\quad + \pi \cos b \sin(l - N) \\ \delta \sin \beta &= R \sin B + \pi \sin b. \end{aligned}$$

Statuendo itaque

$$\text{I.} \quad (R \sin B + \pi \sin b) \cotang \beta = \mu,$$

erit

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} R' \cos(L' - N) &= R \cos B \cos(L - N) \\ &\quad + \pi \cos b \cos(l - N) - \mu \cos(\lambda - N) \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} R' \sin(L' - N) &= R \cos B \sin(L - N) \\ &\quad + \pi \cos b \sin(l - N) - \mu \sin(\lambda - N) \end{aligned}$$

$$\text{IV.} \quad \delta = \frac{\mu}{\cos \beta}.$$

Ex aequationibus II, III determinari poterunt R' et L' , ex IV intervallum temporis temporis observationis addendum quod erit minutis secundis = 493δ .

^{*)}Si ultima praecisio desideraretur, intervallum temporis, intra quod lumen a vero loco observationis ad fictum seu ab hoc ad illum delabitur, temporis proposito vel addere vel inde subducere oporteret, siquidem de locis aberratione affectis agitur: sed haec differentia vix ullius momenti esse potest, nisi latitudo perparva fuerit.

Hae aequationes sunt exactae et generales, poteruntque tunc quoque adhiberi, ubi pro plano eclipticae aequatore substituto L, L', l, λ designant ascensiones rectas, B, b, β declinationes. Sed in casu de quo hic potissimum agimus, scilicet ubi locus fictus in ecliptica situs esse debet, exiguitas quantatum $B, \pi, L' - L$ adhuc quandam formularum praecedentium contractionem permittit. Poterit enim pro π assumi parallaxis media solaris, B pro $\sin B$, 1 pro $\cos B$ et $\cos(L' - L)$, $L' - L$ pro $\sin(L' - L)$. Ita faciendo $N = L$, formulae praecedentes assumunt formam sequentem:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \mu = (RB + \pi \sin b) \cotang \beta \\ \text{II.} \quad & R' = R + \pi \cos b \cos(l - L) - \mu \cos(\lambda - L) \\ \text{III.} \quad & L' - L = \frac{\pi \cos b \sin(l - L) - \mu \sin(\lambda - L)}{R'}. \end{aligned}$$

Proprie quidem hic $B, \pi, L' - L$ in partibus radii exprimendi sunt; sed patet, si illi anguli in minutis secundis exprimantur, aequationes I, III sine mutatione retineri posse, pro II autem substitui debere

$$R' = R + \frac{\pi \cos b \cos(l - L) - \mu \cos(\lambda - L)}{206265''}.$$

Ceterum in formula III pro denominatore R' absque errore sensibili semper adhibere licebit R . Reductio temporis autem, angulis in minutis secundis expressis, fiet

$$= \frac{493^s \cdot \mu}{206265'' \cdot \cos \beta}.$$

73.

Exemplum. Sit $\lambda = 354^0 44' 54''$, $\beta = -4^0 59' 32''$, $l = 24^0 29'$, $b = 46^0 53'$, $L = 12^0 28' 54''$, $B = +0'' 49$, $R = 0,9988839$, $\pi = 8'' 60$. Ecce iam calculum:

$\log R$		9,99951
$\log B$		9,69020
$\log BR$		9,68971
$\log \pi$		0,93450
$\log \sin b$		9,86330
$\log \pi \sin b$		0,79780
Hinc $\log(BR + \pi \sin b)$	...	0,83041
$\log \cotang \beta$		1,05873 _n
$\log \mu$		1,88914 _n

$\log \pi$		0,93450
$\log \cos b$		9,83473
$\log 1''$		4,68557
$\log \cos(l - L)$	...	9,99040
		5,44520
numerus		+0,0000279
$\log \mu$		1,88914 _n
$\log 1''$		4,68557
$\log \cos(\lambda - L)$	...	9,97886
		6,55357 _n
numerus		-0,0003577

Hinc colligitur $R' = R + 0,000\,3856 = 0,999\,2695$. Porro erit

$\log \pi \cos b$		0,76923
$\log \sin(l - L)$		9,31794
Compl. $\log R'$	...	0,00032
		0,08749
numerus		+1'',22
$\log \mu$		1,88914 _n
$\log \sin(\lambda - L)$	...	9,48371 _n
C. $\log R'$		0,00032
		1,37317
numerus		+23'',61

Unde colligitur $L' = L - 22'',39$. Denique habetur

$\log \mu$		1,88914 _n
C. $\log 206265$	...	4,68557
$\log 493$		2,69285
C. $\log \cos \beta$		0,00165
		9,26921 _n

unde reductio temporis = $-0^s,186$, adeoque nullius momenti.

74.

Problema aliud, *e corporis coelestis loco geocentrico atque situ plani orbitae eius locum heliocentricum in orbita derivare*, eatenus praecedenti affine est, quod quoque ab intersectione rectae inter terram et corpus coeleste ductae cum plano positione dato pendet. Solutio commodissime petitur e formulis art. 65, ubi characterum significatio haec erat:

L longitudo terrae, R distantia a Sole; latitudinem B statuimus = 0 (quum casus, ubi non est = 0, ad hunc facile reduci possit per art. 72), unde $R' = R$; l corporis coelestis longitudo geocentrica, b latitudo, Δ distantia a terra, r distantia a Sole, u argumentum latitudinis, Ω longitudo nodi ascendentis, i inclinatio orbitae. Ita habemus aequationes

$$\text{I. } r \cos u - R \cos(L - \Omega) = \Delta \cos b \cos(l - \Omega)$$

$$\text{II. } r \cos i \sin u - R \sin(L - \Omega) = \Delta \cos b \sin(l - \Omega)$$

$$\text{III. } r \sin i \sin u = \Delta \sin b.$$

Multiplicando aequationem I per $\sin(L - \Omega) \sin b$, II per $-\cos(L - \Omega) \sin b$, III per $-\sin(L - l) \cos b$, fit additis productis

$$\begin{aligned} & \cos u \sin(L - \Omega) \sin b \\ & - \sin u \cos i \cos(L - \Omega) \sin b \\ & - \sin u \sin i \sin(L - l) \cos b = 0, \end{aligned}$$

unde

$$\text{IV. } \tan u = \frac{\sin(L - \Omega) \sin b}{\cos i \cos(L - \Omega) \sin b + \sin i \sin(L - l) \cos b}.$$

Multiplicando autem I per $\sin(l - \Omega)$, II per $-\cos(l - \Omega)$, prodit productis additis

$$\text{V. } r = \frac{R \sin(L - l)}{\sin u \cos i \cos(l - \Omega) - \cos u \sin(l - \Omega)}.$$

Ambiguitas in determinatione ipsius u per aequ. IV sponte tollitur per aequ. III, quae ostendit, u inter 0 et 180^0 vel inter 180^0 et 360^0 accipi debere, prout latitudo b fuerit positiva vel negativa; sin vero fuerit $b = 0$, aequatio V docet, statui debere $u = 0$ vel $u = 180^0$, prout $\sin(L - l)$ et $\sin(l - \Omega)$ diversa signa habeant, vel eadem.

Computum numericum formularum IV et V variis modis per introductionem angulorum auxiliarium contrahere licet. E. g.

$$\text{statuendo } \frac{\tan b \cos(L - \Omega)}{\sin(L - l)} = \tan A,$$

$$\text{fit } \tan u = \frac{\sin A \tan(L - \Omega)}{\sin(A + i)}$$

$$\text{statuendo } \frac{\text{tang } i \sin(L - l)}{\cos(L - \Omega)} = \text{tang } B,$$

$$\text{fit } \text{tang } u = \frac{\cos B \sin b \text{tang}(L - \Omega)}{\sin(B + b) \cos i}.$$

Perinde aequ. V per introductionem anguli cuius tangens = $\cos i \text{tang } u$, vel $= \frac{\text{tang}(l - \Omega)}{\cos i}$ formam concinniore[m] nanciscitur. Sicuti formulam V e combinatione aequationum I, II obtinuimus, per combinationem aequationum II, III ad sequentem pervenimus:

$$r = \frac{R \sin(L - \Omega)}{\sin u (\cos i - \sin i \sin(l - \Omega) \cotang b)}$$

et perinde per combinationem aequationum I, III ad hanc:

$$r = \frac{R \cos(L - \Omega)}{\cos u - \sin u \sin i \cos(l - \Omega) \cotang b}.$$

Utramque perinde ut V per introductionem angulorum auxiliarium simpliciorum reddere licet. Solutiones e praecedentibus demanantes collectae exemploque illustratae inveniuntur in VON ZACH *Monatliche Correspondenz Vol. V. p. 540* ^[*)], quapropter hic evolutione ulteriori supersedemus. — Si praeter u et r etiam distantia Δ desideratur, per aequationem III determinari poterit.

75.

Alia solutio problematis praec. superstruitur observationi in art. 64 III traditae, quod locus heliocentricus terrae, geocentricus corporis coelestis eiusdemque locus heliocentricus in uno eodemque circulo maximo sphaerae sunt siti. Sint in fig. 3 illi loci resp. T, G, H ; porro Ω locus nodi ascendentis; $\Omega T, \Omega H$ partes eclipticae et orbitae, GP perpendicularum ad eclipticam ex G demissum, quod igitur erit = b . Hinc et ex arcu $PT = L - l$ determinabitur angulus T atque arcus TG . Dein in triangulo sphaerico ΩHT data sunt angulus $\Omega = i$, angulus T latusque $\Omega T = L - \Omega$, unde eruentur duo reliqua latera $\Omega H = u$ atque TH . Tandem erit $HG = TG - TH$ atque $r = \frac{R \sin TG}{\sin HG}$, $\Delta = \frac{R \sin TH}{\sin HG}$.

76.

In art. 52 variationes differentiales longitudinis et latitudinis heliocentricae distantiaeque curtatae per variationes argumenti latitudinis u , inclinationis i radiique vectoris r exprimere docuimus, posteaque (art. 64, IV) ex illis deduximus variationes longitudinis et latitudinis geocentricae, l et b : per combinationem itaque harum formularum dl et db per $du, di, d\Omega, dr$ expressae

[*] Juni 1802. Band VI. S. 87.]

habebuntur. Sed operae pretium erit ostendere, quomodo in hoc quoque calculo reductione loci heliocentrici ad eclipticam supersedere liceat, sicuti in art. 65 locum geocentricum immediate e loco heliocentrico in orbita deduximus. Ut formulae eo simpliciores evadant, latitudinem terrae negligemus, quum certe in formulis differentialibus effectum sensibilem habere nequeat. Praesto sunt itaque formulae sequentes, in quibus brevitatis caussa ω pro $l - \mathfrak{Q}$, nec non ut supra Δ' pro $\Delta \cos b$ scribimus:

$$\begin{aligned}\Delta' \cos \omega &= r \cos u - R \cos(L - \mathfrak{Q}) &= \xi \\ \Delta' \sin \omega &= r \cos i \sin u - R \sin(L - \mathfrak{Q}) &= \eta \\ \Delta' \tan b &= r \sin i \sin u &= \zeta,\end{aligned}$$

e quarum differentiatione prodit

$$\begin{aligned}\cos \omega \cdot d\Delta' - \Delta' \sin \omega \cdot d\omega &= d\xi \\ \sin \omega \cdot d\Delta' + \Delta' \cos \omega \cdot d\omega &= d\eta \\ \tan b \cdot d\Delta' + \frac{\Delta}{\cos b} db &= d\zeta.\end{aligned}$$

Hinc per eliminationem

$$\begin{aligned}d\omega &= \frac{-\sin \omega \cdot d\xi + \cos \omega \cdot d\eta}{\Delta'} \\ db &= \frac{-\cos \omega \sin b \cdot d\xi - \sin \omega \sin b \cdot d\eta + \cos b \cdot d\zeta}{\Delta}.\end{aligned}$$

Si in his formulis pro ξ , η , ζ valores sui rite substituuntur, $d\omega$ et db per dr , du , di , $d\mathfrak{Q}$ expressae prodibunt; dein, propter $dl = d\omega + d\mathfrak{Q}$, differentialia partialia ipsarum l , b ita se habebunt:

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad \Delta' \left(\frac{dl}{dr} \right) &= -\sin \omega \cos u + \cos \omega \sin u \cos i \\ \text{II.} \quad \frac{\Delta'}{r} \left(\frac{dl}{du} \right) &= \sin \omega \sin u + \cos \omega \cos u \cos i \\ \text{III.} \quad \frac{\Delta'}{r} \left(\frac{dl}{di} \right) &= -\cos \omega \sin u \sin i \\ \text{IV.} \quad \left(\frac{dl}{d\mathfrak{Q}} \right) &= 1 + \frac{R}{\Delta'} \cos(L - \mathfrak{Q} - \omega) \\ &= 1 + \frac{R}{\Delta'} \cos(L - l) \\ \text{V.} \quad \Delta \left(\frac{db}{dr} \right) &= -\cos \omega \cos u \sin b \\ &\quad - \sin \omega \sin u \cos i \sin b + \sin u \sin i \cos b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{VI.} \quad & \frac{\Delta}{r} \left(\frac{db}{du} \right) = \cos \omega \sin u \sin b \\
 & \quad - \sin \omega \cos u \cos i \sin b + \cos u \sin i \cos b \\
 \text{VII.} \quad & \frac{\Delta}{r} \left(\frac{db}{di} \right) = \sin \omega \sin u \sin i \sin b + \sin u \cos i \cos b \\
 \text{VIII.} \quad & \frac{\Delta}{R} \left(\frac{db}{d\Omega} \right) = \sin b \sin(L - \Omega - \omega) \\
 & \quad = \sin b \sin(L - l).
 \end{aligned}$$

Formulae IV et VIII hic iam in forma ad calculum commodissima apparent; formulae I, III, V autem per substitutiones obvias ad formam concinniore rediguntur, puta

$$\begin{aligned}
 \text{I}^*. \quad & \left(\frac{dl}{dr} \right) = \frac{R}{r\Delta'} \sin(L - l) \\
 \text{III}^*. \quad & \left(\frac{dl}{di} \right) = -\cos \omega \tan b \\
 \text{V}^*. \quad & \left(\frac{db}{dr} \right) = -\frac{R}{r\Delta} \cos(L - l) \sin b \\
 & \quad = -\frac{R}{r\Delta'} \cos(L - l) \sin b \cos b.
 \end{aligned}$$

Denique formulae reliquae quoque II, VI, VII per introductionem quorundam angulorum auxiliarium in formam simpliciore abeunt: quod commodissime fit sequenti modo. Determinentur anguli auxiliares M , N per formulas

$$\begin{aligned}
 \tan M &= \frac{\tan \omega}{\cos i}, \\
 \tan N &= \sin \omega \tan i = \tan M \cos \omega \sin i.
 \end{aligned}$$

Tunc simul fit

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos M^2}{\cos N^2} &= \frac{1 + \tan N^2}{1 + \tan M^2} \\
 &= \frac{\cos i^2 + \sin \omega^2 \sin i^2}{\cos i^2 + \tan \omega^2} = \cos \omega^2 :
 \end{aligned}$$

iam quum ambiguitatem in determinatione ipsorum M , N per tangentes suas remanentem ad libitum decidere liceat, hoc ita fieri posse patet, ut habeatur $\frac{\cos M}{\cos N} = +\cos \omega$, ac proin $\frac{\sin N}{\sin M} = +\sin i$. Quibus ita factis, formulae II, VI, VII transeunt in sequentes:

$$\text{II}^*. \quad \left(\frac{dl}{du} \right) = \frac{r \sin \omega \cos(M - u)}{\Delta' \sin M}$$

$$\text{VI}^*. \quad \left(\frac{db}{du} \right) = \frac{r}{\Delta} \{ \cos \omega \sin i \cos(M - u) \cos(N - b) \\ + \sin(M - u) \sin(N - b) \}$$

$$\text{VII}^*. \quad \left(\frac{db}{di} \right) = \frac{r \sin u \cos i \cos(N - b)}{\Delta \cos N}.$$

Hae transformationes respectu formularum II, VII neminem morabuntur, respectu formulae VI autem aliqua explicatio haud superflua erit. Substituendo scilicet in formula VI primo $M - (M - u)$ pro u , prodit

$$\frac{\Delta}{r} \left(\frac{db}{du} \right) = \cos(M - u) \{ \cos \omega \sin M \sin b \\ - \sin \omega \cos i \cos M \sin b + \sin i \cos M \cos b \} \\ - \sin(M - u) \{ \cos \omega \cos M \sin b \\ + \sin \omega \cos i \sin M \sin b - \sin i \sin M \cos b \}.$$

Iam fit $\cos \omega \sin M = \cos i^2 \cos \omega \sin M + \sin i^2 \cos \omega \sin M = \sin \omega \cos i \cos M + \sin i^2 \cos \omega \sin M$; unde pars prior illius expressionis transit in

$$\sin i \cos(M - u) \{ \sin i \cos \omega \sin M \sin b + \cos M \cos b \} \\ = \sin i \cos(M - u) \{ \cos \omega \sin N \sin b + \cos \omega \cos N \cos b \} \\ = \cos \omega \sin i \cos(M - u) \cos(N - b).$$

Perinde fit $\cos N = \cos \omega^2 \cos N + \sin \omega^2 \cos N = \cos \omega \cos M + \sin \omega \cos i \sin M$; unde expressionis pars posterior transit in

$$- \sin(M - u) \{ \cos N \sin b - \sin N \cos b \} = \sin(M - u) \sin(N - b).$$

Hinc expressio VI^{*} protinus demanat.

Angulus auxiliaris M etiam ad transformationem formulae I adhiberi potest, quo introducto assumit formam

$$\text{I}^{**}. \quad \left(\frac{dl}{dr} \right) = - \frac{\sin \omega \sin(M - u)}{\Delta' \sin M},$$

e cuius comparatione cum formula I^{*} concluditur

$$-R \sin(L - l) \sin M = r \sin \omega \sin(M - u);$$

hinc etiam formulae II^{*} forma paullo adhuc simplicior tribui potest, puta

$$\text{II}^{**}. \quad \left(\frac{dl}{du} \right) = - \frac{R}{\Delta'} \sin(L - l) \cotang(M - u).$$

Ut formula VI* adhuc magis contrahatur, angulum auxiliarem novum introducere oportet, quod duplici modo fieri potest, scilicet statuendo vel $\text{tang } P = \frac{\text{tang}(M - u)}{\cos \omega \sin i}$, vel $\text{tang } Q = \frac{\text{tang}(N - b)}{\cos \omega \sin i}$: quo facto emergit

$$\begin{aligned} \text{VI}^{**}. \quad \left(\frac{db}{du} \right) &= \frac{r \sin(M - u) \cos(N - b - P)}{\Delta \sin P} \\ &= \frac{r \sin(N - b) \cos(M - u - Q)}{\Delta \sin Q}. \end{aligned}$$

Ceterum quantitates auxiliares M , N , P , Q non sunt mere fictitiae, facileque, quidnam in sphaera coelesti singulis respondeat, assignare liceret: quin adeo hoc modo aequationum praecedentium plures adhuc elegantius exhiberi possent per arcus angulosve in sphaera, quibus tamen eo minus hic immoramur, quum in calculo numerico ipso formulas supra traditas superfluas reddere non valeant.

77.

Iunctis iis, quae in art. praec. evoluta sunt, cum iis quae in artt. 15, 16, 20, 27, 28 pro singulis sectionum conicarum generibus tradidimus, omnia praesto erunt, quae ad calculum variationum differentialium loco geocentrico a variationibus singulorum elementorum inductarum requiruntur. Ad maiorem illustrationem horum praeceptorum exemplum supra in artt. 13, 14, 51, 63, 65 tractatum resumemus. Ac primo quidem ad normam art. praec. dl et db per dr , du , di , $d\omega$ exprimemus, qui calculus ita se habet:

$\log \text{tang } \omega$		8,40113
$\log \cos i$		9,98853
$\log \text{tang } M$	...	8,41260
$M =$		$1^0 28' 52''$
$M - u =$		165 17 8
$\log \sin \omega$		8,40099 _n
$\log \text{tang } i$		9,36723
$\log \text{tang } N$	...	7,76822 _n
$N =$		$179^0 39' 50''$
$N - b =$		186 1 45

$\log \tan(M - u)$	...	9,41932 _n
$\log \cos \omega \sin i$		9,35562 _n
$\log \tan P$		0,06370
$P =$		49 ⁰ 11' 13''
$N - b - P =$		136 50 32

I*

$\log \sin(L - l)$	...	9,72125
$\log R$		9,99810
C. $\log \Delta'$		9,92027
(*)		9,63962
C. $\log r$		9,67401
$\log \left(\frac{dl}{dr} \right)$		9,31363

II**

(*)		9,63962
$\log \cot(M - u)$	.	0,58068 _n
$\log \left(\frac{dl}{du} \right)$		0,22030

III*

$\log \cos \omega$		9,99986 _n
$\log \tan b$		9,04749 _n
$\log \left(\frac{dl}{di} \right)$		9,04735 _n

IV

$\log \frac{R}{\Delta'}$		9,91837
$\log \cos(L - l)$	..	9,92956
(**)		9,84793
$= \log \left(\frac{dl}{d\Omega} - 1 \right)$		

V*

(**)		9,84793
$\log \sin b \cos b$	..	9,04212 _n
C. $\log r$		9,67401
$\log \left(\frac{db}{dr} \right)$		8,56406

VI**

$\log \frac{r}{\Delta}$		0,24357
$\log \sin(M - u)$		9,40484
$\log \cos(N - b - P)$	..	9,86301 _n
C. $\log \sin P$		0,12099
$\log \left(\frac{db}{du} \right)$		9,63241 _n

VII*

$\log r \sin u \cos i$	..	9,75999 _n
$\log \cos(N - b)$	..	9,99759 _n
C. $\log \Delta$		9,91759
C. $\log \cos N$		0,00001 _n
$\log \left(\frac{db}{di} \right)$		9,67518 _n

VIII

(*)		9,63962
$\log \sin b \cos b$	..	9,04212 _n
$\log \left(\frac{db}{d\Omega} \right)$		8,68174 _n

Collectis hisce valoribus prodit

$$dl = +0,20589 dr + 1,66073 du - 0,11152 di + 1,70458 d\Omega$$

$$db = +0,03665 dr - 0,42895 du - 0,47335 di - 0,04806 d\Omega.$$

Vix necesse erit quod iam saepius monuimus hic repetere, scilicet, vel variationes dl , db , du , di , $d\Omega$ in partibus radii exprimendas esse, vel coëfficientes ipsius dr per 206265'' multiplicandos, si illae in minutis secundis expressae concipiantur.

Designando iam longitudinem perihelii (quae in exemplo nostro est $52^0 18' 9'', 30$) per Π atque anomaliam veram per v , erit longitudo in orbita $= u + \Omega = v + \Pi$, adeoque $du = dv + d\Pi - d\Omega$, quo valore in formulis

praecedentibus substituto, dl et db per dr , dv , $d\Pi$, $d\Omega$, di expressae habebuntur. Nihil itaque iam superest, nisi ut dr et dv ad normam artt. 15, 16 per variationes differentiales elementorum ellipticorum exhibeantur^{*)}.

Erat in exemplo nostro, art. 14, $\log \frac{r}{a} = 9,90355 = \log \left(\frac{dr}{da} \right)$

$\log \frac{aa}{rr}$		0,19290
$\log \cos \varphi$		9,98652
$\log \left(\frac{dv}{dM} \right)$		0,17942
$2 - e \cos E =$		1,80085
$ee =$		0,06018
		1,74067
$\log$		0,24072
$\log \frac{aa}{rr}$		0,19290
$\log \sin E$		9,76634 _n
$\log \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)$		0,19996 _n
$\log a$		0,42244
$\log \tan \varphi$	...	9,40320
$\log \sin v$		9,84931 _n
$\log \left(\frac{dr}{dM} \right)$		9,67495 _n
$\log a$		0,42244
$\log \cos \varphi$		9,98652
$\log \cos v$		9,84966
$\log \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)$		0,25862 _n

Hinc colligitur

$$dv = +1,51154 dM - 1,58475 d\varphi$$

$$dr = -0,47310 dM - 1,81393 d\varphi + 0,80085 da,$$

^{*)}Characterem M in calculo sequente haud amplius angulum nostrum auxiliarem exprimere, sed (ut in Sect. I) anomaliam mediam, quisque sponte videbit.

quibus valoribus in formulis praecedentibus substitutis prodit

$$\begin{aligned} dl &= + 2,41287 dM - 3,00531 d\varphi + 0,16488 da \\ &\quad + 1,66073 d\Pi - 0,11152 di + 0,04385 d\Omega \\ db &= - 0,66572 dM + 0,61331 d\varphi + 0,02935 da \\ &\quad - 0,42895 d\Pi - 0,47335 di + 0,38089 d\Omega. \end{aligned}$$

Si tempus cui locus computatus respondet n diebus ab epocha distare supponitur, longitudoque media pro epocha per N , motus diurnus per γ denotatur, erit $M = N + n\gamma - \Pi$, adeoque $dM = dN + n d\gamma - d\Pi$. In exemplo nostro tempus loco computato respondens est Octobris dies 17,41501 anni 1804 sub meridiano Parisiensi: quodsi itaque pro epocha assumitur initium anni 1805, est $n = -74,58499$; longitudo media pro epocha ista statuta fuerat $= 41^0 52' 21'',68$, motusque diurnus $= 824'',7990$. Substituto iam in formulis modo inventis pro dM valore suo, mutationes differentiales loci geocentrici per solas mutationes elementorum expressae ita se habent:

$$\begin{aligned} dl &= + 2,41287 dN - 179,96 d\gamma - 0,75214 d\Pi \\ &\quad - 3,00531 d\varphi + 0,16488 da - 0,11152 di + 0,04385 d\Omega \\ db &= - 0,66572 dN + 49,65 d\gamma + 0,23677 d\Pi \\ &\quad + 0,61331 d\varphi + 0,02935 da - 0,47335 di + 0,38089 d\Omega. \end{aligned}$$

Si corporis coelestis massa vel negligitur vel saltem tamquam cognita spectatur, γ et a ab invicem dependentes erunt, adeoque vel $d\gamma$ vel da e formulis nostris eliminare licebit. Scilicet quum per art. 6 habeatur $\gamma a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{(1 + \mu)}$, erit $\frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{3}{2} \frac{da}{a}$, in qua formula, si $d\gamma$ in partibus radii exprimenda est, etiam γ perinde exprimere oportebit. Ita in exemplo nostro habetur

$\log \gamma$		2,91635
$\log 1''$		4,68557
$\log \frac{3}{2}$		0,17609
C. $\log a$	...	9,57756
$\log \frac{d\gamma}{da}$		7,35557 _n

sive $d\gamma = -0,0022676 da$, atque $da = -440,99 d\gamma$, quo valore in formulis nostris substituto, tandem emergit forma ultima:

$$\begin{aligned} dl &= + 2,41287 dN - 252,67 d\gamma - 0,75214 d\Pi \\ &\quad - 3,00531 d\varphi - 0,11152 di + 0,04385 d\Omega \\ db &= - 0,66572 dN + 36,71 d\gamma + 0,23677 d\Pi \\ &\quad + 0,61331 d\varphi - 0,47335 di + 0,38089 d\Omega. \end{aligned}$$

In evolutione harum formularum omnes mutationes dl , db , dN , $d\gamma$, $d\Pi$, $d\varphi$, di , $d\Omega$ in partibus radii expressas supposuimus, manifesto autem propter homogeneitatem omnium partium eadem formulae etiamnum valebunt, si omnes illae mutationes in minutis secundis exprimuntur.

SECTIO TERTIA.

Relationes inter locos plures in orbita.

78.

Comparatio duorum pluriumve locorum corporis coelestis tum in orbita tum in spatio tantam propositionum elegantium copiam subministrat, ut volumen integrum facile complerent. Nostrum vero propositum non eo tendit, ut hoc argumentum fertile exauriamus, sed eo potissimum, ut amplum apparatus subsidiorum ad solutionem problematis magni de determinatione orbitarum incognitarum ex observationibus inde adstruamus: quamobrem neglectis quae ab instituto nostro nimis aliena essent, eo diligentius omnia quae ullo modo illuc conducere possunt evolvemus. Disquisitionibus ipsis quasdam propositiones trigonometricas praemittimus, ad quas, quum frequentioris usus sint, saepius recurrere oportet.

I. Denotantibus A, B, C angulos quoscunque, habetur

$$\sin A \sin(C - B) + \sin B \sin(A - C) + \sin C \sin(B - A) = 0$$

$$\cos A \sin(C - B) + \cos B \sin(A - C) + \cos C \sin(B - A) = 0.$$

II. Si duae quantitates p, P ex aequationibus talibus

$$p \sin(A - P) = a$$

$$p \sin(B - P) = b$$

determinandae sunt, hoc fiet generaliter adiumento formularum

$$p \sin(B - A) \sin(H - P) = b \sin(H - A) - a \sin(H - B)$$

$$p \sin(B - A) \cos(H - P) = b \cos(H - A) - a \cos(H - B),$$

in quibus H est angulus arbitrarius. Hinc deducuntur (art. 14, II) angulus $H - P$ atque $p \sin(B - A)$; et hinc P et p . Plerumque conditio adiecta esse solet, ut p esse debeat quantitas positiva, unde ambiguitas in determinatione anguli $H - P$ per tangentem suam deceditur; deficiente autem illa conditione, ambiguitatem ad lubitum decidere licebit. Ut calculus commodissimus sit, angulum arbitrium H vel $= A$ vel $= B$ vel $= \frac{1}{2}(A + B)$ statuere conveniet. In casu priori aequationes ad determinandum P et p erunt

$$p \sin(A - P) = a$$

$$p \cos(A - P) = \frac{b - a \cos(B - A)}{\sin(B - A)}.$$

In casu secundo aequationes prorsus analogae erunt; in casu tertio autem

$$p \sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{b + a}{2 \cos \frac{1}{2}(B - A)}$$

$$p \cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{b - a}{2 \sin \frac{1}{2}(B - A)}.$$

Quodsi itaque angulus auxiliaris ζ introducitur, cuius tangens $= \frac{a}{b}$, invenietur P per formulam

$$\text{tang}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \text{tang}(45^0 + \zeta) \text{tang} \tfrac{1}{2}(B - A)$$

ac dein p per aliquam formularum praecedentium, ubi

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(b + a) &= \sin(45^0 + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} \\ &= \frac{a \sin(45^0 + \zeta)}{\sin \zeta \sqrt{2}} = \frac{b \sin(45^0 + \zeta)}{\cos \zeta \sqrt{2}} \\ \tfrac{1}{2}(b - a) &= \cos(45^0 + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} \\ &= \frac{a \cos(45^0 + \zeta)}{\sin \zeta \sqrt{2}} = \frac{b \cos(45^0 + \zeta)}{\cos \zeta \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

III. Si p et P determinandae sunt ex aequationibus

$$\begin{aligned} p \cos(A - P) &= a \\ p \cos(B - P) &= b, \end{aligned}$$

omnia in II exposita statim applicari possent, si modo illic pro A et B ubique scriberetur $90^0 + A$, $90^0 + B$: sed ut usus eo commodior sit, formulas evolutas apponere non piget. Formulae generales erunt

$$\begin{aligned} p \sin(B - A) \sin(H - P) &= -b \cos(H - A) + a \cos(H - B) \\ p \sin(B - A) \cos(H - P) &= b \sin(H - A) - a \sin(H - B). \end{aligned}$$

Transeunt itaque, pro $H = A$, in

$$\begin{aligned} p \sin(A - P) &= \frac{a \cos(B - A) - b}{\sin(B - A)} \\ p \cos(A - P) &= a. \end{aligned}$$

Pro $H = B$, formam similem obtinent; pro $H = \frac{1}{2}(A + B)$ autem fiunt

$$\begin{aligned} p \sin(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) &= \frac{a - b}{2 \sin \tfrac{1}{2}(B - A)} \\ p \cos(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) &= \frac{a + b}{2 \cos \tfrac{1}{2}(B - A)}, \end{aligned}$$

ita ut introducto angulo auxiliari ζ , cuius tangens $= \frac{a}{b}$, fiat

$$\text{cotang}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \text{cotang}(\zeta - 45^0) \text{tang} \tfrac{1}{2}(B - A).$$

Ceterum si p immediate ex a et b sine praevio computo anguli P determinare cupimus, habemus formulam

$$p \sin(B - A) = \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos(B - A))}$$

tum in problemate praesente tum in II.

79.

Ad completam determinationem sectionis conicae in plano suo *tria* requiruntur, situs perihelii, excentricitas et semiparameter. Quae si e quantitativis datis ab ipsis pendentibus eruenda sunt, tot data adsint oportet, ut tres aequationes ab invicem independentes formare liceat. Quilibet radius vector magnitudine et positione datus unam aequationem suppeditat: quamobrem ad determinationem orbitae tres radii vectores magnitudine et positione dati requiruntur; si vero duo tantum habentur, vel unum elementum ipsum iam datum esse debet, vel saltem alia quaedam quantitas, cui aequationem tertiam superstruere licet. Hinc oritur varietas problematum, quae iam deinceps pertractabimus.

Sint r , r' duo radii vectores, qui cum recta in plano orbitae e Sole ad lubitum ducta faciant secundum directionem motus angulos N , N' ; sit porro Π angulus quem cum eadem recta facit radius vector in perihelio, ita ut radiis vectoribus r , r' respondeant anomaliae verae $N - \Pi$, $N' - \Pi$; denique sit e excentricitas, p semiparameter. Tunc habentur aequationes

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= 1 + e \cos(N - \Pi) \\ \frac{p}{r'} &= 1 + e \cos(N' - \Pi), \end{aligned}$$

e quibus, si insuper una quantitatum p , e , Π data est, duas reliquas determinare licebit.

Supponamus primo, datum esse semiparametrum p , patetque determinationem quantitatum e et Π ex aequationibus

$$\begin{aligned} e \cos(N - \Pi) &= \frac{p}{r} - 1 \\ e \cos(N' - \Pi) &= \frac{p}{r'} - 1 \end{aligned}$$

fieri posse ad normam lemmatis III in art. praec. Habemus itaque

$$\begin{aligned} \text{tang}(N - \Pi) &= \text{cotang}(N' - N) - \frac{r(p - r')}{r'(p - r) \sin(N' - N)} \\ \text{tang}(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N' - \Pi) &= \frac{(r' - r) \text{cotang} \tfrac{1}{2}(N' - N)}{r' + r - \frac{2rr'}{p}}. \end{aligned}$$

80.

Si angulus Π datus est, p et e determinabuntur per aequationes

$$p = \frac{rr'(\cos(N - \Pi) - \cos(N' - \Pi))}{r \cos(N - \Pi) - r' \cos(N' - \Pi)}$$

$$e = \frac{r' - r}{r \cos(N - \Pi) - r' \cos(N' - \Pi)}.$$

Denominatorem communem in his formulis reducere licet sub formam $a \cos(A - \Pi)$, ita ut a et A a Π sint independentes. Designante scilicet H angulum arbitrarium fit

$$\begin{aligned} & r \cos(N - \Pi) - r' \cos(N' - \Pi) \\ &= (r \cos(N - H) - r' \cos(N' - H)) \cos(H - \Pi) \\ &\quad - (r \sin(N - H) - r' \sin(N' - H)) \sin(H - \Pi), \end{aligned}$$

adeoque $= a \cos(A - \Pi)$, si a et A determinantur per aequationes

$$\begin{aligned} r \cos(N - H) - r' \cos(N' - H) &= a \cos(A - H) \\ r \sin(N - H) - r' \sin(N' - H) &= a \sin(A - H). \end{aligned}$$

Hoc modo fit

$$p = \frac{2rr' \sin \frac{1}{2}(N' - N) \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi)}{a \cos(A - \Pi)}$$

$$e = \frac{r' - r}{a \cos(A - \Pi)}.$$

Hae formulae imprimis sunt commodae, quoties p et e pro pluribus valoribus ipsius Π computandae sunt, manentibus r , r' , N , N' . — Quum ad calculum quantitatum auxiliarium a , A angulum H ad lubitum assumere liceat, e re erit statuere $H = \frac{1}{2}(N + N')$, quo pacto formulae abeunt in has

$$\begin{aligned} (r' - r) \cos \frac{1}{2}(N' - N) &= -a \cos(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N') \\ (r' + r) \sin \frac{1}{2}(N' - N) &= -a \sin(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N'). \end{aligned}$$

Determinato itaque angulo A per aequationem

$$\tan(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N') = \frac{r' + r}{r' - r} \tan \frac{1}{2}(N' - N),$$

statim habetur

$$e = -\frac{\cos(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')}{\cos \frac{1}{2}(N' - N) \cos(A - \Pi)}.$$

Calculus logarithmi quantitatis $\frac{r' + r}{r' - r}$ per artificium saepius iam explicatum contrahere licebit.

81.

Si excentricitas e data est, angulus Π per aequationem

$$\cos(A - \Pi) = -\frac{\cos(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')}{e \cos \frac{1}{2}(N' - N)}$$

invenietur, postquam angulus auxiliaris A per aequationem

$$\tan(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N') = \frac{r' + r}{r' - r} \tan \frac{1}{2}(N' - N)$$

determinatus est. Ambiguitas in determinatione anguli $A - \Pi$ per ipsius cosinum remanens in natura problematis fundata est, ita ut problemati duabus solutionibus diversis satisfieri possit, e quibus quam adoptare quamve reiicere oporteat aliunde decidendum erit, ad quem finem valor saltem approximatus ipsius Π iam cognitus esse debet. — Postquam Π inventus est, p vel per formulas

$$p = r(1 + e \cos(N - \Pi)) = r'(1 + e \cos(N' - \Pi))$$

vel per hanc computabitur

$$p = \frac{2rr'e \sin \frac{1}{2}(N' - N) \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi)}{r' - r}.$$

82.

Supponamus denique, tres radios vectores r, r', r'' datos esse, qui cum recta ad lubitum e Sole in plano orbitae ducta faciant angulos N, N', N'' . Habebuntur itaque, retentis signis reliquis, aequationes:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= 1 + e \cos(N - \Pi) \\ \text{I.} \quad \frac{p}{r'} &= 1 + e \cos(N' - \Pi) \\ \frac{p}{r''} &= 1 + e \cos(N'' - \Pi), \end{aligned}$$

e quibus p, Π, e pluribus modis diversis elici possunt. Si quantitatem p ante reliquas computare placet, multiplicentur tres aequationes I resp. per $\sin(N'' - N'), -\sin(N'' - N), \sin(N' - N)$, fietque additis productis per lemma I art. 78

$$p = \frac{\sin(N'' - N') - \sin(N'' - N) + \sin(N' - N)}{\frac{1}{r} \sin(N'' - N') - \frac{1}{r'} \sin(N'' - N) + \frac{1}{r''} \sin(N' - N)}.$$

Haec expressio propius considerari meretur. Numerator manifesto fit

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \cos \frac{1}{2}(N'' - N') \\
 &\quad - 2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \cos(\frac{1}{2}N'' + \frac{1}{2}N' - N) \\
 &= 4 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \sin \frac{1}{2}(N'' - N) \sin \frac{1}{2}(N' - N).
 \end{aligned}$$

Statuendo porro

$$\begin{aligned}
 r'r'' \sin(N'' - N') &= n \\
 rr'' \sin(N'' - N) &= n' \\
 rr' \sin(N' - N) &= n'',
 \end{aligned}$$

patet $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}n'$, $\frac{1}{2}n''$ esse areas triangulorum inter radium vectorem secundum et tertium, inter primum et tertium, inter primum et secundum. Hinc facile perspicietur, in formula nova

$$p = \frac{4 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \sin \frac{1}{2}(N'' - N) \sin \frac{1}{2}(N' - N) \cdot rr'r''}{n - n' + n''}$$

denominatorem esse duplum areae trianguli inter trium radiorum vectorum extremitates i. e. inter tria corporis coelestis loca in spatio contenti. Quoties haec loca parum ab invicem remota sunt, area ista semper erit quantitas perparva et quidem ordinis tertii, siquidem $N' - N$, $N'' - N'$ ut quantitates parvae ordinis primi spectantur. Hinc simul concluditur, si quantitatum r , r' , r'' , N , N' , N'' una vel plures erroribus utut levibus affectae sint, in determinatione ipsius p errorem permagnum illinc nasci posse; quamobrem haecce ratio orbitae dimensiones eruendi magnam praecisionem nunquam admittet, nisi tria loca heliocentrica intervallis considerabilibus ab invicem distent.

Ceterum simulac semiparameter p inventus est, e et Π determinabuntur e combinatione duarum quarumcunque aequationum I per methodum art. 79.

83.

Si solutionem eiusdem problematis a computo anguli Π inchoare malumus, methodo sequente utemur. Subtrahimus ab aequationum I secunda tertiam, a prima tertiam, a prima secundam, quo pacto tres novas sequentes obtinemus:

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}}{2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N')} &= \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N' + \frac{1}{2}N'' - \Pi) \\
 \text{II. } \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}}{2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N)} &= \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - \Pi) \\
 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{2 \sin \frac{1}{2}(N' - N)} &= \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi).
 \end{aligned}$$

Duae quaecunque ex his aequationibus secundum lemma II art. 78 dabunt Π et $\frac{e}{p}$, unde per quamlibet aequationum I habebuntur etiam e et p . Quodsi solutionem tertiam in art. 78, II traditam adoptamus, combinatio aequationis primae cum tertia algorithmum sequentem producit. Determinetur angulus auxiliaris ζ per aequationem

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{\frac{r'}{r} - 1}{1 - \frac{r'}{r''}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(N'' - N')}{\sin \frac{1}{2}(N' - N)},$$

eritque

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{4}N'' - \Pi\right) = \operatorname{tang}(45^0 + \zeta) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(N'' - N).$$

Permutando locum secundum cum primo vel tertio, duae aliae solutiones huic prorsus analogae prodibunt. Quum hac methodo adhibita formulae pro $\frac{e}{p}$ minus expeditae evadant, e et p per methodum art. 80 e duabus aequationum I eruere praestabit. Ceterum ambiguitas in determinatione ipsius Π per tangentem anguli $\frac{1}{4}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{4}N'' - \Pi$ ita decidi debebit, ut e fiat quantitas positiva: scilicet manifestum est, pro e valores oppositos prodituros esse, si pro Π valores 180^0 diversi accipiantur. Signum ipsius p autem ab hac ambiguitate non pendet, valorque ipsius p negativus evadere nequit, nisi tria puncta data in parte hyperbolae a Sole aversa iaceant, ad quem casum legibus naturae contrarium hic non respicimus.

Quae ex applicatione methodi primae in art. 78, II post substitutiones operosiores orientur, in casu praesente commodius sequenti modo obtineri possunt. Multiplicetur aequationum II prima per $\cos \frac{1}{2}(N'' - N')$, tertia per $\cos \frac{1}{2}(N' - N)$, subtrahaturque productum posterius a priori. Tunc lemmate I art. 78 rite applicato^{*)} prodibit aequatio

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \cotang \frac{1}{2}(N'' - N') - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \cotang \frac{1}{2}(N' - N) \\ & = \frac{e}{p} \sin \frac{1}{2}(N'' - N) \cos\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - \Pi\right). \end{aligned}$$

^{*)}Statuendo scilicet in formula secunda $A = \frac{1}{2}(N'' - N')$, $B = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - \Pi$, $C = \frac{1}{2}(N - N'')$.

Quam combinando cum aequationum II secunda invenientur Π et $\frac{e}{p}$, et quidem Π per formulam

$$\begin{aligned} & \text{tang}\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - \Pi\right) \\ &= \frac{\frac{r'}{r} - \frac{r'}{r''}}{\left(1 - \frac{r'}{r''}\right) \cotang \frac{1}{2}(N'' - N') - \left(\frac{r'}{r} - 1\right) \cotang \frac{1}{2}(N' - N)}. \end{aligned}$$

Etiam hinc duae aliae formulae prorsus analogae derivantur, permutando locum secundum cum primo vel tertio.

84.

Quum per duos radios vectores magnitudine et positione datos atque elementum orbitae unum orbitam integram determinare liceat, per illa data etiam *tempus*, intra quod corpus coeleste ab uno radio vectore ad alterum movetur, determinabile erit, siquidem corporis massam vel negligimus vel saltem tamquam cognitam spectamus: nos suppositioni priori inhaerebimus, ad quam posterior facile reducitur. Hinc vice versa patet, duos radios vectores magnitudine et positione datos una cum tempore, intra quod corpus coeleste spatium intermedium describit, orbitam integram determinare. Hoc vero problema, ad gravissima in theoria motus corporum coelestium referendum, haud ita facile solvitur, quum expressio temporis per elementa transcendens sit, insuperque satis complicata. Eo magis dignum est, quod omni cura tractetur: quamobrem lectoribus haud ingratum fore speramus, quod praeter solutionem post tradendam, quae nihil amplius desiderandum relinquere videtur, eam quoque oblivioni eripiendam esse censuimus, qua olim antequam ista se obtulisset frequenter usi sumus. Problemata difficiliora semper iuvat pluribus viis aggredi, nec bonam spernere etiamsi meliorem praeferas. Ab expositione huius methodi anterioris initium facimus.

85.

Retinebimus characteres r , r' , N , N' , p , e , Π in eadem significatione, in qua supra accepti sunt; differentiam $N' - N$ denotabimus per Δ , tempusque intra quod corpus coeleste a loco priori ad posteriorem movetur per t . Iam patet, si valor approximatus alicuius quantitatum p , e , Π sit notus, etiam duas reliquas inde determinari posse, ac dein per methodos in Sectione prima explicatas tempus motui a loco primo ad secundum respondens. Quod si temporis proposito t aequale evadit, valor suppositus ipsius p , e vel Π est ipse verus, orbitaque ipsa iam inventa; sin minus, calculus cum valore alio a primo parum

diverso repetitus docebit, quanta variatio in valore temporis variationi exiguae in valore ipsius p , e , Π respondeat, unde per simplicem interpolationem valor correctus eruetur. Cum quo si calculus denuo repetitur, tempus emergens vel ex asse cum proposito quadrabit, vel saltem perparum ab eo differet, ita ut certe novis correctionibus adhibitis consensum tam exactum attingere liceat, quantum tabulae logarithmicae et trigonometricae permittunt.

Problema itaque eo reductum est, ut pro eo casu, ubi orbita adhuc penitus incognita est, valorem saltem approximatum alicuius quantitatum p , e , Π determinare doceamus. Methodum iam trademus, per quam valor ipsius p tanta praecisione eruitur, ut pro parvis quidem valoribus ipsius Δ nulla amplius correctione indigeat, adeoque tota orbita per primum calculum omni iam praecisione determinetur, quam tabulae vulgares permittunt. Vix unquam autem aliter nisi pro valoribus mediocribus ipsius Δ ad hanc methodum recurrere oportebit, quum determinationem orbitae omnino adhuc incognitae, propter problematis complicationem nimis intricatam, vix aliter suscipere liceat, nisi per observationes non nimis ab invicem distantes, aut potius tales, quibus motus heliocentricus non nimis respondet.

86.

Designando radium vectorem indefinitum seu variabilem anomaliae verae $v - \Pi$ respondentem per ρ , erit area sectoris a corpore coelesti intra tempus t descripti $= \frac{1}{2} \int \rho \rho dv$, hoc integrali a $v = N$ usque ad $v = N'$ extenso, adeoque, accipiendo k in significatione art. 6, $kt\sqrt{p} = \int \rho \rho dv$. Iam constat, per formulas a COTESIO evolutas, si φx exprimat functionem quamcunque ipsius x , valorem continuo magis approximatum integralis $\int \varphi x . dx$ ab $x = u$ usque ad $x = u + \Delta$ extensi exhiberi per formulas

$$\frac{1}{2} \Delta \{ \varphi u + \varphi(u + \Delta) \}$$

$$\frac{1}{6} \Delta \{ \varphi u + 4\varphi(u + \frac{1}{2}\Delta) + \varphi(u + \Delta) \}$$

$$\frac{1}{8} \Delta \{ \varphi u + 3\varphi(u + \frac{1}{3}\Delta) + 3\varphi(u + \frac{2}{3}\Delta) + \varphi(u + \Delta) \}$$

etc.:

ad institutum nostrum apud duas formulas primas subsistere sufficiet.

Per formulam itaque primam in problemate nostro habemus $\int \rho \rho dv = \frac{1}{2} \Delta(rr + r'r') = \frac{\Delta rr'}{\cos 2\omega}$, si statuitur $\frac{r'}{r} = \text{tang}(45^\circ + \omega)$. Quamobrem valor approximatus primus ipsius $\sqrt{p}$ erit $= \frac{\Delta rr'}{kt \cos 2\omega}$, quem statuemus $= 3a$.

Per formulam secundam habemus exactius $\int \rho \rho dv = \frac{1}{6} \Delta(rr + r'r' + 4RR)$, designante R radium vectorem anomaliae intermediae $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi$ respon-

dentem. Iam exprimendo p per r , R , r' , N , $N + \frac{1}{2}\Delta$, $N + \Delta$ ad normam formulae in art. 82 traditae, invenimus

$$p = \frac{4 \sin \frac{1}{4}\Delta^2 \sin \frac{1}{2}\Delta}{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \sin \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{R} \sin \Delta},$$

atque hinc

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{1}{2}\Delta}{R} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{2 \sin \frac{1}{4}\Delta^2}{p} \\ &= \frac{\cos \omega}{\sqrt{(rr' \cos 2\omega)}} - \frac{2 \sin \frac{1}{4}\Delta^2}{p}. \end{aligned}$$

Statuendo itaque

$$\frac{2 \sin \frac{1}{4}\Delta^2 \sqrt{(rr' \cos 2\omega)}}{\cos \omega} = \delta,$$

fit

$$R = \frac{\cos \frac{1}{2}\Delta \cdot \sqrt{(rr' \cos 2\omega)}}{\cos \omega \cdot \left(1 - \frac{\delta}{p}\right)},$$

unde valor approximatus secundus ipsius $\sqrt{p}$ elicitur

$$\sqrt{p} = a + \frac{2a \cos \frac{1}{2}\Delta^2 \cos 2\omega^2}{\cos \omega^2 \left(1 - \frac{\delta}{p}\right)^2} = a + \frac{\epsilon}{\left(1 - \frac{\delta}{p}\right)^2},$$

si statuitur $2a \left(\frac{\cos \frac{1}{2}\Delta \cos 2\omega}{\cos \omega}\right)^2 = \epsilon$. Scribendo itaque π pro $\sqrt{p}$, determina-

bitur π per aequationem $(\pi - a) \left(1 - \frac{\delta}{\pi\pi}\right)^2 = \epsilon$, quae rite evoluta ad quintum gradum ascenderet. Statuamus $\pi = q + \mu$, ita ut sit q valor approximatus ipsius π , atque μ quantitas perexigua, cuius quadrata altioresque potestates negligere liceat:

Qua substitutione prodit

$$\begin{aligned} &(q - a) \left(1 - \frac{\delta}{qq}\right)^2 \\ &+ \mu \left\{ \left(1 - \frac{\delta}{qq}\right)^2 + \frac{4\delta(q - a)}{q^3} \left(1 - \frac{\delta}{qq}\right) \right\} = \epsilon, \end{aligned}$$

sive

$$\mu = \frac{\epsilon q^5 - (qq - aq)(qq - \delta)^2}{(qq - \delta)(q^3 + 3\delta q - 4a\delta)},$$

adeoque

$$\pi = \frac{\epsilon q^5 + (qq - \delta)(aqq + 4\delta q - 5a\delta)q}{(qq - \delta)(q^3 + 3\delta q - 4a\delta)}.$$

Iam in problemate nostro habemus valorem approximatum ipsius π , puta $= 3a$, quo in formula praecedente pro q substituto, prodit valor correctus

$$\pi = \frac{243a^4\epsilon + 3a(9aa - \delta)(9aa + 7\delta)}{(9aa - \delta)(27aa + 5\delta)}.$$

Statuendo itaque $\frac{\delta}{27aa} = \beta$, $\frac{\epsilon}{(1 - 3\beta)a} = \gamma$, formula induit formam hancce $\pi = \frac{a(1 + \gamma + 21\beta)}{1 + 5\beta}$, omnesque operationes ad problematis solutionem necessariae in his quinque formulis continentur:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{r'}{r} = \text{tang}(45^0 + \omega) \\ \text{II.} \quad & \frac{\Delta rr'}{3kt \cos 2\omega} = a \\ \text{III.} \quad & \frac{2 \sin \frac{1}{4} \Delta^2 \sqrt{(rr' \cos 2\omega)}}{27aa \cos \omega} = \beta \\ \text{IV.} \quad & \frac{2 \cos \frac{1}{2} \Delta^2 \cos 2\omega^2}{(1 - 3\beta) \cos \omega^2} = \gamma \\ \text{V.} \quad & \frac{a(1 + \gamma + 21\beta)}{1 + 5\beta} = \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Si quid a praecisione harum formularum remittere placet, expressiones adhuc simpliciores evolvere licebit. Scilicet faciendo $\cos \omega$ et $\cos 2\omega = 1$ et evolvendo valorem ipsius $\sqrt{p}$ in seriem secundum potestates ipsius Δ progredientem, prodit neglectis biquadratis altioribusque potestatibus

$$\sqrt{p} = a \left(3 - \frac{1}{2} \Delta \Delta + \frac{\Delta \Delta \sqrt{rr'}}{18aa} \right),$$

ubi Δ in partibus radii exprimendus est. Quare faciendo $\frac{\Delta rr'}{kt} = \sqrt{p'}$, habetur

$$\text{VI.} \quad p = p' \left(1 - \frac{1}{3} \Delta \Delta + \frac{\Delta \Delta \sqrt{rr'}}{3p'} \right).$$

Simili modo explicando $\sqrt{p}$ in seriem secundum potestates ipsius $\sin \Delta$ progredientem emergit, posito $\frac{rr' \sin \Delta}{kt} = \sqrt{p''}$,

$$\text{VII.} \quad \sqrt{p} = \left(1 + \frac{\sin \Delta^2 \sqrt{rr'}}{6p''} \right) \sqrt{p''}$$

sive

$$\text{VIII.} \quad p = p'' + \frac{1}{3} \sin \Delta^2 \sqrt{rr'}.$$

Formulae VII et VIII conveniunt cum iis, quas ill. EULER tradidit in *Theoria motus planetarum et cometarum* [p. 56], formula VI autem cum ea, quae in usum vocata est in *Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la comète de 1769*, p. 80.

87.

Exempla sequentia usum praeceptorum praecedentium illustrabunt, simulque inde gradus praecisionis aestimari poterit.

I. Sit $\log r = 0,330\,7640$, $\log r' = 0,322\,2239$, $\Delta = 7^0\,34'\,53'',73 = 27293'',73$, $t = 21,93391$ dies. Hinc invenitur $\omega = -33'\,47'',90$, unde calculus ulterior ita se habet:

$\log \Delta$		4,436 0629
$\log rr'$		0,652 9879
C. $\log 3k$		5,972 8722
C. $\log t$		8,658 8840
C. $\log \cos 2\omega$		0,000 0840
$\log a$		9,720 8910
$\frac{1}{2} \log rr' \cos 2\omega$	...	0,326 4519
$2 \log \sin \frac{1}{4} \Delta$		7,038 9972
$\log \frac{2}{27}$		8,869 6662
C. $\log aa$		0,558 2180
C. $\log \cos \omega$		0,000 0210
$\log \beta$		6,793 3543
$\beta =$		0,000 6213 757
$\log 2$		0,301 0300
$2 \log \cos \frac{1}{2} \Delta$		9,998 0976
$2 \log \cos 2\omega$	.,...	9,999 8320
C. $\log(1 - 3\beta)$		0,000 8103
2C. $\log \cos \omega$		0,000 0420
$\log \gamma$		0,299 8119
$\gamma =$		1,994 3982
$21\beta =$		0,013 0489

$1 + \gamma + 21\beta =$	3,007 4471
$\log$	 0,478 1980
$\log a$	 9,720 8910
$C. \log(1 + 5\beta)$	 9,998 6528
$\log \sqrt{p}$	 0,197 7418
$\log p$	 0,395 4836

Hic valor ipsius $\log p$ vix una unitate in figura septima a vero differt: formula VI in hoc exemplo dat $\log p = 0,395 4822$; formula VII producit 0,395 4780; denique formula VIII dat 0,395 4754.

II. Sit $\log r = 0,428 2792$, $\log r' = 0,406 2033$, $\Delta = 62^0 55' 16'', 64$, $t = 259,88477$ dies. Hinc eruitur $\omega = -1^0 27' 20'', 14$, $\log a = 9,748 2348$, $\beta = 0,045 3511 4$, $\gamma = 1,681 121$, $\log \sqrt{p} = 0,219 8013$, $\log p = 0,439 6026$, qui valor 211 unitatibus in figura septima iusto minor est. Valor enim verus in hoc exemplo est 0,439 6237; per formulam VI invenitur 0,436 8730; per formulam VII prodit 0,415 9824; denique per formulam VIII eruitur 0,405 1103: duo postremi valores hic a vero tantum discrepant, ut ne approximationis quidem vice fungi possint.

88.

Methodi *secundae* expositio permultis relationibus novis atque elegantibus enucleandis occasionem dabit: quae quum in diversis sectionum conicarum generibus formas diversas induant, singula seorsim tractare oportebit: ab ELLIPSI initium faciemus.

Respondeant duobus locis anomaliae verae v , v' (e quibus v sit tempore anterior), anomaliae excentricae E , E' , radiique vectores r , r' ; porro sit p semiparameter, $e = \sin \varphi$ excentricitas, a semiaxis maior, t tempus intra quod motus a loco primo ad secundum absolvitur; denique statuamus $v' - v = 2f$, $v' + v = 2F$, $E' - E = 2g$, $E' + E = 2G$, $a \cos \varphi = \frac{p}{\cos \varphi} = b$. Quibus ita factis e combinatione formularum V, VI art. 8 facile deducuntur aequationes sequentes:

$$1) \quad b \sin g = \sin f \cdot \sqrt{rr'}$$

$$2) \quad b \sin G = \sin F \cdot \sqrt{rr'}$$

$$p \cos g = \left\{ \cos \frac{1}{2}v \cos \frac{1}{2}v' \cdot (1 + e) + \sin \frac{1}{2}v \sin \frac{1}{2}v' \cdot (1 - e) \right\} \sqrt{rr'}$$

sive

$$3) \quad p \cos g = (\cos f + e \cos F) \sqrt{rr'}$$

et perinde

$$4) \quad p \cos G = (\cos F + e \cos f) \sqrt{rr'}.$$

E combinatione aequationum 3, 4 porro oritur

$$5) \quad \cos f \cdot \sqrt{rr'} = (\cos g - e \cos G) a$$

$$6) \quad \cos F \cdot \sqrt{rr'} = (\cos G - e \cos g) a.$$

E formula III art. 8 nanciscimur

$$\begin{aligned} 7) \quad r' - r &= 2ae \sin g \sin G \\ r' + r &= 2a - 2ae \cos g \cos G \\ &= 2a \sin g^2 + 2 \cos f \cos g \cdot \sqrt{rr'}, \end{aligned}$$

unde

$$8) \quad a = \frac{r + r' - 2 \cos f \cos g \cdot \sqrt{rr'}}{2 \sin g^2}.$$

Statuamus

$$9) \quad \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} = 1 + 2l,$$

eritque

$$10) \quad a = \frac{2(l + \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

nec non $\sqrt{a} = \pm \frac{\sqrt{(2(l + \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f \cdot \sqrt{rr'})}}{\sin g}$, ubi signum superius accipere oportet vel inferius, prout $\sin g$ positivus est vel negativus. — Formula XII art. 8 nobis suppeditat aequationem

$$\begin{aligned} \frac{kt}{a^{3/2}} &= E' - e \sin E' - E + e \sin E \\ &= 2g - 2e \sin g \cos G \\ &= 2g - \sin 2g + 2 \cos f \sin g \frac{\sqrt{rr'}}{a}. \end{aligned}$$

Quodsi iam in hac aequatione pro a substituitur ipsius valor ex 10, ac brevitatis gratia ponitur

$$11) \quad \frac{kt}{2^{3/2} \cos f^{3/2} (rr')^{3/4}} = m,$$

prodit omnibus rite reductis

$$12) \quad \pm m = (l + \sin \frac{1}{2}g^2)^{1/2} + (l + \sin \frac{1}{2}g^2)^{3/2} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \right),$$

ubi ipsi m signum superius vel inferius praefigendum est, prout $\sin g$ positivus est vel negativus.

Quoties motus heliocentricus est inter 180^0 et 360^0 , sive generalius quoties $\cos f$ est negativus, quantitas m per formulam 11 determinata evaderet imaginaria, atque l negativa, ad quod evitandum pro aequationibus 9, 11 in hoc casu hasce adoptabimus:

$$9^*) \quad \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} = 1 - 2L$$

$$11^*) \quad \frac{kt}{2^{3/2}(-\cos f)^{3/2}(rr')^{3/4}} = M,$$

unde pro 10 et 12 hasce obtinebimus

$$10^*) \quad a = \frac{-2(L - \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

$$12^*) \quad \pm M = -(L - \sin \frac{1}{2}g^2)^{1/2} + (L - \sin \frac{1}{2}g^2)^{3/2} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \right),$$

ubi signum ambiguum eodem modo determinandum est ut ante.

89.

Duplex iam negotium nobis incumbit, primum, ut ex aequatione transcendente 12, quoniam solutionem directam non admittit, incognitam g quam commodissime eruamus; secundum, ut ex angulo g invento elementa ipsa deducamus. Quae antequam adeamus, transformationem quandam attingemus, cuius adiumento calculus quantitatis auxiliaris l vel L expeditius absolvitur, insuperque plures formulae post evolvendae ad formam elegantiores reducuntur.

Introducendo scilicet angulum auxiliarem ω per formulam

$$4\sqrt{\frac{r'}{r}} = \tan(45^0 + \omega)$$

determinandum, fit

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}} &= 2 + \{\tan(45^0 + \omega) - \cotang(45^0 + \omega)\}^2 \\ &= 2 + 4 \tan 2\omega^2; \end{aligned}$$

unde habetur

$$l = \frac{\sin \frac{1}{2}f^2}{\cos f} + \frac{\text{tang } 2\omega^2}{\cos f},$$

$$L = -\frac{\sin \frac{1}{2}f^2}{\cos f} - \frac{\text{tang } 2\omega^2}{\cos f}.$$

90.

Considerabimus primo casum eum, ubi e solutione aequationis 12 valor non nimis magnus ipsius g emergit, ita ut $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ in seriem secundum potestatem ipsius $\sin \frac{1}{2}g$ progredientem evolvere liceat. Numerator huius expressionis, quam per X denotabimus, fit

$$= \frac{32}{3} \sin \frac{1}{2}g^3 - \frac{16}{5} \sin \frac{1}{2}g^5 - \frac{4}{7} \sin \frac{1}{2}g^7 - \text{etc.}$$

Denominator autem

$$= 8 \sin \frac{1}{2}g^3 - 12 \sin \frac{1}{2}g^5 + 3 \sin \frac{1}{2}g^7 + \text{etc.}$$

Unde X obtinet formam

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{5} \sin \frac{1}{2}g^2 + \frac{64}{35} \sin \frac{1}{2}g^4 + \text{etc.}$$

Ut autem legem progressionis coefficientium eruamus, differentiamus aequationem $X \sin g^3 = 2g - \sin 2g$, unde prodit

$$3X \cos g \sin g^2 + \sin g^3 \frac{dX}{dg} = 2 - 2 \cos 2g = 4 \sin g^2;$$

statuendo porro $\sin \frac{1}{2}g^2 = x$, fit $\frac{dx}{dg} = \frac{1}{2} \sin g$, unde concluditur

$$\frac{dX}{dx} = \frac{8 - 6X \cos g}{\sin g^2} = \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{2x(1 - x)},$$

et proin

$$(2x - 2xx) \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X.$$

Quodsi igitur statuimus

$$X = \frac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}),$$

obtinemus aequationem

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3}\{\alpha x + (2\beta - \alpha)xx + (3\gamma - 2\beta)x^3 + (4\delta - 3\gamma)x^4 + \text{etc.}\} \\ &= (8 - 4\alpha)x + (8\alpha - 4\beta)xx + (8\beta - 4\gamma)x^3 + (8\gamma - 4\delta)x^4 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

quae identica esse debet. Hinc colligimus $\alpha = \frac{6}{5}$, $\beta = \frac{8}{7}\alpha$, $\gamma = \frac{10}{9}\beta$, $\delta = \frac{12}{11}\gamma$ etc., ubi lex progressionis obvia est. Habemus itaque

$$\begin{aligned} X &= \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}xx + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 \\ &+ \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}x^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hanc seriem transformare licet in fractionem continuam sequentem:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{\frac{6}{5}x}{1 + \frac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \frac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \frac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \frac{\frac{7.10}{11.13}x}{1 - \frac{\frac{3.6}{13.15}x}{1 - \frac{\frac{9.12}{15.17}x}{1 - \text{etc.}}}}}}}}}} \end{aligned}$$

Lex secundum quam coëfficientes $\frac{6}{5}$, $-\frac{2}{5.7}$, $\frac{5.8}{7.9}$, $\frac{1.4}{9.11}$ etc. progrediuntur obvia est; scilicet terminus n^{tus} huius seriei fit pro n pari $= \frac{(n-3)n}{(2n+1)(2n+3)}$, pro n impari autem $= \frac{(n+2)(n+5)}{(2n+1)(2n+3)}$: ulterior huius argumenti evolutio [*]) nimis aliena esset ab instituto nostro. Quodsi iam statuimus

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1 + \frac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \frac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \frac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \text{etc.}}}}} = x - \xi, \end{aligned}$$

fit $X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}$, atque $\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9X}$, sive

$$\xi = \frac{\sin g^3 - \frac{3}{4}(2g - \sin 2g)(1 - \frac{6}{5}\sin \frac{1}{2}g^2)}{\frac{9}{10}(2g - \sin 2g)}.$$

[*]) Vgl. Band III. S. 135.]

Numerator huius expressionis est quantitas ordinis septimi, denominator ordinis tertii, adeoque ξ ordinis quarti, siquidem g tamquam quantitas ordinis primi, sive x tamquam ordinis secundi spectatur. Hinc concluditur, formulam hancce ad computum numericum exactum ipsius ξ haud idoneam esse, quoties g angulum non valde considerabilem exprimat: tunc autem ad hunc finem commode adhibentur formulae sequentes, quae ab invicem per ordinem commutatum numeratorum in coefficientibus fractis differunt, et quarum prior e valore supposito ipsius $x - \xi$ haud difficile derivatur^{*)}:

$$13) \quad \xi = \frac{\frac{2}{35}xx}{1 + \frac{2}{35}x - \frac{\frac{40}{63}x}{1 - \frac{\frac{4}{99}x}{1 - \frac{\frac{70}{143}x}{1 - \frac{\frac{18}{195}x}{1 - \frac{\frac{108}{255}x}{1 - \text{etc.}}}}}}$$

sive

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}xx}{1 - \frac{18}{35}x - \frac{\frac{4}{63}x}{1 - \frac{\frac{40}{99}x}{1 - \frac{\frac{18}{143}x}{1 - \frac{\frac{70}{195}x}{1 - \frac{\frac{40}{255}x}{1 - \text{etc.}}}}}}$$

In tabula tertia huic operi annexa pro cunctis valoribus ipsius x a 0 usque ad 0,3, per singulas partes millesimas, valores respondententes ipsius ξ ad septem figuras decimales computati reperiuntur. Haec tabula primo aspectu monstrat exiguitatem ipsius ξ pro valoribus modicis ipsius g ; ita e. g. pro $E' - E = 10^0$, sive $g = 5^0$, ubi $x = 0,00190$, fit $\xi = 0,000\ 0002$. Superfluum

^{*)}Deductio posterioris quasdam transformationes minus obvias aliaque occasione [Band III. S. 137] explicandas supponit.

[Handschriftliche Bemerkung:] Fit

$$\xi = \frac{2}{35}xx \frac{1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}xx + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^3 + \text{etc.}}{1 + \frac{6}{5}x + \frac{6.8}{5.7}xx + \frac{6.8.10}{5.7.9}x^3 + \text{etc.}}.$$

Statuendo itaque $1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}xx + \text{etc.} = A$, fit $\xi = \frac{\frac{2}{35}Ax(1 - \frac{6}{5}x)}{1 - \frac{12}{175}Ax}$. Habetur etiam

$$A = (1 - x)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1.5}{2.9}x + \frac{1.3.5.7}{2.4.9.11}xx + \text{etc.} \right).$$

fuisset, tabulam adhuc ulterius continuare, quum termino ultimo $x = 0,3$ respondeat $g = 66^0 25'$ sive $E' - E = 132^0 50'$. Ceterum tabulae columna tertia, quae valores ipsius ξ valoribus negativis ipsius x respondentes continet, infra loco suo explicabitur.

91.

Aequatio 12, in qua, eo de quo agimus casu, manifesto signum superius adoptare oportet, per introductionem quantitatis ξ obtinet formam

$$m = (l + x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l + x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}.$$

Statuendo itaque $\sqrt{l + x} = \frac{m}{y}$, atque

$$14) \quad \frac{mm}{\frac{5}{6} + l + \xi} = h,$$

omnibus rite reductis prodit

$$15) \quad h = \frac{(y - 1)yy^{[*]}}{y + \frac{1}{3}}.$$

Quodsi itaque h tamquam quantitatem cognitam spectare licet, y inde per aequationem cubicam determinabitur, ac dein erit

$$16) \quad x = \frac{mm}{yy} - l.$$

Iam etiamsi h implicet quantitatem adhuc incognitam ξ , in approximatione prima eam negligere atque pro h accipere licebit $\frac{mm}{\frac{5}{6} + l}$, quoniam certe in eo de quo agimus casu ξ semper est quantitas valde parva. Hinc per aequationes 15, 16 elicientur y et x ; ex x per tabulam III habebitur ξ , cuius adiumento per formulam 14 eruetur valor correctus ipsius h , cum quo calculus idem

[*] Handschriftliche Bemerkung:]

$$y - 1 = \frac{l + x}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}$$

$$y = 1 + \frac{10}{9}h - \frac{110}{81}hh + \frac{2410}{729}h^3 - \text{etc.}$$

$$yy = 1 + \frac{20}{9}h - \frac{40}{27}hh + \frac{2620}{729}h^3 - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{yy} = 1 - \frac{20}{9}h + \frac{520}{81}hh - \frac{5140}{243}h^3 + \text{etc.}$$

repetitus valores correctos ipsarum y , x dabit: plerumque hi tam parum a praecedentibus different, ut ξ iterum e tabula III desumta haud diversa sit a valore primo; alioquin calculum denuo repetere oporteret, donec nullam amplius mutationem patiatur. Simulac quantitas x inventa erit, habebitur g per formulam $\sin \frac{1}{2}g^2 = x$.

Haec praecepta referuntur ad casum primum, ubi $\cos f$ positivus est; in casu altero ubi negativus est statuimus $\sqrt{(L - x)} = \frac{M}{Y}$ atque

$$14^*) \quad \frac{MM}{L - \frac{5}{6} - \xi} = H,$$

unde aequatio 12* rite reducta transit in hanc

$$15^*) \quad H = \frac{(Y + 1)YY}{Y - \frac{1}{3}}.$$

Per hanc itaque aequationem cubicam determinare licet Y ex H , unde rursus x derivabitur per aequationem

$$16^*) \quad x = L - \frac{MM}{YY}.$$

In approximatione prima pro H accipietur valor $\frac{MM}{L - \frac{5}{6}}$; cum valore ipsius x inde per aequationes 15*, 16* derivato desumetur ξ ex tabula III; hinc per formulam 14* habebitur valor correctus ipsius H , cum quo calculus eodem modo repetetur. Tandem ex x angulus g eodem modo determinabitur ut in casu primo.

92.

Quamquam aequationes 15, 15* in quibusdam casibus tres radices reales habere possint, tamen ambiguum nunquam erit, quamnam in problemate nostro adoptare oporteat. Quum enim h manifesto sit quantitas positiva, ex aequationum theoria facile concluditur, aequationem 15 habere radicem unicam positivam vel cum duabus imaginariis vel cum duabus negativis: iam quum $y = \frac{m}{\sqrt{(l + x)}}$ necessario esse debeat quantitas positiva, nullam hic incertitudinem remanere patet. Quod vero attinet ad aequationem 15*, primo observamus, L necessario esse maiorem quam 1: quod facile probatur, si aequatio in art. 89 tradita sub formam $L = 1 + \frac{\cos \frac{1}{2}f^2}{-\cos f} + \frac{\tan 2\omega^2}{-\cos f}$ ponitur. Porro

substituendo in aequatione 12* pro M , $Y\sqrt{(L-x)}$, prodit $Y+1 = (L-x)X$, adeoque

$$Y+1 > (1-x)X > \frac{4}{3} + \frac{4}{3 \cdot 5}x + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}xx \\ + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \text{etc.} > \frac{4}{3},$$

et proin $Y > \frac{1}{3}$. Statuendo itaque $Y = \frac{1}{3} + Y'$, necessario Y' erit quantitas positiva, aequatio 15* autem hinc transit in hanc

$$Y'^3 + 2Y'Y' + (1-H)Y' + \frac{4}{27} - \frac{2}{9}H = 0,$$

quam plures radices positivas habere non posse ex aequationum theoria facile probatur. Hinc colligitur, aequationem 15* unicam radicem habituram esse maiorem quam $\frac{1}{3}$ (*), quam neglectis reliquis in problemate nostro adoptare oportebit (**).

93.

Ut solutionem aequationis 15 pro casibus in praxi frequentissimis quantum fieri potest commodissimam reddamus, ad calcem huius operis tabulam peculiarem adiungimus (tabulam II), quae pro valoribus ipsius h a 0 usque ad 0,6 logarithmos respondentes ipsius yy ad septem figuras decimales summa cura computatos exhibet. Argumentum h a 0 usque ad 0,04 per singulas partes decies millesimas progreditur, quo pacto differentiae secundae ipsius $\log yy$ evanescentes sunt redditae, ita ut in hac quidem tabulae parte interpolatio simplex sufficiat. Quoniam vero tabula, si ubivis eadem extensione gauderet, valde voluminosa evasisset, ab $h = 0,04$ usque ad finem per singulas tantum millesimas partes progredi debuit; quamobrem in hac parte posteriori ad differentias secundas respicere oportebit, siquidem errores aliquot unitatum in

*) Siquidem problema revera solubile esse supponimus.

(**) Handschriftliche Bemerkung:] Die Gleichung 15* hat

1) Eine reelle negative Wurzel, wenn H zwischen den Grenzen 0 und $\frac{+1+\sqrt{5}}{6}$ liegt, nebst zwei imaginären.

2) Drei reelle Wurzeln, worunter Eine positive, wenn H zwischen $\frac{+1-\sqrt{5}}{6}$ und 0.

3) Eine reelle positive Wurzel und zwei imaginäre, wenn H zwischen $-\infty$ und $\frac{+1-\sqrt{5}}{6}$.

4) Drei reelle Wurzeln, unter denen Eine negativ, wenn H zwischen $\frac{+1+\sqrt{5}}{6}$ und $+\infty$.

Offenbar kann also nur von Fall 4 hier die Rede sein, wo sich zwei positive Wurzeln finden.

Allein die Eine derselben ist hier immer kleiner als $\frac{-1+\sqrt{5}}{6}$, die andere grösser; letztere kann also allein gültig sein.

Bei dem im Text angezeichneten Verfahren ist klar, dass die letzte Gleichung nur dann zwei positive Wurzeln haben könnte, wenn zugleich $1-H$ negativ und $\frac{4}{27} - \frac{2}{9}H$ positiv wäre, welches offenbar unmöglich ist, da $\frac{4}{27} - \frac{2}{9}H = \frac{2}{9}(1-H) - \frac{2}{27}$.

figura septima evitare cupimus. Ceterum valores minores ipsius h in praxi longe sunt frequentissimi.

Solutio aequationis 15 quoties h limitem tabulae egreditur, nec non solutio aequationis 15*, sine difficultate per methodum indirectam vel per alias methodos satis cognitae perfici poterit. Ceterum haud abs re erit monere, valorem parvum ipsius g cum valore negativo ipsius $\cos f$ consistere non posse nisi in orbitis valde excentricis, ut ex aequatione 20 infra in art. 95 tradenda sponte elucebit*).

94.

Tractatio aequationum 12, 12* in artt. 91, 92, 93 explicata innixa est suppositioni, angulum g non esse nimis magnum, certe infra limitem $66^0 25'$, ultra quem tabulam III non extendimus. Quoties haec suppositio locum non habet, aequationes illae tantis artificiis non indigent: poterunt enim *forma non mutata* tutissime semper ac commodissime tentando solvi. *Tuto* scilicet, quoniam valor expressionis $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$, in qua $2g$ in partibus radii exprimendum esse sponte patet, pro valoribus maioribus ipsius g *omni praecisione* computari potest per tabulas trigonometricas, quod utique fieri nequit, quamdiu g est angulus parvus: *commode*, quoniam loci heliocentrii tanto intervallo ab invicem distantes vix unquam ad determinationem orbitae penitus adhuc incognitae adhibebuntur, ex orbitae autem cognitione qualicunque valor approximatus ipsius g nullo propemodum negotio per aequationem 1 vel 3 art. 88 demanat: denique e valore approximato ipsius g valor correctus, aequationi 12 vel 12* omni quae desideratur praecisione satisfaciens, semper paucis tentaminibus eruetur. Ceterum quoties duo loci heliocentrii propositi plus una revolutione integra complectuntur, memorem esse oportet, quod ab anomalia excentrica totidem revolutiones completae absolutae erunt, ita ut anguli $E' - E$, $v' - v$ vel ambo iaceant inter 0 et 360^0 , vel ambo inter multipla similia totius peripheriae, adeoque f et g vel simul inter 0 et 180^0 , vel inter multipla similia semiperipheriae. Quodsi tandem orbita omnino incognita esset, neque adeo constaret, utrum corpus coeleste, transeundo a radio vectore primo ad secundum, descriperit partem tantum revolutionis, an insuper revolutionem integram unam seu plures, problema nostrum nonnunquam plures solutiones diversas admitteret: attamen huic casui in praxi vix unquam occursuro hic non immoramur.

*) Ostendit ista aequatio, si $\cos f$ sit negativus, φ certe maiorem esse debere quam $90^0 - g$.

95.

Transimus ad negotium secundum, puta determinationem elementorum ex invento angulo g . Semiaxis maior hic statim habetur per formulas 10, 10*, pro quibus etiam sequentes adhiberi possunt:

$$\begin{aligned} 17) \quad a &= \frac{2mm \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{yy \sin g^2} = \frac{kktt}{4yyrr' \cos f^2 \sin g^2} \\ 17^*) \quad a &= \frac{-2MM \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{YY \sin g^2} = \frac{kktt}{4YYrr' \cos f^2 \sin g^2}. \end{aligned}$$

Semiaxis minor $b = \sqrt{ap}$ habetur per aequationem 1, qua cum praecedentibus combinata prodit

$$\begin{aligned} 18) \quad p &= \left(\frac{yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2 \\ 18^*) \quad p &= \left(\frac{Yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2. \end{aligned}$$

Iam sector ellipticus inter duos radios vectores atque arcum ellipticum contentus fit $= \frac{1}{2}kt\sqrt{p}$, triangulum autem inter eosdem radios vectores atque chordam $= \frac{1}{2}rr' \sin 2f$: quamobrem ratio sectoris ad triangulum est ut $y : 1$ vel $Y : 1$. Haec observatio maximi est momenti, simulque aequationes 12, 12* pulcherrime illustrat: patet enim hinc, in aequatione 12 partes m , $(l+x)^{\frac{1}{2}}$, $X(l+x)^{\frac{3}{2}}$, in aequatione 12* autem partes M , $(L-x)^{\frac{1}{2}}$, $X(L-x)^{\frac{3}{2}}$ respective proportionales esse areae sectoris (inter radios vectores atque arcum ellipticum), areae trianguli (inter radios vectores atque chordam), areae segmenti (inter arcum atque chordam), quoniam manifesto area prima aequalis est vel summae vel differentiae duarum reliquarum, prout $v' - v$ vel inter 0 et 180^0 iacet vel inter 180^0 et 360^0 . In casu eo, ubi $v' - v$ maior est quam 360^0 , areae sectoris nec non areae segmenti aream integrae ellipsis toties adiectam concipere oportet, quot revolutiones integras ille motus continet.

Quum b sit $= a \cos \varphi$, e combinatione aequationum 1, 10, 10* porro sequitur

$$\begin{aligned} 19) \quad \cos \varphi &= \frac{\sin g \tan g f}{2(l + \sin \frac{1}{2}g^2)} \\ 19^*) \quad \cos \varphi &= \frac{-\sin g \tan g f}{2(L - \sin \frac{1}{2}g^2)}, \end{aligned}$$

unde substituendo pro l , L valores suos ex art. 89 prodit

$$20) \quad \cos \varphi = \frac{\sin f \sin g}{1 - \cos f \cos g + 2 \tan g 2\omega^2}.$$

Haec formula ad calculum exactum excentricitatis non est idonea, quoties haecce modica est: sed facile ex ista deducitur formula aptior sequens

$$21) \quad \text{tang } \frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(f - g)^2 + \text{tang } 2\omega^2}{\sin \frac{1}{2}(f + g)^2 + \text{tang } 2\omega^2},$$

cui etiam forma sequens tribui potest (multiplicando numeratorem et denominatorem per $\cos 2\omega^2$)

$$22) \quad \text{tang } \frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(f - g)^2 + \cos \frac{1}{2}(f - g)^2 \sin 2\omega^2}{\sin \frac{1}{2}(f + g)^2 + \cos \frac{1}{2}(f + g)^2 \sin 2\omega^2}.$$

Per utramque formulam (adhibitis si placet angulis auxiliaribus quorum tangentes $\frac{\text{tang } 2\omega}{\sin \frac{1}{2}(f - g)}$, $\frac{\text{tang } 2\omega}{\sin \frac{1}{2}(f + g)}$ pro priori, vel $\frac{\sin 2\omega}{\text{tang } \frac{1}{2}(f - g)}$, $\frac{\sin 2\omega}{\text{tang } \frac{1}{2}(f + g)}$ pro posteriori) angulum φ omni semper praecisione determinare licebit.

Pro determinatione anguli G adhiberi potest formula sequens, quae sponte demanat e combinatione aequationum 5, 7 et sequentis non numeratae:

$$23) \quad \text{tang } G = \frac{(r' - r) \sin g}{(r' + r) \cos g - 2 \cos f \cdot \sqrt{rr'}},$$

e qua, introducendo ω , facile derivatur

$$24) \quad \text{tang } G = \frac{\sin g \sin 2\omega}{\cos 2\omega^2 \sin \frac{1}{2}(f - g) \sin \frac{1}{2}(f + g) + \sin 2\omega^2 \cos g}.$$

Ambiguitas hic remanens facile deceditur adiumento aequationis 7, quae docet, G inter 0 et 180^0 vel inter 180^0 et 360^0 accipi debere, prout numerator in his duabus formulis positivus fuerit vel negativus.

Combinando aequationem 3 cum his, quae protinus demanant ex aequatione II art. 8,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} &= \frac{2e}{p} \sin f \sin F \\ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} &= \frac{2}{p} + \frac{2e}{p} \cos f \cos F, \end{aligned}$$

nullo negotio derivabitur sequens:

$$25) \quad \text{tang } F = \frac{(r' - r) \sin f}{2 \cos g \cdot \sqrt{rr'} - (r' + r) \cos f},$$

e qua, introducto angulo $\hat{\omega}$, prodit

$$26) \quad \text{tang } F = \frac{\sin f \sin 2\omega}{\cos 2\omega^2 \sin \frac{1}{2}(f - g) \sin \frac{1}{2}(f + g) - \sin 2\omega^2 \cos f}.$$

Ambiguitas hic perinde tollitur ut ante. — Postquam anguli F et G inventi erunt, habebitur $v = F - f$, $v' = F + f$, unde positio perihelii nota erit; nec non $E = G - g$, $E' = G + g$. Denique motus medius intra tempus t erit $= \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e \cos G \sin g$, quarum expressionum consensus calculo confirmando inserviet; epocha autem anomaliae mediae, respondens temporis momento inter duo proposita medio, erit $G - e \sin G \cos g$, quae pro lubitu ad quodvis aliud tempus transferri poterit. Aliquanto adhuc commodius est, anomalias medias pro duobus temporum momentis datis per formulas $E - e \sin E$, $E' - e \sin E'$ computare, harumque differentia cum $\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}$ comparanda ad calculi confirmationem uti.

96.

Aequationes in art. praec. traditae tanta quidem concinnitate gaudent, ut nihil amplius desiderari posse videatur. Nihilominus eruere licet formulas quasdam alias, per quas elementa orbitae multo adhuc elegantius et commodius determinantur: verum evolutio harum formularum paullulo magis recondita est.

Resumimus ex art. 8 aequationes sequentes, quas commoditatis gratia numeris novis distinguimus:

$$\text{I.} \quad \sin \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} = \sin \frac{1}{2}E \cdot \sqrt{(1+e)}$$

$$\text{II.} \quad \cos \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} = \cos \frac{1}{2}E \cdot \sqrt{(1-e)}$$

$$\text{III.} \quad \sin \frac{1}{2}v' \cdot \sqrt{\frac{r'}{a}} = \sin \frac{1}{2}E' \cdot \sqrt{(1+e)}$$

$$\text{IV.} \quad \cos \frac{1}{2}v' \cdot \sqrt{\frac{r'}{a}} = \cos \frac{1}{2}E' \cdot \sqrt{(1-e)}.$$

Multiplicamus I per $\sin \frac{1}{2}(F+g)$, II per $\cos \frac{1}{2}(F+g)$, unde productis additis nanciscimur

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(f+g) \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} &= \sin \frac{1}{2}E \sin \frac{1}{2}(F+g) \cdot \sqrt{(1+e)} \\ &+ \cos \frac{1}{2}E \cos \frac{1}{2}(F+g) \cdot \sqrt{(1-e)} \end{aligned}$$

sive, propter $\sqrt{(1+e)} = \cos \frac{1}{2}\varphi + \sin \frac{1}{2}\varphi$, $\sqrt{(1-e)} = \cos \frac{1}{2}\varphi - \sin \frac{1}{2}\varphi$:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(f+g) \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} &= \cos \frac{1}{2}\varphi \cos(\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}G + g) \\ &- \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}(F+G). \end{aligned}$$

Prorsus simili modo multiplicando III per $\sin \frac{1}{2}(F - g)$, IV per $\cos \frac{1}{2}(F - g)$, prodit productis additis

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(f + g) \cdot \sqrt{\frac{r'}{a}} &= \cos \frac{1}{2}\varphi \cos(\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}G - g) \\ &\quad - \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}(F + G). \end{aligned}$$

Subtrahendo ab hac aequatione praecedentem, oritur

$$\cos \frac{1}{2}(f + g) \cdot \left(\sqrt{\frac{r'}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \right) = 2 \cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \sin \frac{1}{2}(F - G)$$

sive introducendo angulum auxiliarem ω

$$\begin{aligned} 27) \quad &\cos \frac{1}{2}(f + g) \tan g 2\omega \\ &= \sin \frac{1}{2}(F - G) \cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \cdot \sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}}. \end{aligned}$$

Per transformationes prorsus similes, quarum evolutionem lectori perito relinquimus, invenitur

$$\begin{aligned} 28) \quad &\frac{\sin \frac{1}{2}(f + g)}{\cos 2\omega} \\ &= \cos \frac{1}{2}(F - G) \cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \cdot \sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29) \quad &\cos \frac{1}{2}(f - g) \tan g 2\omega \\ &= \sin \frac{1}{2}(F + G) \sin \frac{1}{2}\varphi \sin g \cdot \sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30) \quad &\frac{\sin \frac{1}{2}(f - g)}{\cos 2\omega} \\ &= \cos \frac{1}{2}(F + G) \sin \frac{1}{2}\varphi \sin g \cdot \sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}}. \end{aligned}$$

Quum partes primae in his quatuor aequationibus sint quantitates cognitae, ex 27 et 28 determinabuntur $\frac{1}{2}(F - G)$ et $\cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \cdot \sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} = P$, nec non ex 29 et 30 perinde $\frac{1}{2}(F + G)$ et $\sin \frac{1}{2}\varphi \sin g \cdot \sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} = Q$; ambiguitas in determinatione angulorum $\frac{1}{2}(F - G)$, $\frac{1}{2}(F + G)$ ita decidenda est, ut P et Q cum $\sin g$ idem signum obtineant. Dein ex P et Q derivabuntur $\frac{1}{2}\varphi$ et $\sin g \cdot \sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} = R$.

Ex R deduci potest $a = \frac{RR\sqrt{rr'}}{\sin g^2}$, nec non $p = \frac{\sin f^2 \sqrt{rr'}}{RR}$, nisi illa quantitate,

quae fieri debet = $\pm\sqrt{\{2(l + \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f\}}$, = $\pm\sqrt{\{-2(L - \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f\}}$, unice ad calculi confirmationem uti malimus, in quo casu a et p commodissime determinantur per formulas

$$b = \frac{\sin f \cdot \sqrt{rr'}}{\sin g}, \quad a = \frac{b}{\cos \varphi}, \quad p = b \cos \varphi.$$

Possunt etiam, pro lubito, plures aequationum artt. 88 et 95 ad calculi confirmationem in usum vocari, quibus sequentes adhuc adiicimus:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tang} 2\omega}{\cos 2\omega} \sqrt{\frac{rr'}{aa}} &= e \sin G \sin g \\ \frac{2 \operatorname{tang} 2\omega}{\cos 2\omega} \sqrt{\frac{pp}{rr'}} &= e \sin F \sin f \\ \frac{2 \operatorname{tang} 2\omega}{\cos 2\omega} &= \operatorname{tang} \varphi \sin G \sin f = \operatorname{tang} \varphi \sin F \sin g. \end{aligned}$$

Denique motus medius atque epocha anomaliae mediae perinde inveniuntur ut in art. praec.

97.

Ad illustrationem methodi inde ab art. 88 expositae duo exempla art. 87 resumemus: anguli auxiliaris ω significationem hactenus observatam non esse confundendam cum ea, in qua in artt. 86, 87 acceptum erat idem signum, vix opus erit monuisse.

I. In exemplo primo habemus $f = 3^0 47' 26'', 865$, porroque

$$\begin{aligned} \log \frac{r'}{r} &= 9,991\,4599, & \log \operatorname{tang}(45^0 + \omega) &= 9,997\,8649\,75, \\ \omega &= -8' 27'', 006. \end{aligned}$$

Hinc per art. 89

$\log \sin \frac{1}{2}f^2$		7,038 9972
$\log \cos f$		9,999 0488
		7,039 9484
$= \log 0,001\,0963\,480$		
$\log \operatorname{tang} 2\omega^2$		5,383 2428
$\log \cos f$		9,999 0488
		5,384 1940
$= \log 0,000\,0242\,211$		

adeoque $l = 0,001\,1205\,691$, $\frac{5}{6} + l = 0,834\,4539$. Porro fit $\log kt = 9,576\,6974$

$2 \log kt$		9,153 3948
$C. \frac{3}{2} \log rr'$		9,020 5181
$C. \log 8 \cos f^3$		9,099 7636
$\log mm$		7,273 6765
$\log(\frac{5}{6} + l)$		9,921 4023
		7,352 2742

Est itaque valor approximatus ipsius $h = 0,002\,2504\,7$, cui in tabula nostra II respondet $\log yy = 0,002\,1633$. Habetur itaque $\log \frac{mm}{yy} = 7,271\,5132$, sive $\frac{mm}{yy} = 0,001\,8685\,87$, unde per formulam 16 fit $x = 0,000\,7480\,179$; quomobrem quum ξ per tabulam III omnino insensibilis sit, valores inventi pro h , y , x correctione non indigent. Iam determinatio elementorum ita se habet:

$\log x$		6,873 9120
$\log \sin \frac{1}{2}g$		8,436 9560

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g &= 1^0 34' 2'',0286, & \frac{1}{2}(f + g) &= 3^0 27' 45'',4611, \\ \frac{1}{2}(f - g) &= 19' 41'',4039. \end{aligned}$$

Quare ad normam formularum 27, 28, 29, 30 habetur

$\log \tan 2\omega$		7,691 6214 _n
$\log \cos \frac{1}{2}(f + g)$		9,999 2065
$\log \cos \frac{1}{2}(f - g)$		9,999 9929
$\log P \sin \frac{1}{2}(F - G)$		7,690 8279 _n
$\log P \cos \frac{1}{2}(F - G)$		8,781 0240
$\frac{1}{2}(F - G) =$		-4 ⁰ 38' 41'',54
$\frac{1}{2}(F + G) =$		319 21 38,05
$F =$		314 42 56,51
$v =$		310 55 29,64
$v' =$		318 30 23,37
$G =$		324 0 19,59
$E =$		320 52 15,53
$E' =$		327 8 23,65

C. $\log \cos 2\omega$		0,000 0052
$\log \sin \frac{1}{2}(f + g)$		8,781 0188
$\log \sin \frac{1}{2}(f - g)$		7,757 9709
$\log Q \sin \frac{1}{2}(F + G)$		7,691 6143 _n
$\log Q \cos \frac{1}{2}(F + G)$		7,757 9761
$\log P = \log R \cos \frac{1}{2}\varphi$	...	8,782 4527
$\log Q = \log R \sin \frac{1}{2}\varphi$	...	7,877 8355
Hinc $\frac{1}{2}\varphi =$		7 ⁰ 6' 0'',935
$\varphi =$		14 12 1,87
$\log R$		8,785 7960

Ad calculum confirmandum

$\frac{1}{2} \log 2 \cos f$		0,150 0394
$\frac{1}{2} \log(l + x) = \log \frac{m}{y}$		8,635 7566
		8,785 7960

$\frac{1}{2} \log rr'$		0,326 4939
$\log \sin f$		8,820 2909
C. $\log \sin g$		1,262 1765
$\log b$		0,408 9613
$\log \cos \varphi$		9,986 5224
$\log p$		0,395 4837
$\log a$		0,422 4389
$\log k$		3,550 0066
$\frac{3}{2} \log a$		0,633 6584
		2,916 3482
$\log t$		1,341 1160
		4,257 4642

Est itaque motus medius diurnus = 824'',7990. Motus medius intra tempus $t = 18091'',07 = 5^0 1' 31'',07$.

$\log \sin \varphi$		9,389 7262
$\log 206265$		5,314 4251
$\log e$ in secundis		4,704 1513
$\log \sin E$		9,800 0767 _n
$\log \sin E'$		9,734 4714 _n
$\log e \sin E$		4,504 2280 _n
$\log e \sin E'$		4,438 6227 _n

$$e \sin E = -31932'',14 = -8^0 52' 12'',14$$

$$e \sin E' = -27455,08 = -7 \quad 37 \quad 35,08$$

Hinc anomalia media

$$\text{pro loco primo} = 329^0 44' 27'',67$$

$$\text{pro secundo} = 334 \quad 45 \quad 58,73$$

$$\text{Differentia} = 5 \quad 1 \quad 31,06$$

II. In exemplo altero fit $f = 31^0 27' 38'',32$, $\omega = -21' 50'',565$, $l = 0,086 3565 9$, $\log mm = 9,353 0651$, $\frac{mm}{\frac{5}{6} + l}$ sive valor approximatus ipsius $h = 0,245 1454$; huic in tabula II respondet $\log yy = 0,172 2663$, unde ducitur $\frac{mm}{yy} = 0,151 6347 7$, $x = 0,065 2781 8$, hinc e tabula III sumitur $\xi = 0,000 2531$. Quo valore adhibito prodeunt valores correcti $h = 0,245 0779$, $\log yy = 0,172 2303$, $\frac{mm}{yy} = 0,151 6473 5$, $x = 0,065 2907 6$, $\xi = 0,000 2532$. Quodsi cum hoc valore ipsius ξ , unica tantum unitate in figura septima a priori diverso, calculus denuo repeteretur, h , $\log yy$, x mutationem sensibilem non acciperent, quamobrem valor inventus ipsius x iam est verus, statimque inde ad determinationem elementorum progredi licet. Cui hic non immoramur, quum nihil ab exemplo praecedente differat.

III. Haud abs re erit, etiam casum alterum ubi $\cos f$ negativus est exemplo illustrare. Sit $v' - v = 224^0 0' 0''$, sive $f = 112^0 0' 0''$, $\log r = 0,139 4892$, $\log r' = 0,397 8794$, $t = 206,80919$ dies. Hic invenitur $\omega = +4^0 14' 43'',82$, $L = 1,894 2298$, $\log MM = 0,672 4333$, valor primus approximatus ipsius $\log H = 0,646 7603$, unde per solutionem aequationis 15* obtinetur $Y = 1,591 432$, ac dein $x = 0,037 037$, cui respondet, in tabula III, $\xi = 0,000 0801$. Hinc oriuntur valores correcti $\log H = 0,646 7931$, $Y = 1,591 5107$, $x = 0,037 2195$, $\xi = 0,000 0809$. Calculo cum hoc valore ipsius ξ denuo repetito prodit $x = 0,037 2213$, qui valor, quum ξ inde haud mutata prodeat, nulla amplius correctione indiget. Invenitur dein $\frac{1}{2}g = 11^0 7' 25'',40$, atque hinc perinde ut in exemplo I

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(F - G) &= 3^0 33' 53'',62 \\
 \frac{1}{2}(F + G) &= 8 \quad 26 \quad 6,38 \\
 F &= 12 \quad 0 \quad 0,00 \\
 v &= -100 \quad 0 \quad 0,00 \\
 v' &= +124 \quad 0 \quad 0,00 \\
 G &= 4 \quad 52 \quad 12,76 \\
 E &= -17 \quad 22 \quad 38,04 \\
 E' &= +27 \quad 7 \quad 3,56
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log P = \log R \cos \frac{1}{2}\varphi & \dots 9,970\,0508 \\
 \log Q = \log R \sin \frac{1}{2}\varphi & \dots 9,858\,0553 \\
 \frac{1}{2}\varphi = & 37^0 41' 34'',27 \\
 \varphi = & 75 \quad 23 \quad 8,54 \\
 \log R & \dots\dots\dots 0,071\,7097
 \end{aligned}$$

Ad calculi confirmationem eruitur

$$\log \frac{M}{Y} \sqrt{(-2 \cos f)} \dots\dots 0,071\,7097$$

In orbitis tam excentricis angulus φ paullulo exactius computatur per formulam 19*, quae in exemplo nostro dat $\varphi = 75^0 23' 8'',57$; excentricitas quoque e maiori praecisione determinatur per formulam $1 - 2 \sin(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)^2$ quam per $\sin \varphi$; secundum illam fit $e = 0,967\,6463\,0$.

Per formulam 1 porro invenitur $\log b = 0,657\,6611$, unde $\log p = 0,0595967$, $\log a = 1,255\,7255$, atque logarithmus distantiae in perihelio

$$\begin{aligned}
 &= \log \frac{p}{1 + e} = \log(a(1 - e)) \\
 &= \log(b \operatorname{tang}(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)) = 9,765\,6496.
 \end{aligned}$$

In orbitis tantopere ad parabolae similitudinem vergentibus loco epochae anomaliae mediae assignari solet tempus transitus per perihelium; intervalla inter hoc tempus atque tempora duobus locis propositis respondentia determinari poterunt ex elementis cognitis per methodum in art. 41 traditam, quorum differentia vel summa (prout perihelium vel extra duo loca proposita iacet vel intra), quum consentire debeat cum tempore t , calculo confirmando inserviet. — Ceterum numeri huius tertii exempli superstructi erant elementis in exemplo artt. 38 et 43 suppositis, quin adeo istud ipsum exemplum locum nostrum primum suppeditaverat: differentiae leviusculae elementorum hic erutorum unice a limitata praecisione tabularum logarithmicarum et trigonometricarum originem traxerunt.

98.

Solutio problematis nostri pro ellipsi in praec. evoluta etiam ad parabolam et hyperbolam transferri posset, considerando parabolam tamquam ellipsin, in qua a et b essent quantitates infinitae, $\varphi = 90^0$, tandem $E, E', g, G = 0$; et perinde hyperbolam tamquam ellipsin in qua a esset negativa, atque b, E, E', g, G, φ imaginariae: malumus tamen his suppositionibus abstinere, problemaque pro utroque sectionum conicarum genere seorsim tractare. Analogia insignis inter omnia tria genera sic sponte se manifestabit.

Retinendo in PARABOLA characteres p, v, v', F, f, r, r', t in eadem significatione in qua supra accepti sunt, habemus e theoria motus parabolici:

$$1) \quad \sqrt{\frac{p}{2r}} = \cos \frac{1}{2}(F - f)$$

$$2) \quad \sqrt{\frac{p}{2r'}} = \cos \frac{1}{2}(F + f)$$

$$\begin{aligned} \frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} &= \tan \frac{1}{2}(F + f) - \tan \frac{1}{2}(F - f) \\ &\quad + \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2}(F + f)^3 - \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2}(F - f)^3 \\ &= \{ \tan \frac{1}{2}(F + f) - \tan \frac{1}{2}(F - f) \} \\ &\quad \left\{ 1 + \tan \frac{1}{2}(F + f) \tan \frac{1}{2}(F - f) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (\tan \frac{1}{2}(F + f) - \tan \frac{1}{2}(F - f))^2 \right\} \\ &= \frac{2 \sin f \cdot \sqrt{rr'}}{p} \left\{ \frac{2 \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{p} + \frac{4 \sin^2 f rr'}{3pp} \right\}, \end{aligned}$$

unde

$$3) \quad kt = \frac{2 \sin f \cos f \cdot rr'}{\sqrt{p}} + \frac{4 \sin^3 f (rr')^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{3}{2}}}.$$

Porro deducitur ex multiplicatione aequationum 1, 2

$$4) \quad \frac{p}{\sqrt{rr'}} = \cos F + \cos f,$$

nec non ex additione quadratorum

$$5) \quad \frac{p(r + r')}{2rr'} = 1 + \cos F \cos f.$$

Hinc eliminato $\cos F$

$$6) \quad p = \frac{2rr' \sin^2 f}{r + r' - 2 \cos f \cdot \sqrt{rr'}}.$$

Quodsi itaque aequationes 9, 9* art. 88 hic quoque adoptamus, priorem pro $\cos f$ positivo, posteriorem pro negativo, habebimus

$$7) \quad p = \frac{\sin f^2 \sqrt{rr'}}{2l \cos f}$$

$$7^*) \quad p = \frac{\sin f^2 \sqrt{rr'}}{-2L \cos f},$$

quibus valoribus in aequatione 3 substitutis, prodibit, retinendo characteres m , M in significatione per aequationes 11, 11* art. 88 stabilita,

$$8) \quad m = l^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}l^{\frac{3}{2}}$$

$$8^*) \quad M = -L^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}L^{\frac{3}{2}}.$$

Hae aequationes conveniunt cum 12, 12* art. 88, si illic statuatur $g = 0$. Hinc colligitur, si duo loci heliocentrici, quibus per parabolam satisfit, ita tractentur, ac si orbita esset elliptica, ex applicatione praeceptorum art. 91 statim resultare debere $x = 0$; vice versa facile perspicitur, si per praecepta ista prodeat $x = 0$, orbitam pro ellipsi parabolam evadere, quum per aequationes 1, 16, 17, 19, 20 fiat $b = \infty$, $a = \infty$, $\varphi = 90^0$. Determinatio elementorum facillime dein absolvitur. Pro p enim adhiberi poterit vel aequatio 7 art. praesentis, vel aequ. 18 art. 95^{*)}: pro F autem fit ex aequationibus 1, 2 huius art. $\tan \frac{1}{2}F = \frac{\sqrt{r'} - \sqrt{r}}{\sqrt{r'} + \sqrt{r}} \cotang \frac{1}{2}f = \sin 2\omega \cotang \frac{1}{2}f$, si angulus auxiliaris in eadem significatione accipitur, ut in art. 89.

Hacce occasione adhuc observamus, si in aequ. 3 pro p substituatur valor eius ex 6, prodire aequationem satis notam

$$kt = \frac{1}{3}(r + r' + \cos f \cdot \sqrt{rr'})(r + r' - 2 \cos f \cdot \sqrt{rr'})^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}.$$

99.

In HYPERBOLA quoque characteres p , v , v' , f , F , r , r' , t in significatione eadem retinemus, pro semiaxi maiori a autem, qui hic negativus est, scribe-
mus $-\alpha$; excentricitatem e perinde ut supra art. 21 etc. statuemus $= \frac{1}{\cos \psi}$.

Quantitatem auxiliarem illic per u expressam, statuemus pro loco primo $= \frac{C}{c}$, pro secundo $= Cc$, unde facile concluditur, c semper esse maiorem quam 1, sed ceteris paribus eo minus differre ab 1, quo minus duo loci propositi ab

^{*)}Unde simul patet, y et Y in parabola easdem rationes exprimere ut in ellipsi, v. art. 95.

invicem distent. Ex aequationibus in art. 21 evolutis huc transferimus forma paullulum mutata sextam et septimam

$$\begin{aligned}
 1) \quad \cos \frac{1}{2}v &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{c}} + \sqrt{\frac{c}{C}} \right) \sqrt{\frac{(e-1)\alpha}{r}} \\
 2) \quad \sin \frac{1}{2}v &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{c}} - \sqrt{\frac{c}{C}} \right) \sqrt{\frac{(e+1)\alpha}{r}} \\
 3) \quad \cos \frac{1}{2}v' &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{Cc} + \sqrt{\frac{1}{Cc}} \right) \sqrt{\frac{(e-1)\alpha}{r'}} \\
 4) \quad \sin \frac{1}{2}v' &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{Cc} - \sqrt{\frac{1}{Cc}} \right) \sqrt{\frac{(e+1)\alpha}{r'}}.
 \end{aligned}$$

Hinc statim demanant sequentes:

$$\begin{aligned}
 5) \quad \sin F &= \frac{1}{2}\alpha \left(C - \frac{1}{C} \right) \sqrt{\frac{ee-1}{rr'}} \\
 6) \quad \sin f &= \frac{1}{2}\alpha \left(c - \frac{1}{c} \right) \sqrt{\frac{ee-1}{rr'}} \\
 7) \quad \cos F &= \left(e \left(c + \frac{1}{c} \right) - \left(C + \frac{1}{C} \right) \right) \frac{\alpha}{2\sqrt{rr'}} \\
 8) \quad \cos f &= \left(e \left(C + \frac{1}{C} \right) - \left(c + \frac{1}{c} \right) \right) \frac{\alpha}{2\sqrt{rr'}}.
 \end{aligned}$$

Porro fit per aequ. X art. 21

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{\alpha} &= \frac{1}{2}e \left(\frac{C}{c} + \frac{c}{C} \right) - 1 \\
 \frac{r'}{\alpha} &= \frac{1}{2}e \left(Cc + \frac{1}{Cc} \right) - 1,
 \end{aligned}$$

atque hinc

$$\begin{aligned}
 9) \quad \frac{r' - r}{\alpha} &= \frac{1}{2}e \left(C - \frac{1}{C} \right) \left(c - \frac{1}{c} \right) \\
 10) \quad \frac{r' + r}{\alpha} &= \frac{1}{2}e \left(C + \frac{1}{C} \right) \left(c + \frac{1}{c} \right) - 2.
 \end{aligned}$$

Haec aequatio 10 cum 8 combinata praebet

$$11) \quad \alpha = \frac{r' + r - \left(c + \frac{1}{c}\right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c}\right)^2}.$$

Statuendo itaque perinde ut in ellipsi $\frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} = 1 + 2l$, vel $= 1 - 2L$, prout $\cos f$ est positivus vel negativus, fit

$$12) \quad \alpha = \frac{8 \left(l - \frac{1}{4} \left(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\left(c - \frac{1}{c} \right)^2}$$

$$12^*) \quad \alpha = \frac{-8 \left(L + \frac{1}{4} \left(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\left(c - \frac{1}{c} \right)^2}.$$

Computus quantitatis l vel L hic perinde ut in ellipsi adiumento anguli auxiliaris ω instituetur. Denique fit ex aequatione XI art. 22 (accipiendo logarithmos hyperbolicos)

$$\begin{aligned} \frac{kt}{\alpha^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{2} e \left(Cc - \frac{1}{Cc} - \frac{C}{c} + \frac{c}{C} \right) - \log Cc + \log \frac{C}{c} \\ &= \frac{1}{2} e \left(C + \frac{1}{C} \right) \left(c - \frac{1}{c} \right) - 2 \log c \end{aligned}$$

sive eliminata C adiumento aequationis 8

$$\frac{kt}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left(c - \frac{1}{c} \right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\alpha} + \frac{1}{2} \left(cc - \frac{1}{cc} \right) - 2 \log c.$$

In hac aequatione pro α substituimus valorem eius ex 12, 12*; dein characterem m vel M in eadem significatione, quam formulae 11, 11* art. 88 assignant, introducimus; tandemque brevitatis gratia scribimus

$$\frac{1}{4} \left(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 = z,$$

$$\frac{cc - \frac{1}{cc} - 4 \log c}{\frac{1}{4} \left(c - \frac{1}{c} \right)^3} = Z,$$

quo facto oriuntur aequationes

$$13) \quad m = (l - z)^{\frac{1}{2}} + (l - z)^{\frac{3}{2}} Z$$

$$13^*) \quad M = -(L + z)^{\frac{1}{2}} + (L + z)^{\frac{3}{2}} Z,$$

quae unicam incognitam z implicant, quum manifesto sit Z functio ipsius z per formulam sequentem expressa

$$Z = \frac{(1 + 2z)\sqrt{(z + zz)} - \log(\sqrt{1 + z} + \sqrt{z})}{2(z + zz)^{\frac{3}{2}}}.$$

100.

In solvenda aequatione 13 vel 13* eum casum primo seorsim considerabimus, ubi z obtinet valorem haud magnum, ita ut Z per seriem secundum potestates ipsius z progredientem celeriterque convergentem exprimi possit. Iam fit

$$(1 + 2z)\sqrt{(z + zz)} = z^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}z^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{8}z^{\frac{5}{2}} - \dots,$$

$$\log(\sqrt{(1 + z)} + \sqrt{z}) = z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}z^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}z^{\frac{5}{2}} - \dots,$$

adeoque numerator ipsius $Z = \frac{8}{3}z^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}z^{\frac{5}{2}} - \dots$; denominator autem fit $= 2z^{\frac{3}{2}} + 3z^{\frac{5}{2}} + \dots$, unde $Z = \frac{4}{3} - \frac{8}{5}z + \dots$. Ut legem progressionis detegamus, differentiamus aequationem

$$2(z + zz)^{\frac{3}{2}} Z = (1 + 2z)\sqrt{(z + zz)} - \log(\sqrt{(1 + z)} + \sqrt{z}),$$

unde prodit omnibus rite reductis

$$2(z + zz)^{\frac{3}{2}} \frac{dZ}{dz} + 3Z(1 + 2z)\sqrt{(z + zz)} = 4\sqrt{(z + zz)}$$

sive

$$(2z + 2zz) \frac{dZ}{dz} = 4 - (3 + 6z)Z,$$

unde simili ratione ut in art. 90 deducitur

$$Z = \frac{4}{3} - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}z + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}zz - \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}z^3 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}z^4 - \text{etc.}$$

Patet itaque, Z prorsus eodem modo a $-z$ pendere, ut supra in ellipsi X ab x : quamobrem si statuimus

$$Z = \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{9}{10}(z + \zeta)},$$

determinabitur etiam ζ perinde per $-z$ ut supra ξ per x , ita ut habeatur

$$14) \quad \zeta = \frac{\frac{2}{35}zz}{1 - \frac{2}{35}z + \frac{\frac{40}{63}z}{1 + \frac{\frac{4}{99}z}{1 + \frac{\frac{70}{143}z}{1 + \text{etc.}}}}}$$

sive

$$\zeta = \frac{\frac{2}{35}zz}{1 + \frac{18}{35}z + \frac{\frac{4}{63}z}{1 + \frac{\frac{40}{99}z}{1 + \frac{\frac{18}{143}z}{1 + \text{etc.}}}}}$$

Hoc modo computati sunt valores ipsius ζ pro $z = 0$ usque ad $z = 0,3$ per singulas partes millesimas, quos columna tertia tabulae III exhibet.

101.

Introducendo quantitatem ζ statuendoque $\sqrt{(l - z)} = \frac{m}{y}$ vel $\sqrt{(L + z)} = \frac{M}{Y}$, nec non

$$15) \quad \frac{mm}{\frac{5}{6} + l + \zeta} = h$$

vel

$$15^*) \quad \frac{MM}{L - \frac{5}{6} - \zeta} = H,$$

aequationes 13, 13* hancce formam induunt

$$16) \quad \frac{(y-1)yy}{y + \frac{1}{9}} = h$$

$$16^*) \quad \frac{(Y+1)YY}{Y - \frac{1}{9}} = H,$$

adeoque omnino identicae fiunt cum iis ad quas in ellipsi perventum est (15, 15* art. 91). Hinc igitur, quatenus h vel H pro cognita haberi potest, y vel Y deduci poterit, ac dein erit

$$17) \quad z = l - \frac{mm}{yy}$$

$$17^*) \quad z = \frac{MM}{YY} - L.$$

Ex his colligitur, omnes operationes supra pro ellipsi praescriptas perinde etiam pro hyperbola valere, donec e valore approximato ipsius h vel H eruta fuerit quantitas y vel Y ; dein vero quantitas $\frac{mm}{yy} - l$ vel $L - \frac{MM}{YY}$, quae in ellipsi positiva evadere debebat, in parabolaque = 0, fieri debet negativa in hyperbola: hoc itaque criterio genus sectionis conicae definitur. Ex inventa z tabula nostra dabit ζ , hinc orietur valor correctus ipsius h vel H , cum quo calculus repetendus est, donec omnia ex asse conspirent.

Postquam valor verus ipsius z inventus est, c inde per formulam $c = 1 + 2z + 2\sqrt{(z + zz)}$ derivari posset, sed praestat, etiam ad usus sequentes, angulum auxiliarem n introducere, per aequationem $\tan 2n = 2\sqrt{(z + zz)}$ determinandum; hinc fiet $c = \tan 2n + \sqrt{(1 + \tan 2n^2)} = \tan(45^0 + n)$.

102.

Quum in hyperbola perinde ut in ellipsi y necessario esse debeat positiva, solutio aequationis 16 hic quoque ambiguitati obnoxia esse nequit^{*)}: sed respectu aequationis 16* hic paullo aliter ratiocinandum est quam in ellipsi. Ex aequationum theoria facile demonstratur, pro valore positivo ipsius $H^{**})$ hanc aequationem (siquidem ullam radicem realem positivam habeat) cum una radice negativa duas positivas habere, quae vel ambae aequales erunt puta $= \frac{1}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{6} = 0,20601$, vel altera hoc limite maior altera minor. Iam in problemate nostro (suppositioni superstructo, z esse quantitatem haud magnam,

^{*)}Vix opus erit monere, tabulam nostram II in hyperbola perinde ut in ellipsi ad solutionem huius aequationis adhiberi posse, quamdiu h ipsius limites non egrediatur.

^{**)Quantitas H manifesto fieri nequit negativa, nisi fuerit $\zeta > \frac{1}{6}$; tali autem valori ipsius ζ responderet valor ipsius z maior quam 2,684, adeoque limites huius methodi longe egrediens.}

saltem non maiorem quam 0,3, ne tabulae tertiae usu destituamur) necessario semper radicem maiorem accipiendam esse sequenti modo demonstramus. Si in aequatione 13* pro M substituitur $Y\sqrt{(L+z)}$, prodit

$$Y + 1 = (L + z)Z > (1 + z)Z,$$

sive

$$Y > \frac{1}{3} - \frac{4}{3.5}z + \frac{4.6}{3.5.7}zz - \frac{4.6.8}{3.5.7.9}z^3 + \text{etc.},$$

unde facile concluditur, pro valoribus tam parvis ipsius z , quales hic supponimus, semper fieri debere $Y > 0,20601$. Revera calculo facto invenimus, ut $(1+z)Z$ huic limiti aequalis fiat, esse debere $z = 0,79858$: multum vero abest, quin methodum nostram ad tantos valores ipsius z extendere velimus.

103.

Quoties z valorem maiorem obtinet, tabulae III limites egredientem, aequationes 13, 13* tuto semper ac commode in forma sua non mutata tentando solventur, et quidem ob rationes iis similes quas in art. 94 pro ellipsi exposuimus. In tali casu elementa orbitae obiter saltem cognita esse supponere licet: tum vero valor approximatus ipsius n statim habetur per formulam $\text{tang } 2n = \frac{\sin f \cdot \sqrt{rr'}}{\alpha\sqrt{(ee-1)}}$, quae sponte demanat ex aequatione 6 art. 99. Ex n

autem habebitur z per formulam $z = \frac{1 - \cos 2n}{2 \cos 2n} = \frac{\sin n^2}{\cos 2n}$, et ex valore approximato ipsius z paucis tentaminibus derivabitur ille, qui aequationi 13 vel 13* ex asse satisfacit. Possunt quoque illae aequationes in hac forma exhiberi

$$\begin{aligned} m &= \left(l - \frac{\sin n^2}{\cos 2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \left(l - \frac{\sin n^2}{\cos 2n} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{\text{tang } 2n}{\cos 2n} - \log \text{hyp tang}(45^0 + n)}{\text{tang } 2n^3} \\ M &= - \left(L + \frac{\sin n^2}{\cos 2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \left(L + \frac{\sin n^2}{\cos 2n} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{\text{tang } 2n}{\cos 2n} - \log \text{hyp tang}(45^0 + n)}{\text{tang } 2n^3} \end{aligned}$$

atque sic, neglecta z , statim valor verus ipsius n erui.

104.

Superest, ut ex z , n vel c elementa ipsa determinemus. Statuendo

$$\alpha\sqrt{(ee-1)} = \beta,$$

habebitur ex aequatione 6 art. 99

$$18) \quad \beta = \frac{\sin f \cdot \sqrt{rr'}}{\tan 2n}.$$

Combinando hanc formulam cum 12, 12* art. 99, eruitur

$$19) \quad \sqrt{(ee-1)} = \tan \psi = \frac{\tan f \tan 2n}{2(l-z)}$$

$$19^*) \quad \tan \psi = -\frac{\tan f \tan 2n}{2(L+z)},$$

unde excentricitas commode atque exacte computatur; ex β et $\sqrt{(ee-1)}$ prodibit per divisionem α , per multiplicationem p , ita ut sit

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2(l-z) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\tan 2n^2} = \frac{2mm \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{yy \tan 2n^2} \\ &= \frac{kkt}{4yyrr' \cos f^2 \tan 2n^2} \\ &= \frac{-2(L+z) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\tan 2n^2} = \frac{-2MM \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{YY \tan 2n^2} \\ &= \frac{kkt}{4YYrr' \cos f^2 \tan 2n^2} \\ p &= \frac{\sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2(l-z)} = \frac{yy \sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2mm} \\ &= \left(\frac{yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2 \\ &= \frac{-\sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2(L+z)} = \frac{-YY \sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2MM} \\ &= \left(\frac{Yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2. \end{aligned}$$

Expressio tertia et sexta pro p , quae omnino identicae sunt cum formulis 18, 18* art. 95, ostendunt, ea quae illic de significatione quantitatum y , Y tradita sunt, etiam pro hyperbola valere.

E combinatione aequationum 6, 9 art. 99 deducitur

$$(r' - r)\sqrt{\frac{ee - 1}{rr'}} = e \sin f. \left(C - \frac{1}{C} \right);$$

introducendo itaque ψ et ω , statuendoque $C = \tan(45^0 + N)$, fit

$$20) \quad \tan 2N = \frac{2 \sin \psi \tan 2\omega}{\sin f \cos 2\omega}.$$

Invento hinc C , habebuntur valores quantitatis in art. 21 per u expressae pro utroque loco; dein fiet per aequationem III art. 21

$$\tan \frac{1}{2}v = \frac{C - c}{(C + c) \tan \frac{1}{2}\psi}$$

$$\tan \frac{1}{2}v' = \frac{Cc - 1}{(Cc + 1) \tan \frac{1}{2}\psi}$$

sive introducendo pro C , c angulos N , n

$$21) \quad \tan \frac{1}{2}v = \frac{\sin(N - n)}{\cos(N + n) \tan \frac{1}{2}\psi}$$

$$22) \quad \tan \frac{1}{2}v' = \frac{\sin(N + n)}{\cos(N - n) \tan \frac{1}{2}\psi}.$$

Hinc determinabuntur anomaliae verae v , v' , quarum differentia cum $2f$ comparata simul calculo confirmando inserviet.

Denique per formulam XI art. 22 facile deducitur, intervallum temporis a perihelio usque ad tempus loco primo respondens esse

$$= \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{2e \cos(N + n) \sin(N - n)}{\cos 2N \cos 2n} - \log \text{hyp} \frac{\tan(45^0 + N)}{\tan(45^0 + n)} \right\}$$

et perinde intervallum temporis a perihelio usque ad tempus loco secundo respondens

$$= \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{2e \cos(N - n) \sin(N + n)}{\cos 2N \cos 2n} - \log \text{hyp} \tan(45^0 + N) \tan(45^0 + n) \right\}.$$

Si itaque tempus primum statuitur $= T - \frac{1}{2}t$, adeoque secundum $= T + \frac{1}{2}t$, fit

$$23) \quad T = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{e \tan 2N}{\cos 2n} - \log \text{hyp} \tan(45^0 + N) \right\},$$

unde tempus transitus per perihelium innotescet; denique

$$24) \quad t = \frac{2\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{e \operatorname{tang} 2n}{\cos 2N} - \log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^0 + n) \right\},$$

quae aequatio, si placet, ad ultimam calculi confirmationem adhiberi potest.

105.

Ad illustrationem horum praeceptorum exemplum e duobus locis in artt. 23, 24, 26, 46 secundum eadem elementa hyperbolica calculatis conficiemus. Sit itaque $v' - v = 48^0 12' 0''$ sive $f = 24^0 6' 0''$, $\log r = 0,033\,3585$, $\log r' = 0,200\,8541$, $t = 51,49788$ dies. Hinc invenitur $\omega = 2^0 45' 28'',47$, $l = 0,057\,9603\,9$, $\frac{mm}{\frac{5}{6}+l}$ sive valor approximatus ipsius $h = 0,064\,4371$; hinc, per tabulam II, $\log yy = 0,056\,0848$, $\frac{mm}{yy} = 0,050\,4745\,4$, $z = 0,007\,4858\,5$, cui in tabula III respondet $\zeta = 0,000\,0032$. Hinc fit valor correctus ipsius $h = 0,064\,4369\,1$, $\log yy = 0,056\,0846$, $\frac{mm}{yy} = 0,050\,4745\,6$, $z = 0,007\,4858\,3$, qui valores, quum ζ inde non mutetur, nulla amplius correctione opus habent. Iam calculus elementorum ita se habet:

$\log z$		7,874 2399
$\log(1 + z)$		0,003 2389
$\log \sqrt{(z + zz)}$		8,938 7394
$\log 2$		0,301 0300
$\log \operatorname{tang} 2n$	, ...	9,239 7694
$2n =$		$9^0 51' 11'',816$
$n =$		4 55 35,908
$\log \operatorname{tang} f$		9,650 6199
$\log \frac{1}{2} \operatorname{tang} 2n$		8,938 7394
$C. \log(l - z)$		1,296 9275
$\log \operatorname{tang} \psi$		9,886 2868
$\psi =$		$37^0 34' 59'',77$
(esse deberet =		37 35 0)

$\log \sin f$		9,611 0118
$\log \sqrt{rr'}$		0,117 1063
C. $\log \operatorname{tang} 2n$		0,760 2306
$\log \beta$		0,488 3487
$\log \operatorname{tang} \psi$		9,886 2868
$\log \alpha$		0,602 0619
$\log p$		0,374 6355
(esse deberent		0,602 0600
atque		0,374 6356)
C. $\log \frac{1}{2} \sin f$		0,690 0182
$\log \operatorname{tang} 2\omega$		8,984 8318
C. $\log \cos 2\omega$		0,002 0156
$\log \sin \psi$		9,785 2685
$\log \operatorname{tang} 2N$		9,462 1341
$2N =$		$16^0 9' 46'', 253$
$N =$		8 4 53,127
$N - n =$		3 9 17,219
$N + n =$		13 0 29,035
$\log \sin(N - n)$		8,740 6274
C. $\log \cos(N + n)$		0,011 2902
$\log \cot \frac{1}{2} \psi$		0,468 1829
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$		9,220 1005
$\frac{1}{2} v =$		$9^0 25' 29'', 97$
$v =$		18 50 59,94
(esse deberet		18 51 0)
$\log \sin(N + n)$		9,352 3527
C. $\log \cos(N - n)$		0,000 6587
$\log \cot \frac{1}{2} \psi$		0,468 1829
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v'$		9,821 1943
$\frac{1}{2} v' =$		$33^0 31' 29'', 93$
$v' =$		67 2 59,86
(esse deberet		67 3 0)

$\log e$		0,101 0184
$\log \tan 2N$		9,462 1341
$C. \log \cos 2n$		0,006 4539
		9,569 6064
numerus =		0,371 1986 3
$\log \text{hyp tang}(45^0 + N) =$		0,285 9125 1
Differentia =		0,085 2861 2
$\log$		8,930 8783
$\frac{3}{2} \log \alpha$		0,903 0928
$C. \log k$		1,764 4186
$\log T$		1,598 3897
$T =$		39,66338
$\log e$		0,101 0184
$\log \tan 2n$		9,239 7694
$C. \log \cos 2N$		0,017 5142
		9,358 3020
numerus =		0,228 1928 4
$\log \text{hyp tang}(45^0 + n) =$		0,172 8262 1
Differentia =		0,055 3666 3
$\log$		8,743 2480
$\frac{3}{2} \log \alpha$		0,903 0928
$C. \log k$		1,764 4186
$\log 2$		0,301 0300
$\log t$		1,711 7894
$t =$		51,49788

Distat itaque transitus per perihelium a tempore loco primo respondente 13,91444 diebus, a tempore loco secundo respondente 65,41232 diebus. — Ceterum differentias exiguas elementorum hic erutorum ab iis, secundum quae loco proposita calculata fuerant, tabularum praecisioni limitatae tribuere oportet.

In tractatu de relationibus maxime insignibus ad motum corporum coelestium in sectionibus conicis spectantibus silentio praeterire non possumus expressionem elegantem temporis per semiaxem maiorem, summam $r + r'$ atque chordam duo loca iungentem. Haec formula pro parabola quidem primo ab ill. EULER inventa esse videtur (Miscell. Berolin. T. VII p. 20), qui tamen eam in posterum neglexit, neque etiam ad ellipsin et hyperbolam extendit: errant itaque, qui formulam clar. LAMBERT tribuunt, etiamsi huic geometrae meritum, hanc expressionem oblivione sepultam proprio Marte eruisse et ad reliquas sectiones conicas ampliavisse, non possit denegari. Quamquam hoc argumentum a pluribus geometris iam tractatum sit, tamen lectores attenti expositionem sequentem haud superfluum agnoscent. A motu elliptico initium facimus.

Ante omnia observamus, angulum circa Solem descriptum $2f$ (art. 88, unde reliqua quoque signa desumimus) infra 360^0 supponi posse; patet enim, si iste angulus 360 gradibus augeatur, tempus una revolutione sive $\frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot 360^0}{k} = a^{\frac{3}{2}} \times 365,25$ diebus crescere. Iam si chordam per ρ denotamus, manifestum est fieri

$$\rho\rho = (r' \cos v' - r \cos v)^2 + (r' \sin v' - r \sin v)^2$$

adeoque per aequationes VIII, IX art. 8

$$\begin{aligned} \rho\rho &= aa(\cos E' - \cos E)^2 + aa \cos^2 \varphi (\sin E' - \sin E)^2 \\ &= 4aa \sin^2 g (\sin^2 G + \cos^2 \varphi \cos^2 G) \\ &= 4aa \sin^2 g (1 - ee \cos^2 G). \end{aligned}$$

Introducamus angulum auxiliarem h talem, ut sit $\cos h = e \cos G$; simul, quo omnis ambiguitas tollatur, supponemus, h accipi inter 0 et 180^0 , unde $\sin h$ erit quantitas positiva. Quoniam itaque etiam g inter eosdem limites iacet (si enim $2g$ ad 360^0 vel ultra ascenderet, motus circa Solem revolutionem integram attingeret vel superaret), ex aequatione praecedente sponte sequitur

$$\rho = 2a \sin g \sin h,$$

siquidem chorda tamquam quantitas positiva consideratur. Quum porro habeatur

$$r + r' = 2a(1 - e \cos g \cos G) = 2a(1 - \cos g \cos h),$$

patet, si statuatur $h - g = \delta$, $h + g = \epsilon$, fieri

$$1) \quad r + r' - \rho = 2a(1 - \cos \delta) = 4a \sin^2 \frac{1}{2} \delta$$

$$2) \quad r + r' + \rho = 2a(1 - \cos \epsilon) = 4a \sin^2 \frac{1}{2} \epsilon.$$

Denique habetur

$$kt = a^{\frac{3}{2}}(2g - 2e \sin g \cos G) = a^{\frac{3}{2}}(2g - 2 \sin g \cos h),$$

sive

$$3) \quad kt = a^{\frac{3}{2}}(\epsilon - \sin \epsilon - (\delta - \sin \delta)).$$

Determinari poterunt itaque, secundum aequationes 1, 2, anguli δ et ϵ ex $r + r'$, ρ et a : quamobrem ex iisdem quantitibus determinabitur, secundum aequationem 3, tempus t . Si magis placet, haec formula ita exhiberi potest:

$$kt = a^{\frac{3}{2}} \left\{ \begin{aligned} &\arccos \frac{2a - (r + r') - \rho}{2a} \\ &- \sin \arccos \frac{2a - (r + r') - \rho}{2a} \\ &- \arccos \frac{2a - (r + r') + \rho}{2a} \\ &+ \sin \arccos \frac{2a - (r + r') + \rho}{2a} \end{aligned} \right\}.$$

Sed in determinatione angulorum δ , ϵ per cosinus suos ambiguitas remanet, quam propius considerare oportet. Sponte quidem patet, δ iacere debere inter -180^0 et $+180^0$, atque ϵ inter 0 et 360^0 : sed sic quoque uterque angulus determinationem duplicem, adeoque tempus resultans quadruplicem admittere videtur. Attamen ex aequatione 5 art. 88 habemus

$$\cos f \cdot \sqrt{rr'} = a(\cos g - \cos h) = 2a \sin \frac{1}{2}\delta \sin \frac{1}{2}\epsilon :$$

iam $\sin \frac{1}{2}\epsilon$ necessario fit quantitas positiva, unde concludimus, $\cos f$ et $\sin \frac{1}{2}\delta$ necessario eodem signo affectos esse, adeoque δ inter 0 et 180^0 vel inter -180^0 et 0 accipiendum esse, prout $\cos f$ positivus fuerit vel negativus, i. e. prout motus heliocentricus $2f$ fuerit infra vel supra 180^0 . Ceterum sponte patet, pro $2f = 180^0$ necessario esse debere $\delta = 0$. Hoc itaque modo δ plene determinatus est. At determinatio anguli ϵ necessario ambigua manet, ita ut semper pro tempore *duo* valores prodeant, quorum quis verus sit, nisi aliunde constet, decidi nequit. Ceterum ratio huius phaenomeni facile perspicitur: constat enim, per duo puncta data describi posse *duas* ellipses diversas, quae ambae focum suum habeant in eodem puncto dato, simulque eundem semiaxem maiorem^{*)}; manifesto autem motus a loco primo ad secundum in his ellipsis temporibus inaequalibus absolvetur.

^{*)} Descripto e loco primo circulo radio $2a - r$, alioque radio $2a - r'$ e loco secundo, ellipses focum alterum in intersectione horum circulorum iacere patet. Quare quum generaliter loquendo duae semper dentur intersectiones, duae ellipses diversae prodibunt.

107.

Denotando per χ arcum quemcunque inter -180^0 et $+180^0$ situm, et per s sinum arcus $\frac{1}{2}\chi$, constat esse

$$\frac{1}{2}\chi = s + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1.3}{2.4}s^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6}s^7 + \text{etc.}$$

Porro fit

$$\frac{1}{2} \sin \chi = s\sqrt{1 - ss} = s - \frac{1}{2}s^3 - \frac{1.1}{2.4}s^5 - \frac{1.1.3}{2.4.6}s^7 - \text{etc.}$$

adeoque

$$\begin{aligned} \chi - \sin \chi = 4 \left(\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}s^5 \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \cdot \frac{1.3}{2.4}s^7 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6}s^9 + \text{etc.} \right). \end{aligned}$$

Substituimus in hac serie pro s deinceps $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r+r'-\rho}{a}}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r+r'+\rho}{a}}$, quaeque inde proveniunt multiplicamus per $a^{\frac{3}{2}}$; ita respective oriuntur series

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(r+r'-\rho)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{a}(r+r'-\rho)^{\frac{5}{2}} \\ + \frac{3}{1792} \cdot \frac{1}{aa}(r+r'-\rho)^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{18432} \cdot \frac{1}{a^3}(r+r'-\rho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc} \\ \frac{1}{6}(r+r'+\rho)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{a}(r+r'+\rho)^{\frac{5}{2}} \\ + \frac{3}{1792} \cdot \frac{1}{aa}(r+r'+\rho)^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{18432} \cdot \frac{1}{a^3}(r+r'+\rho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

quarum summas denotabimus per T , U . Iam nullo negotio patet, quum sit $2 \sin \frac{1}{2}\delta = \pm \sqrt{\frac{r+r'-\rho}{a}}$, signo superiori vel inferiori valente prout $2f$ infra vel supra 180^0 est, fieri $a^{\frac{3}{2}}(\delta - \sin \delta) = \pm T$, signo perinde determinato. Eodem modo si pro ϵ accipitur valor minor infra 180^0 situs, fiet $a^{\frac{3}{2}}(\epsilon - \sin \epsilon) = U$; accepto vero valore altero, qui est illius complementum ad 360^0 , manifesto fiet $a^{\frac{3}{2}}(\epsilon - \sin \epsilon) = a^{\frac{3}{2}}.360^0 - U$. Hinc itaque colliguntur duo valores pro tempore t :

$$\frac{U \mp T}{k} \quad \text{atque} \quad \frac{a^{\frac{3}{2}}.360^0}{k} - \frac{U \pm T}{k}.$$

108.

Si parabola tamquam ellipsis spectatur, cuius axis maior infinite magnus est, expressio temporis in art. praec. inventa transit in $\frac{1}{6k}\{(r+r'+\rho)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-\rho)^{\frac{3}{2}}\}$: sed quum haecce formulae deductio fortasse quibusdam dubiis exposita videri possit, aliam ab ellipsi haud pendentem exponemus.

Statuendo brevitatis caussa

$$\text{tang } \frac{1}{2}v = \theta, \quad \text{tang } \frac{1}{2}v' = \theta',$$

fit

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}p(1 + \theta\theta), & r' &= \frac{1}{2}p(1 + \theta'\theta'), \\ \cos v &= \frac{1 - \theta\theta}{1 + \theta\theta}, & \cos v' &= \frac{1 - \theta'\theta'}{1 + \theta'\theta'}, \\ \sin v &= \frac{2\theta}{1 + \theta\theta}, & \sin v' &= \frac{2\theta'}{1 + \theta'\theta'}. \end{aligned}$$

Hinc fit

$$\begin{aligned} r' \cos v' - r \cos v &= \frac{1}{2}p(\theta\theta - \theta'\theta') \\ r' \sin v' - r \sin v &= p(\theta' - \theta), \end{aligned}$$

adeoque

$$\rho\rho = \frac{1}{4}pp(\theta' - \theta)^2(4 + (\theta' + \theta)^2).$$

Iam facile perspicitur,

$$\theta' - \theta = \frac{\sin f}{\cos \frac{1}{2}v \cos \frac{1}{2}v'},$$

esse quantitatem positivam: statuendo itaque

$$\sqrt{(1 + \frac{1}{4}(\theta' + \theta)^2)} = \eta,$$

erit

$$\rho = p(\theta' - \theta)\eta.$$

Porro fit

$$r + r' = \frac{1}{2}p(2 + \theta\theta + \theta'\theta') = p(\eta\eta + \frac{1}{4}(\theta' - \theta)^2) :$$

quamobrem habetur

$$\frac{r + r' + \rho}{p} = (\eta + \frac{1}{2}(\theta' - \theta))^2$$

$$\frac{r + r' - \rho}{p} = (\eta - \frac{1}{2}(\theta' - \theta))^2.$$

Ex aequatione priori sponte deducitur

$$+\sqrt{\frac{r+r'+\rho}{p}} = \eta + \frac{1}{2}(\theta' - \theta),$$

quoniam η et $\theta' - \theta$ sunt quantitates positivae; sed quum $\frac{1}{2}(\theta' - \theta)$ minor sit vel maior quam η , prout

$$\eta\eta - \frac{1}{4}(\theta' - \theta)^2 = 1 + \theta\theta' = \frac{\cos f}{\cos \frac{1}{2}v \cos \frac{1}{2}v'}$$

positiva est vel negativa, patet, ex aequatione posteriori concludere oportere

$$\pm\sqrt{\frac{r+r'-\rho}{p}} = \eta - \frac{1}{2}(\theta' - \theta),$$

ubi signum superius vel inferius adoptandum est, prout angulus circa Solem descriptus infra 180^0 vel supra 180^0 fuerit.

Ex aequatione, quae in art. 98 secundam sequitur, porro habemus

$$\begin{aligned} \frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} &= (\theta' - \theta)(1 + \theta\theta' + \frac{1}{3}(\theta' - \theta)^2) \\ &= (\theta' - \theta)(\eta\eta + \frac{1}{12}(\theta' - \theta)^2) \\ &= \frac{1}{3}(\eta + \frac{1}{2}(\theta' - \theta))^3 - \frac{1}{3}(\eta - \frac{1}{2}(\theta' - \theta))^3, \end{aligned}$$

unde sponte sequitur

$$kt = \frac{1}{6}\{(r+r'+\rho)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-\rho)^{\frac{3}{2}}\}$$

[Handschriftliche Bemerkung:] η est cosecans anguli inter chordam et axem
 $\frac{1}{2}(\theta' + \theta)$ eiusdem cotangens

$\frac{r'-r}{\rho}$ eiusdem cosinus = $\cos \psi$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \sin \psi^2 \{r + r' + \sqrt{((r+r')^2 - \rho\rho)}\} \\ &= (r' + r) \frac{\rho\rho - (r' - r)^2}{\rho\rho} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho\rho}{(r' + r)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \frac{\rho^4}{(r' + r)^4} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

signo superiori vel inferiori valente, prout $2f$ infra vel supra 180^0 est.

109.

Si in hyperbola signa α , C , c in eadem significatione accipimus, ut in art. 99, habemus ex aequationibus VIII, IX art. 21

$$\begin{aligned} r' \cos v' - r \cos v &= -\frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c} \right) \left(C - \frac{1}{C} \right) \alpha \\ r' \sin v' - r \sin v &= \frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c} \right) \left(C + \frac{1}{C} \right) \alpha \sqrt{(ee - 1)}, \end{aligned}$$

adeoque

$$\rho = \frac{1}{2} \alpha \left(c - \frac{1}{c} \right) \sqrt{\left(ee \left(C + \frac{1}{C} \right)^2 - 4 \right)}.$$

Supponamus γ esse quantitatem per aequationem $\gamma + \frac{1}{\gamma} = e \left(C + \frac{1}{C} \right)$ determinatam: cui quum manifesto *duo* valores sibi invicem reciproci satisfaciant, adoptamus eum qui est maior quam 1. Ita fit

$$\rho = \frac{1}{2} \alpha \left(c - \frac{1}{c} \right) \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right).$$

Porro fit

$$\begin{aligned} r + r' &= \frac{1}{2} \alpha \left(e \left(c + \frac{1}{c} \right) \left(C + \frac{1}{C} \right) - 4 \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \left(\left(c + \frac{1}{c} \right) \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) - 4 \right), \end{aligned}$$

[Handschriftliche Bemerkung:] Tempus medium inter duo loca parabolica exhibetur per formulam

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2k\sqrt{18}} \left\{ - \left(\frac{r' - r}{\sqrt{\frac{r' + r + \rho}{2}} \mp \sqrt{\frac{r' + r - \rho}{2}}} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(r'r' - rr)}{\sqrt{\frac{r' + r + \rho}{2}} \mp \sqrt{\frac{r' + r - \rho}{2}}} \right\} \\ &= -\frac{1}{3k} \left(\frac{r' - r}{\sqrt{(r' + r + \rho)} \mp \sqrt{(r' + r - \rho)}} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{2k} \frac{r'r' - rr}{\sqrt{(r' + r + \rho)} \mp \sqrt{(r' + r - \rho)}}. \end{aligned}$$

$$\text{Distantia in perihelio} = \frac{\rho \rho - (r' - r)^2}{4\{r' + r \mp \sqrt{(r' + r)^2 - \rho \rho}\}}.$$

adeoque

$$r + r' + \rho = \alpha \left(\sqrt{c\gamma} - \sqrt{\frac{1}{c\gamma}} \right)^2$$

$$r + r' - \rho = \alpha \left(\sqrt{\frac{\gamma}{c}} - \sqrt{\frac{c}{\gamma}} \right)^2.$$

Statuendo itaque

$$\sqrt{\frac{r + r' + \rho}{4\alpha}} = m, \quad \sqrt{\frac{r + r' - \rho}{4\alpha}} = n,$$

erit necessario $\sqrt{c\gamma} - \sqrt{\frac{1}{c\gamma}} = 2m$; ad decidendam vero quaestionem, utrum $\sqrt{\frac{\gamma}{c}} - \sqrt{\frac{c}{\gamma}}$ fiat $= +2n$ an $= -2n$, inquirere oportet, utrum γ maior an minor sit quam c : sed ex aequatione 8 art. 99 facile sequitur, casum priorem locum habere, quoties $2f$ sit infra 180^0 , posteriorem, quoties $2f$ sit supra 180^0 . Denique ex eodem art. habemus

$$\begin{aligned} \frac{kt}{\alpha^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \left(c - \frac{1}{c} \right) - 2 \log c \\ &= \frac{1}{2} \left(c\gamma - \frac{1}{c\gamma} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{c} - \frac{c}{\gamma} \right) - \log c\gamma + \log \frac{\gamma}{c} \\ &= 2m\sqrt{(1 + mm)} \mp 2n\sqrt{(1 + nn)} \\ &\quad - 2 \log(\sqrt{(1 + mm)} + m) \pm 2 \log(\sqrt{(1 + nn)} + n) \end{aligned}$$

signis inferioribus semper ad casum $2f > 180^0$ spectantibus. Iam

$$\log(\sqrt{(1 + mm)} + m)$$

facile evolvitur in seriem sequentem

$$m - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^5 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^7 + \text{etc.}$$

Hoc sponte colligitur ex $d \log(\sqrt{(1 + mm)} + m) = \frac{dm}{\sqrt{(1 + mm)}}$. Prodit itaque

$$\begin{aligned} &2m\sqrt{(1 + mm)} - 2 \log(\sqrt{(1 + mm)} + m) \\ &= 4 \left(\frac{1}{3} m^3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} m^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^7 - \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

et perinde formula alia prorsus similis, si m cum n permutatur. Hinc tandem colligitur, si statuatur

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{6}(r + r' - \rho)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{\alpha}(r + r' - \rho)^{\frac{5}{2}} \\
 &\quad + \frac{3}{1792} \cdot \frac{1}{\alpha\alpha}(r + r' - \rho)^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{18432} \cdot \frac{1}{\alpha^3}(r + r' - \rho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.} \\
 U &= \frac{1}{6}(r + r' + \rho)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{\alpha}(r + r' + \rho)^{\frac{5}{2}} \\
 &\quad + \frac{3}{1792} \cdot \frac{1}{\alpha\alpha}(r + r' + \rho)^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{18432} \cdot \frac{1}{\alpha^3}(r + r' + \rho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.},
 \end{aligned}$$

feri $kt = U \mp T$, quae expressiones cum iis, quae in art. 107 traditae sunt, omnino coincidunt, si illic a in $-\alpha$ mutetur.

Ceterum hae series tum pro ellipsi tum pro hyperbola ad usum practicum tunc imprimis sunt commodae, ubi a vel α valorem permagnum obtinet, i. e. ubi sectio conica magnopere ad parabolae similitudinem vergit. In tali casu etiam ad solutionem problematis supra tractati (artt. 85—105) adhiberi possent: sed quoniam, nostro iudicio, ne tunc quidem brevitatem solutionis supra traditae praebent, huic methodo fusius exponendae non immoramur.

SECTIO QUARTA.

Relationes inter locos plures in spatio.

110.

Relationes in hac Sectione considerandae ab orbitae indole independentes solique suppositioni innixae erunt, omnia orbitae puncta in eodem plano cum Sole iacere. Placuit autem, hic quasdam simplicissimas tantum attingere, aliasque magis complicatas et speciales ad Librum alterum nobis reservare.

Situs plani orbitae per duos locos corporis coelestis in spatio plene determinatus est, siquidem hi loci non iacent in eadem recta cum Sole. Quare quum duobus potissimum modis locus puncti in spatio assignari possit, duo hinc problemata solvenda se offerunt.

Supponemus primo, duos locos dari per longitudes et latitudes heliocentricas resp. per λ , λ' , β , β' designandas: distantiae a Sole in calculum non ingredientur. Tunc si longitudo nodi ascendentis per Ω , inclinatio orbitae ad eclipticam per i denotatur, erit

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \beta &= \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega) \\ \operatorname{tang} \beta' &= \operatorname{tang} i \sin(\lambda' - \Omega).\end{aligned}$$

Determinatio incognitarum Ω , $\operatorname{tang} i$ hic ad problema in art. 78, II consideratum refertur; habemus itaque, ad normam solutionis primae

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega) &= \operatorname{tang} \beta \\ \operatorname{tang} i \cos(\lambda - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang} \beta' - \operatorname{tang} \beta \cos(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda' - \lambda)};\end{aligned}$$

ad normam solutionis tertiae autem invenimus Ω per aequationem

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda' - \Omega\right) = \frac{\sin(\beta' + \beta) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}{\sin(\beta' - \beta)}$$

utique aliquanto commodius, si anguli β , β' immediate dantur, neque vero per logarithmos tangentium: sed ad determinandum i , recurrendum erit ad aliquam formularum

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin(\lambda - \Omega)} = \frac{\operatorname{tang} \beta'}{\sin(\lambda' - \Omega)}.$$

Ceterum ambiguitas in determinatione anguli $\lambda - \Omega$, vel $\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda' - \Omega$ per tangentem suam ita erit decidenda, ut $\operatorname{tang} i$ positiva evadat vel negativa, prout motus ad eclipticam proiectus directus est vel retrogradus: hanc incertitudinem itaque tunc tantum tollere licet, ubi constat, a quam parte corpus

coeleste a loco primo ad secundum pervenerit; quod si ignoraretur, utique impossibile esset, nodum ascendentem a descendente distinguere.

Postquam anguli Ω , i inventi sunt, eruentur argumenta latitudinum u' , u per formulas

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang}(\lambda - \Omega)}{\cos i}, \quad \operatorname{tang} u' = \frac{\operatorname{tang}(\lambda' - \Omega)}{\cos i},$$

quae in semicirculo primo vel secundo accipienda sunt, prout latitudines respondententes boreales sunt vel australes. His formulis adhuc sequentes adiicimus, e quibus, si placet, una vel altera ad calculum confirmandum in usum vocari poterit:

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos \beta \cos(\lambda - \Omega), & \cos u' &= \cos \beta' \cos(\lambda' - \Omega), \\ \sin u &= \frac{\sin \beta}{\sin i}, & \sin u' &= \frac{\sin \beta'}{\sin i}, \\ \sin(u' + u) &= \frac{\sin(\lambda + \lambda' - 2\Omega) \cos \beta \cos \beta'}{\cos i}, \\ \sin(u' - u) &= \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos \beta \cos \beta'}{\cos i}. \end{aligned}$$

111.

Supponamus secundo, duos locos dari per distantias suas a tribus planis in Sole sub angulis rectis se secantibus; designemus has distantias pro loco primo per x , y , z , pro secundo per x' , y' , z' , supponamusque planum tertium esse ipsam eclipticam, plani primi et secundi autem polos positivos in longitudine N et $90^0 + N$ sitos esse. Ita erit per art. 53, duobus radiis vectoribus per r , r' designatis,

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos(N - \Omega) + r \sin u \sin(N - \Omega) \cos i \\ y &= r \sin u \cos(N - \Omega) \cos i - r \cos u \sin(N - \Omega) \\ z &= r \sin u \sin i \\ x' &= r' \cos u' \cos(N - \Omega) + r' \sin u' \sin(N - \Omega) \cos i \\ y' &= r' \sin u' \cos(N - \Omega) \cos i - r' \cos u' \sin(N - \Omega) \\ z' &= r' \sin u' \sin i. \end{aligned}$$

Hinc sequitur

$$\begin{aligned} zy' - yz' &= rr' \sin(u' - u) \sin(N - \Omega) \sin i \\ xz' - zx' &= rr' \sin(u' - u) \cos(N - \Omega) \sin i \\ xy' - yx' &= rr' \sin(u' - u) \cos i. \end{aligned}$$

E combinatione formulae primae cum secunda habebitur $N - \Omega$ atque $rr' \sin(u' - u) \sin i$, hinc et ex formula tertia prodibit i atque $rr' \sin(u' - u)$.

Quatenus locus, cui coordinatae x' , y' , z' respondent, tempore posterior supponitur, u' maior quam u fieri debet: quodsi itaque insuper constat, utrum angulus inter locum primum et secundum circa Solem descriptus duobus rectis minor an maior sit, $rr' \sin(u' - u) \sin i$ atque $rr' \sin(u' - u)$ esse debent quantitates positivae in casu primo, negativae in secundo: tunc itaque $N - \Omega$ sine ambiguitate determinatur, simulque ex signo quantitatis $xy' - yx'$ deciditur, utrum motus directus sit, an retrogradus. Vice versa, si de motus directione constat, e signo quantitatis $xy' - yx'$ decidere licebit, utrum $u' - u$ minor an maior quam 180° accipiendus sit. Sin vero tum motus directio, tum indoles anguli circa Solem descripti plane incognitae sunt, manifestum est, inter nodum ascendentem ac descendentem distinguere non licere.

Ceterum facile perspicitur, sicuti $\cos i$ est cosinus inclinationis plani orbitae versus planum tertium, ita $\sin(N - \Omega) \sin i$, $\cos(N - \Omega) \sin i$ esse resp. cosinus inclinationum plani orbitae versus planum primum et secundum; nec non exprimere $rr' \sin(u' - u)$ duplam aream trianguli inter duos radios vectores inclusi, atque $zy' - yz'$, $xz' - zx'$, $xy' - yx'$ duplam aream projectionum eiusdem trianguli ad singula plana.

Denique patet, planum tertium pro ecliptica quodvis aliud planum esse posse, si modo omnes magnitudines per relationes suas ad eclipticam definitae perinde ad planum tertium, quidquid sit, referantur.

112.

Sint x'' , y'' , z'' coordinatae alicuius loci tertii, atque u'' eius argumentum latitudinis, r'' radius vector. Designabimus quantitates

$$r'r'' \sin(u'' - u'), \quad rr'' \sin(u'' - u), \quad rr' \sin(u' - u),$$

quae sunt areae duplae triangulorum inter radium vectorem secundum et tertium, primum et tertium, primum et secundum, resp. per n , n' , n'' . Habebuntur itaque pro x'' , y'' , z'' expressiones iis similes, quas in art. praec. pro x , y , z et x' , y' , z' tradidimus, unde adiumento lemmatis I art. 78 facile deducuntur aequationes sequentes:

$$\begin{aligned} 0 &= nx - n'x' + n''x'' \\ 0 &= ny - n'y' + n''y'' \\ 0 &= nz - n'z' + n''z''. \end{aligned}$$

Sint iam longitudines geocentricae corporis coelestis tribus illis locis respondentes α , α' , α'' ; latitudines geocentricae β , β' , β'' ; distantiae a terra ad eclipticam proiectae δ , δ' , δ'' ; porro respondentibus longitudines heliocentricae

terrae L, L', L'' ; latitudines B, B', B'' , quas non statuimus $= 0$, ut liceat, tum parallaxis rationem habere, tum, si placet, pro ecliptica quodvis aliud planum adoptare; denique D, D', D'' distantiae terrae a Sole ad eclipticam proiectae. Quodsi tunc x, y, z per $L, B, D, \alpha, \beta, \delta$ exprimuntur, similiterque coordinatae ad locum secundum et tertium spectantes, aequationes praecedentes sequentem formam induunt:

$$\begin{aligned} 1) \quad 0 &= n(\delta \cos \alpha + D \cos L) - n'(\delta' \cos \alpha' + D' \cos L') \\ &\quad + n''(\delta'' \cos \alpha'' + D'' \cos L'') \\ 2) \quad 0 &= n(\delta \sin \alpha + D \sin L) - n'(\delta' \sin \alpha' + D' \sin L') \\ &\quad + n''(\delta'' \sin \alpha'' + D'' \sin L'') \\ 3) \quad 0 &= n(\delta \tan \beta + D \tan B) - n'(\delta' \tan \beta' + D' \tan B') \\ &\quad + n''(\delta'' \tan \beta'' + D'' \tan B''). \end{aligned}$$

Si hic α, β, D, L, B , quantitatesque analogae pro duobus reliquis locis, tamquam cognitae spectantur, aequationesque per n , vel per n' , vel per n'' dividuntur, quinque incognitae remanent, e quibus itaque duas eliminare, sive per duas quascunque tres reliquas determinare licet. Hoc modo illae tres aequationes ad conclusiones plurimas gravissimas viam sternunt, e quibus quasdam imprimis insignes hic evolvemus.

113.

Ne formularum prolixitate nimis obruamur, sequentibus abbreviationibus uti placet. Primo designamus quantitatem

$$\tan \beta \sin(\alpha'' - \alpha') + \tan \beta' \sin(\alpha - \alpha'') + \tan \beta'' \sin(\alpha' - \alpha)$$

per (0.1.2): si in expressione illa pro longitudine et latitudine loco cuivis geocentrico respondentibus substituuntur longitudo et latitudo cuilibet trium locorum heliocentricorum terrae respondentes, in signo (0.1.2) numerum illi respondentem cum numero romano eo commutamus, qui posteriori respondet. Ita e. g. character (0.1.I) exprimet quantitatem

$$\tan \beta \sin(L' - \alpha') + \tan \beta' \sin(\alpha - L') + \tan B' \sin(\alpha' - \alpha)$$

nec non character (0.O.2) hanc

$$\tan \beta \sin(\alpha'' - L) + \tan B \sin(\alpha - \alpha'') + \tan \beta'' \sin(L - \alpha).$$

Simili modo characterem mutamus, si in expressione prima pro *duabus* longitudinibus et latitudinibus geocentricis duae quaecunque heliocentricae terrae substituuntur. Si duae longitudes et latitudes in eandem expressionem

ingredientes tantummodo inter se permutantur, etiam in caractere numeros respondentes permutare oportet: hinc autem valor ipse non mutatur, sed tantummodo e positivo negativus, e negativo positivus evadit. Ita e. g. fit $(0.1.2) = -(0.2.1) = (1.2.0) = -(1.0.2) = (2.0.1) = -(2.1.0)$. Omnes itaque quantitates hoc modo oriundae ad sequentes 19 reducuntur

$$\begin{aligned} &(0.1.2) \\ &(0.1.O), (0.1.I), (0.1.II), \\ &(0.O.2), (0.I.2), (0.II.2), \\ &(O.1.2), (I.1.2), (II.1.2) \\ &(O.O.I), (O.O.II), (O.I.II), \\ &(1.O.I), (1.O.II), (1.I.II), \\ &(2.O.I), (2.O.II), (2.I.II), \end{aligned}$$

quibus accedit vigesima (O.I.II).

Ceterum facile demonstratur, singulas has expressiones, per productum e tribus cosinibus latitudinum ipsas ingredientium multiplicatas, aequales fieri volumini sextuplo pyramidis, cuius vertex est in Sole, basis vero triangulum formatum inter tria sphaerae coelestis puncta, quae locis expressionem illam ingredientibus respondent, statuto sphaerae radio = 1. Quoties itaque hi tres loci in eodem circulo maximo iacent, valor expressionis fieri debet = 0; quod quum in tribus locis heliocentricis terrae semper locum habeat, quoties ad parallaxes et latitudines terrae a perturbationibus ortas non respicimus, i. e. quoties terram in ipso eclipticae plano constituimus, semper, hacce suppositione valente, erit $(O.I.II) = 0$, quae quidem aequatio identica est, si pro plano tertio ecliptica ipsa accepta fuit. Ceterum quoties tum B , tum B' , tum $B'' = 0$, omnes istae expressiones, prima excepta, multo simpliciores fiunt; singulae scilicet a secunda usque ad decimam binis partibus conflatae erunt, ab undecima autem usque ad undevigesimam unico termino constabunt.

114.

Multiplicando aequationem 1 per $\sin \alpha'' \tan B'' - \sin L'' \tan \beta''$, aequationem 2 per $\cos L'' \tan \beta'' - \cos \alpha'' \tan B''$, aequationem 3 per $\sin(L'' - \alpha'')$, addendoque producta, prodit

$$\begin{aligned} 0 = &n\{(0.2.II)\delta + (O.2.II)D\} \\ &- n'\{(1.2.II)\delta' + (I.2.II)D'\} \end{aligned} \quad 4)$$

similique modo, vel commodius per solam locorum inter se permutationem

$$\begin{aligned} 0 = &n\{(0.1.I)\delta + (O.1.I)D\} \\ &+ n''\{(2.1.I)\delta'' + (II.1.I)D''\} \end{aligned} \quad 5)$$

$$\begin{aligned}
 0 &= n'\{(1.0.O)\delta' + (I.0.O)D'\} \\
 &\quad - n''\{(2.0.O)\delta'' + (II.0.O)D''\}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Quodsi itaque ratio quantitatum n , n' data est, adiumento aequationis 4 ex δ determinare licebit δ' , vel δ ex δ' ; similiterque de aequationibus 5, 6. E combinatione aequationum 4, 5, 6 oritur haec

$$\begin{aligned}
 &\frac{(0.2.II)\delta + (O.2.II)D}{(0.1.I)\delta + (O.1.I)D} \\
 &\quad \times \frac{(1.0.O)\delta' + (I.0.O)D'}{(1.2.II)\delta' + (I.2.II)D'} \\
 &\quad \times \frac{(2.1.I)\delta'' + (II.1.I)D''}{(2.0.O)\delta'' + (II.0.O)D''} = -1,
 \end{aligned} \tag{7}$$

per quam e duabus distantiiis corporis coelestis a terra determinare licet tertiam. Ostendi potest autem, hanc aequationem 7 fieri identicam, adeoque ad determinationem unius distantiae e duabus reliquis ineptam, quoties fuerit $B = B' = B'' = 0$ atque

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{tang } \beta' \text{ tang } \beta'' \sin(L - \alpha) \sin(L'' - L') \\
 &+ \text{tang } \beta'' \text{ tang } \beta \sin(L' - \alpha') \sin(L - L'') \\
 &+ \text{tang } \beta \text{ tang } \beta' \sin(L'' - \alpha'') \sin(L' - L)
 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Ab hoc incommodo libera est formula sequens, ex aequationibus 1, 2, 3 facile demanans:

$$\begin{aligned}
 &(0.1.2)\delta\delta'\delta'' + (O.1.2)D\delta'\delta'' \\
 &+ (0.I.2)D'\delta\delta'' + (0.1.II)D''\delta\delta' \\
 &+ (0.I.II)D'D''\delta + (O.1.II)DD''\delta' \\
 &+ (O.I.2)DD'\delta'' + (O.I.II)DD'D'' = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Multiplicando aequationem 1 per $\sin \alpha' \text{ tang } \beta'' - \sin \alpha'' \text{ tang } \beta'$, aequationem 2 per $\cos \alpha'' \text{ tang } \beta' - \cos \alpha' \text{ tang } \beta''$, aequationem 3 per $\sin(\alpha'' - \alpha')$, addendoque producta, prodit

$$\begin{aligned}
 0 &= n\{(0.1.2)\delta + (O.1.2)D\} \\
 &\quad - n'(I.1.2)D' + n''(II.1.2)D''
 \end{aligned} \tag{9}$$

et perinde

$$\begin{aligned}
 0 &= n(0.O.2)D - n'\{(0.1.2)\delta' + (0.I.2)D'\} \\
 &\quad + n''(0.II.2)D''
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= n(0.1.O)D - n'(0.1.I)D' \\
 &\quad + n''\{(0.1.2)\delta'' + (0.1.II)D''\}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Adiumento harum aequationum e ratione inter quantitates n, n', n'' cognita eruere licebit distantias $\delta, \delta', \delta''$. Sed haecce conclusio generaliter tantum loquendo valet, exceptionemque patitur, quoties fit $(0.1.2) = 0$. Ostendi enim potest, in hocce casu ex aequationibus 9, 10, 11 nihil aliud sequi, nisi relationem necessariam inter quantitates n, n', n'' , et quidem e singulis tribus eandem. Restrictiones analogae circa aequationes 4, 5, 6 lectori perito sponte se offerent.

Ceterum omnes conclusiones hic evolutae nullius sunt usus, quoties planum orbitae cum ecliptica coincidit. Si enim $\beta, \beta', \beta'', B, B', B''$ omnes sunt $= 0$, aequatio 3 *identica* est, ac proin omnes quoque sequentes.

LIBER SECUNDUS.

INVESTIGATIO ORBITARUM CORPORUM COELESTIUM EX
OBSERVATIONIBUS GEOCENTRICIS.—
SECTIO PRIMA.*Determinatio orbitae e tribus observationibus completis.*

115.

Ad determinationem completam motus corporis coelestis in orbita sua requiruntur elementa *septem*, quorum autem numerus uno minor evadit, si corporis massa vel cognita est vel negligitur; haec licentia vix evitari poterit in determinatione orbitae penitus adhuc incognitae, ubi omnes quantitates ordinis perturbationum tantisper seponere oportet, donec massae a quibus pendent aliunde innotuerint. Quamobrem in disquisitione praesente massa corporis neglecta elementorum numerum ad sex reducimus, patetque adeo, ad determinationem orbitae incognitae totidem quantitates ab elementis pendentes ab invicem vero independentes requiri. Quae quantitates nequeunt esse nisi loca corporis coelestis e terra observata, quae singula quum bina data subministrent, puta longitudinem et latitudinem, vel ascensionem rectam et declinationem, simplicissimum utique erit, *tria loca geocentrica* adoptare, quae generaliter loquendo sex elementis incognitis determinandis sufficient. Hoc problema tamquam gravissimum huius operis spectandum erit, summaque ideo cura in hac Sectione pertractabitur.

Verum enim vero in casu speciali, ubi planum orbitae cum ecliptica coincidit adeoque omnes latitudines tum heliocentricae tum geocentricae natura sua evanescent, tres latitudines geocentricas evanescentes haud amplius considerare licet tamquam tria data ab invicem independentia: tunc igitur problema istud indeterminatum maneret, tribusque locis geocentricis per orbitas infinite multas satisfieri posset. In tali itaque casu necessario quatuor longitudes geocentricas datas esse oportet, ut quatuor elementa incognita reliqua (exclidentibus inclinatione orbitae et longitudine nodi) determinare liceat. Etiam si vero per principium indiscernibilium haud exspectandum sit, talem casum in rerum natura unquam se oblaturum esse, tamen facile praesumitur, problema, quod in orbita cum plano eclipticae omnino coincidente absolute indeterminatum fit, *in orbitis perparum ad eclipticam inclinatis* propter observationum praecisionem limitatam tantum non indeterminatum manere debere, ubi vel levissimi observationum errores incognitarum determinationem penitus turbare valent. Quamobrem ut huic quoque casui consulamus, alia sex data eligere oportebit: ad quem finem in Sectione secunda orbitam incognitam e quatuor

observationibus determinare docebimus, quarum duae quidem completae sint, duae reliquae autem incompletae, latitudinibus vel declinationibus deficientibus.

Denique quum omnes observationes nostrae propter instrumentorum sensuumque imperfectionem non sint nisi approximationes ad veritatem, orbita, sex tantum datis absolute necessariis superstructa, erroribus considerabilibus adhuc obnoxia esse poterit. Quos ut quantum quidem licet extenuemus, summamque adeo praecisionem possibilem attingamus, via alia non dabitur, nisi ut observationes perfectissimas quam plurimas congeramus, elementaque ita perpoliamus, ut non quidem his vel illis praecisione absoluta satisfaciant, sed cum cunctis quam optime conspirent. Quonam pacto talem consensum, si nullibi absolutum tamen ubique quam arctissimum, secundum principia calculi probabilitatis obtinere liceat, in Sectione tertia ostendemus.

Hoc itaque modo determinatio orbitarum, quatenus corpora coelestia secundum leges KEPLERI in ipsis moventur, ad omnem quae desiderari potest perfectionem evecta erit. Ultimam quidem expolitionem tunc demum suscipere licebit, ubi etiam perturbationes, quas planetae reliqui motui inducunt, ad calculum erunt revocatae: quarum rationem quomodo habere oporteat, quantum quidem ad institutum nostrum pertinere videbitur, in Sectione quarta breviter indicabimus.

116.

Antequam determinatio alicuius orbitae ex observationibus geocentricis suscipitur, his quaedam reductiones applicandae erunt, propter nutationem, praecessionem, parallaxin et aberrationem, siquidem summa praecisio requiritur: in crassiori enim calculo has minutias negligere licebit.

Planetarum et cometarum observationes vulgo expressae proferuntur per ascensiones rectas et declinationes apparentes, i. e. ad situm aequatoris apparentem relatas. Qui situs quum propter nutationem et praecessionem variabilis adeoque pro diversis observationibus diversus sit, ante omnia loco plani variabilis planum aliquod fixum introducere conveniet, ad quem finem vel aequator situ suo medio pro aliqua epocha, vel ecliptica adoptari poterit: planum posterius plerumque adhiberi solet, sed prius quoque commodis peculiaribus haud spernendis se commendat.

Quoties itaque planum aequatoris eligere placuit, ante omnia observationes a nutatione purgandae, ac dein adhibita praecessione ad epocham quandam arbitrariam reducendae sunt: haec operatio prorsus convenit cum ea, per quam e loco stellae fixae observato eiusdem positio media pro epocha data derivatur, adeoque explicatione hic non indiget. Sin vero planum eclipticae adoptare constitutum est, duplex methodus patebit: scilicet vel ex ascensionibus rectis et declinationibus ob nutationem et praecessionem correctis deduci

poterunt longitudes et latitudes adiumento obliquitatis mediae, unde longitudes iam ad aequinoctium medium relatae prodibunt; vel commodius ex ascensionibus rectis et declinationibus apparentibus adiumento obliquitatis apparentis computabuntur longitudes et latitudes, ac dein illae a nutatione et praecessione purgabuntur.

Loci terrae singulis observationibus respondentes per tabulas Solares computantur, manifesto autem ad idem planum referendi erunt, ad quod observationes corporis coelestis relatae sunt. Quamobrem in computo longitudinis Solis negligetur nutatio; dein vero haec longitudo adhibita praecessione ad epocham fixam reducetur, atque 180 gradibus augebitur; latitudini Solis, siquidem eius rationem habere operae pretium videtur, signum oppositum tribuetur: sic positio terrae heliocentrica habebitur, quam, si aequator pro plano fundamentalis electus est, adiumento obliquitatis mediae in ascensionem rectam et declinationem transformare licebit.

117.

Positio terrae hoc modo e tabulis computata ad terrae centrum referenda est, locus observatus autem corporis coelestis ad punctum in terrae superficie spectat: huic dissensui tribus modis remedium afferre licet. Potest scilicet vel observatio ad centrum terrae reduci, sive a parallaxi liberari; vel locus heliocentricus terrae ad locum ipsum observationis reduci, quod efficitur, si loco Solis e tabulis computato parallaxis rite applicatur; vel denique utraque positio ad punctum aliquod tertium transferri, quod commodissime in intersectione radii visus cum plano eclipticae assumitur: observatio ipsa tunc immutata manet, reductionemque loci terrae ad hoc punctum in art. 72 docuimus. Methodus prima adhiberi nequit, nisi corporis coelestis distantia a terra proxime saltem nota fuerit: tunc autem satis commoda est, praesertim quoties observatio in ipso meridiano instituta est, ubi sola declinatio parallaxi afficitur. Ceterum praestabit, hanc reductionem loco observato immediate applicare, antequam transformationes art. praec. adeantur. Si vero distantia a terra penitus adhuc incognita est, ad methodum secundam vel tertiam confugiendum est, et quidem illa in usum vocabitur, quoties aequator pro plano fundamentalis accipitur, tertia autem praefereatur, quoties omnes positiones ad eclipticam referre placuit.

118.

Si corporis coelestis distantia a terra alicui observationi respondens proxime iam nota est, hanc ab effectu *aberrationis* liberare licet pluribus modis, qui methodis diversis in art. 71 traditis innituntur. Sit t tempus verum observationis; θ intervallum temporis, intra quod lumen a corpore coelesti ad terram

descendit, quod prodit ducendo 493^s in distantiam; l locus observatus, l' idem locus adiumento motus geocentrici diurni ad tempus $t + \theta$ reductus; l'' locus l ab ea aberrationis parte purgatus, quae planetis cum fixis communis est; L locus terrae verus tempori t respondens (i. e. tabularis $20'', 25$ auctus): denique $'L$ locus terrae verus tempori $t - \theta$ respondens. His ita factis erit

I. l locus verus corporis coelestis ex $'L$ visus tempore $t - \theta$

II. l' locus verus corporis coelestis ex L visus tempore t

III. l'' locus verus corporis coelestis ex L visus tempore $t - \theta$.

Per methodum I itaque locus observatus immutatus retinetur, pro tempore vero autem fictum $t - \theta$ substituitur, loco terrae pro eodem computato; methodus II soli observationi mutationem applicat, quae autem praeter distantiam insuper motum diurnum requirit; in methodo III observatio correctionem patitur a distantia non pendentem, pro tempore vero fictum $t - \theta$ substituitur, sed retento loco terrae tempori vero respondente. Ex his methodis prima longe commodissima est, quoties distantia eatenus iam nota est, ut reductio temporis θ praecisione sufficiente computari possit.

Quodsi autem haec distantia penitus adhuc incognita est, nulla harum methodorum immediate applicari potest: in prima scilicet habetur quidem corporis coelestis locus geocentricus, sed desideratur tempus et positio terrae a distantia incognita pendentia; in secunda e contrario adsunt haec, deest ille; denique in tertia habetur locus geocentricus corporis coelestis atque positio terrae, sed tempus deest cum illis datis iungendum.

Quid faciendum est itaque in problemate nostro, si in tali casu solutio respectu aberrationis quoque exacta postulatur? Simplicissimum utique est, orbitam primo neglecta aberratione determinare, quae quum effectum considerabilem nunquam producere possit, distantiae hinc ea certe praecisione demanabunt, ut iam observationes per aliquam methodorum modo expositarum ab aberratione purgare, orbitaeque determinationem accuratius iterare liceat. Iam in hocce negotio methodus tertia ceteris longe praeferenda erit: in methodo enim prima omnes operationes a positione terrae pendentes ab ovo rursus inchoandae sunt: in secunda (quae ne applicabilis quidem est, nisi tanta observationum copia adsit, ut motus diurnus inde elici possit) omnes operationes a loco geocentrico corporis coelestis pendentes denuo instituere oportet: contra in tertia (siquidem iam calculus primus superstructus fuerat locis geocentricis ab aberratione fixarum purgatis) omnes operationes praeliminares a positione terrae et loco geocentrico corporis coelestis pendentes in computo novo invariatae retineri poterunt. Quin adeo hoc modo primo statim calculo aberrationem complecti licebit, si methodus ad determinationem orbitae adhibita ita comparata est, ut valores distantiarum prodeant prius, quam tempora correcta in calculum introducere opus fuerit. Tunc aberrationis quidem caussa calculus duplex haud necessarius erit, uti in tractatione ampliori problematis nostri clarius apparebit.

119.

Haud difficile esset, e nexu inter problematis nostri data atque incognitas, eius statum ad sex aequationes reducere, vel adeo ad pauciores, quum unam alteramve incognitam satis commode eliminare liceret; sed quoniam nexus ille complicatissimus est, hae aequationes maxime intractabiles evaderent; incognitarum separatio talis, ut tandem aequatio unicam tantummodo continens prodeat, generaliter loquendo^{*)} pro impossibili haberi potest, multoque adeo minus problematis solutionem integram per solas operationes directas absolute licebit.

Sed ad *duarum* aequationum solutionem $X = 0$, $Y = 0$, in quibus duae tantum incognitae x , y intermixtae remanserunt, utique reducere licet problema nostrum, et quidem variis modis. Haud equidem necesse est, ut x , y sint duo ex elementis ipsis: esse poterunt quantitates qualicunque modo cum elementis connexae, si modo illis inventis elementa inde commode derivare licet. Praeterea manifesto haud opus est, ut X , Y per functiones explicitas ipsarum x , y exhibeantur: sufficit, si cum illis per systema aequationum ita iunctae sunt, ut a valoribus datis ipsarum x , y ad valores respondententes ipsarum X , Y descendere in potestate sit.

120.

Quoniam itaque problematis natura reductionem ulteriorem non permittit, quam ad duas aequationes, duas incognitas mixtim implicantes, rei summa primo quidem in idonea harum incognitarum *electione* aequationumque *adoratione* versabitur, ut tum X et Y quam simplicissime ab x , y pendeant, tum ex harum valoribus inventis elementa ipsa quam commodissime demanent: dein vero circumspiciendum erit, quo pacto incognitarum valores aequationibus satisfaciendes per operationes non nimis operosas eruere liceat. Quod si coecis quasi tentaminibus tantum efficiendum esset, ingens sane ac vix tolerandus labor requireretur, qualem fere nihilominus saepius susceperunt astronomi, qui cometarum orbitas per methodum quam indirectam vocant determinaverunt: magnopere utique in tali negotio labor sublevatur eo, quod in tentaminibus primis calculi crassiores sufficiunt, donec ad valores approximatos incognitarum perventum fuerit. Quamprimum vero determinatio approximata iam habetur, rem tutis semper expeditisque methodis ad finem perducere licebit, quas antequam ulterius progrediamur hic explicavisse iuvabit.

Aequationibus $X = 0$, $Y = 0$, si pro x , y valores veri ipsi accipiuntur, ex asse sponte satisfiet: contra si pro x , y valores a veris diversi substituuntur,

^{*)}Quoties observationes ab invicem tam parum remotae sunt, ut temporum intervalla tamquam quantitates infinite parvas tractare liceat, huiusmodi separatio utique succedit, totumque problema ad solutionem aequationis algebraicae septimi octavive gradus reducitur.

X et Y inde valores a 0 diversos nanciscuntur. Quo propius vero illi ad veros accedunt, eo minores quoque valores ipsarum X, Y emergere debebunt, quotiesque illorum differentiae a veris perexiguæ sunt, supponere licebit, variationes in valoribus ipsarum X, Y proxime proportionales esse variationi ipsius x , si y , vel variationi ipsius y , si x non mutetur. Quodsi itaque valores veri ipsarum x, y resp. designantur per ξ, η , valores ipsarum X, Y suppositioni $x = \xi + \lambda$, $y = \eta + \mu$ respondententes per formam $X = \alpha\lambda + \beta\mu$, $Y = \gamma\lambda + \delta\mu$ exhibebuntur, ita ut coëfficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pro constantibus haberi queant, dum λ et μ perexiguæ manent. Hinc concluditur, si pro tribus systematibus valorum ipsarum x, y , a veris parum diversorum, valores respondententes ipsarum X, Y determinati sint, valores veros ipsarum x, y inde derivari posse, quatenus quidem suppositionem istam admittere licet. Statuamus

$$\begin{array}{llll}
 \text{pro} & x = a, & y = b & \text{feri} & X = A, & Y = B \\
 & x = a', & y = b' & & X = A', & Y = B' \\
 & x = a'', & y = b'' & & X = A'', & Y = B''
 \end{array}$$

habebimusque

$$\begin{aligned}
 A &= \alpha(a - \xi) + \beta(b - \eta), \\
 B &= \gamma(a - \xi) + \delta(b - \eta) \\
 A' &= \alpha(a' - \xi) + \beta(b' - \eta), \\
 B' &= \gamma(a' - \xi) + \delta(b' - \eta) \\
 A'' &= \alpha(a'' - \xi) + \beta(b'' - \eta), \\
 B'' &= \gamma(a'' - \xi) + \delta(b'' - \eta).
 \end{aligned}$$

Hinc fit, eliminatis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{a(A'B'' - A''B') + a'(A''B - AB'') + a''(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \\
 \eta &= \frac{b(A'B'' - A''B') + b'(A''B - AB'') + b''(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B}
 \end{aligned}$$

sive in forma ad calculum commodiori

$$\begin{aligned}
 \xi &= a + \frac{(a' - a)(A''B - AB'') + (a'' - a)(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \\
 \eta &= b + \frac{(b' - b)(A''B - AB'') + (b'' - b)(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B}.
 \end{aligned}$$

Manifesto quoque in his formulis quantitates a, b, A, B cum a', b', A', B' , vel cum his a'', b'', A'', B'' permutare licet.

Ceterum denominator communis omnium harum expressionum, quem etiam sub formam $(A' - A)(B'' - B) - (A'' - A)(B' - B)$ ponere licet, fit

$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)\{(a' - a)(b'' - b) - (a'' - a)(b' - b)\} :$$

unde patet, a, a', a'', b, b', b'' ita accipi debere, ut non fiat $\frac{a'' - a}{b'' - b} = \frac{a' - a}{b' - b}$, alioquin enim haec methodus haud applicabilis esset, sed pro ξ et η valores fractos suggereret, quorum numeratores et denominatores simul evanescerent. Simul hinc manifestum est, si forte fiat $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, eundem defectum methodi usum omnino destruere, quomodocunque a, a', a'', b, b', b'' accipiantur. In tali casu pro valoribus ipsius X formam talem supponere oporteret $\alpha\lambda + \beta\mu + \epsilon\lambda\lambda + \zeta\lambda\mu + \theta\mu\mu$, similemque pro valoribus ipsius Y , quo facto analysis methodos praecedenti analogas suppeditaret, e valoribus ipsarum X, Y pro quatuor systematibus valorum ipsarum x, y computatis harum valores veros eruendi. Hoc vero modo calculus permolestus evaderet, praetereaue ostendi potest, in tali casu orbitae determinationem praecisionem necessariam per ipsius rei naturam non admittere: quod incommodum quum aliter evitari nequeat, nisi novis observationibus magis idoneis adscitis, huic argumento hic non immoramur.

121.

Quoties itaque incognitarum valores approximati iam in potestate sunt, veri inde per methodum modo explicatam omni quae desideratur praecisione derivari possunt. Primo scilicet computabuntur valores ipsarum X, Y istis valoribus approximatis a, b respondentes: qui nisi sponte iam evanescunt, calculus duobus aliis valoribus ab illis parum diversis a', b' repetetur, ac dein tertio systemate a'', b'' , nisi fortuito ex secundo X et Y evanuerunt. Tunc per formulas art. praec. valores veri elicientur, quatenus suppositio, cui illae formulae innituntur, a veritate haud sensibiliter discrepat. De qua re quo melius iudicium ferri possit, calculus valorum ipsarum X, Y cum illis valoribus correctis repetetur: qui si aequationibus $X = 0, Y = 0$ nondum satisfieri monstrat, certe valores multo minores ipsarum X, Y inde prodibunt, quam per tres priores hypotheses, adeoque elementa orbitae hinc resultantia longe exactiora erunt, quam ea, quae primis hypothesisibus respondent. Quibus si acquiescere nolumus, consultissimum erit, omissa ea hypothesi quae maximas differentias produxerat, duas reliquas cum quarta denuo iungere, atque sic ad normam art. praec. quintum systema valorum ipsarum x, y formare: eodemque modo, ubi operae pretium videbitur, ad hypothesin sextam etc. progredi licebit, donec aequationibus $X = 0, Y = 0$ tam exacte satisfactum fuerit, quam tabulae logarithmicae et trigonometricae permittunt. Rarissime tamen opus erit, ultra systema quartum progredi, nisi hypotheses primae nimis adhuc a veritate aberrantes suppositae fuerint.

122.

Quum incognitarum valores in hypothesis secunda et tertia supponendi quodammodo arbitrarii sint, si modo ab hypothesis prima non nimis differant, praetereaue caveatur, ne ratio $(a'' - a) : (b'' - b)$ ad aequalitatem huius $(a' - a) : (b' - b)$ convergat, plerumque statui solet $a' = a$, $b'' = b$. Duplex hinc lucrum derivatur: namque non solum formulae pro ξ, η paullo adhuc simpliciores evadunt, sed pars quoque calculi primi eadem manebit in hypothesis secunda, aliaque pars in tertia.

Est tamen casus, ubi aliae rationes ab hac consuetudine discedere suadent: fingamus enim, X habere formam $X' - x$, atque Y hanc $Y' - y$, functionesque X', Y' per problematis naturam ita comparatas esse, ut erroribus mediocribus in valoribus ipsarum x, y commissis perparum afficiantur, sive ut $\left(\frac{dX'}{dx}\right)$, $\left(\frac{dX'}{dy}\right)$, $\left(\frac{dY'}{dx}\right)$, $\left(\frac{dY'}{dy}\right)$ sint quantitates perexiguae, patetque, differentias inter valores istarum functionum systemati $x = \xi$, $y = \eta$ respondentes, eosque qui ex $x = a$, $y = b$ prodeunt, ad ordinem quasi altiorem referri posse, quam differentias $\xi - a$, $\eta - b$; at valores illi sunt $X' = \xi$, $Y' = \eta$, hi vero $X' = a + A$, $Y' = b + B$, unde sequitur, $a + A$, $b + B$ esse valores multo exactiores ipsarum x, y , quam a, b . Quibus si hypothesis secunda superstruitur, persaepe aequationibus $X = 0$, $Y = 0$ tam exacte iam satisfit, ut ulterius progredi haud opus sit; sin secus, eodem modo ex hypothesis secunda tertia formabitur faciendo $a'' = a' + A' = a + A + A'$, $b'' = b' + B' = b + B + B'$, unde tandem, si nondum satis praecisa reperitur, quarta ad normam art. 120 elicietur.

123.

In praec. supposuimus, valores approximatos incognitarum x, y alicunde iam haberi. Quoties quidem totius orbitae dimensiones approximatae in potestate sunt (ex aliis forte observationibus per calculos anteriores deductae iamque per novas corrigendae), conditioni illi absque difficultate satisfieri poterit, quamcunque significationem incognitis tribuamus. Contra in determinatione prima orbitae penitus adhuc ignotae (quae est problema longe difficillimum) neutiquam indifferens est, quasnam incognitas adhibeamus; arte potius talique modo eligendae sunt, ut valores approximatos ex ipsius problematis natura haurire liceat. Quod exoptatissime succedit, quoties tres observationes ad orbitae investigationem adhibitae motum heliocentricum corporis coelestis non nimis magnum complectuntur. Huiusmodi itaque observationes ad determinationem primam semper adhibendae sunt, quam dein per observationes magis ab invicem remotas ad lubitum corrigere conveniet. Nullo enim negotio perspicitur, observationum errores inevitabiles calculum eo magis turbare, quo propiores observationes adhibeantur. Hinc colligitur, observationes

ad determinationem primam haud temere eligendas, sed cavendum esse, *primo* ne sint nimis sibi invicem vicinae, *dein* vero etiam ne nimis ab invicem distent: in primo enim casu calculus elementorum observationibus satisficientium expeditissime quidem absolveretur, sed his elementis ipsis parum fidendum foret, quinimo erroribus tam enormiter depravata evadere possent, ut ne approximationis quidem vice fungi valerent; in casu altero vero artificiiis, quibus ad determinationem approximatum incognitarum utendum est, destitueremur, neque inde aliam derivaremus, nisi vel crassissimam ubi hypotheses multo plures, vel omnino ineptam, ubi tentamina fastidiosissima haud evitare liceret. Sed de hisce methodi limitibus scite iudicare melius per usum frequentem quam per praecepta ediscitur: exempla infra tradenda ostendent, ex observationibus Iunonis 22 tantum diebus ab invicem dissitis motumque heliocentricum $7^0 35'$ complectentibus elementa multa iam praecisione gaudentia derivari, ac vicissim, methodum nostram optimo etiamnum successu ad observationes Cereris applicari, quae 260 diebus ab invicem distant, motumque heliocentricum $62^0 55'$ includunt, quatuorque hypothesis seu potius approximationibus successivis adhibitis elementa optime cum observationibus conspirantia producere.

124.

Progredimur iam ad enumerationem methodorum maxime idonearum principiiis praecedentibus innixarum, quarum quidem praecipua momenta in Libro primo exposita sunt, atque hic tantum instituto nostro accomodari debent.

Methodus simplicissima esse videtur, si pro x, y distantiae corporis coelestis a terra in duabus observationibus accipiantur, aut potius vel logarithmi harum distantiarum vel logarithmi distantiarum ad eclipticam sive aequatorem proiectarum. Hinc per art. 64, V elicientur loca heliocentrica et distantiae a Sole ad eadem loca pertinentia; hinc porro per art. 110 situs plani orbitae atque longitudines heliocentricae in ea; hinc atque ex radiis vectoribus temporibusque respondentibus per problema in artt. 85—105 copiose pertractatum cuncta reliqua elementa, per quae illas observationes exacte repraesentari manifestum est, quicunque valores ipsis x, y tributi fuerint. Quod si iam per haec elementa locus geocentricus pro tempore observationis tertiae computatur, huius consensus cum observato vel dissensus decidet, utrum valores suppositi veri fuerint, an ab iis discrepent; unde quum comparatio duplex derivetur, differentia altera (in longitudine vel ascensione recta) accipi poterit pro X , alteraque (in latitudine vel declinatione) pro Y . Nisi igitur valores harum differentiarum X, Y sponte prodeunt $= 0$, valores veros ipsarum x, y per methodum in artt. 120 sqq. descriptam eruere licebit. Ceterum per se arbitrium est, a quibusnam trium observationum proficiscamur: plerumque tamen praestat, primam et postremam adoptare, casu speciali de quo statim dicemus excepto.

Haecce methodus plerisque post explicandis eo nomine praeferenda est, quod applicationem maxime generalem patitur. Excipere oportet casum, ubi duae observationes extremae motum heliocentricum 180 vel 360 vel 540 etc. graduum complectuntur; tunc enim positio plani orbitae e duobus locis heliocentricis determinari nequit (art. 110). Perinde methodum applicare haud conveniet, quoties motus heliocentricus inter duas observationes extremas perparum differt ab 180^0 vel 360^0 etc., quoniam in hoc casu determinatio positionis orbitae accurata obtineri nequit, sive potius, quoniam variationes levissimae in valoribus suppositis incognitarum tantas variationes in positione orbitae et proin etiam in valoribus ipsarum X, Y producerent, ut hae illis non amplius proportionales censi possent. Veruntamen remedium hic praesto est; scilicet in tali casu non proficiscemur a duabus observationibus extremis, sed a prima et media, vel a media et ultima, adeoque pro X, Y accipiemus differentias inter computum et observationem in loco tertio vel primo. Quodsi autem tum locus secundus a primo tum tertius a secundo propemodum 180 gradibus distarent, incommodum illud hoc modo tollere non liceret; sed praestat, huiusmodi observationes, e quibus per rei naturam determinatio accurata situs orbitae erui omnino nequit, ad calculum elementorum haud adhibere.

Praeterea haec methodus eo quoque se commendat, quod nullo negotio aestimari potest, quantas variationes elementa patiantur, si manentibus locis extremis medius paullulum mutetur: hoc itaque modo iudicium ferri poterit quaecumque de gradu praecisionis elementis inventis tribuendae.

125.

Levi mutatione applicata e methodo praecedente *secundam* eliciemus. A distantis in duabus observationibus profecti, perinde ut in illa, cuncta elementa determinabimus; ex his vero non locum geocentricum pro observatione tertia computabimus, sed tantummodo usque ad locum heliocentricum in orbita progrediemur; ex altera parte eundem locum heliocentricum per problema in artt. 74, 75 tractatum e loco geocentrico observato atque situ plani orbitae derivabimus; hae duae determinationes inter se differentes (nisi forte valores veri ipsarum x, y suppositi fuerint) ipsas X, Y nobis suppeditabunt, accepta pro X differentia inter duos valores longitudinis in orbita, atque pro Y differentia inter duos valores radii vectoris, aut potius logarithmi eius. Haecce methodus iisdem monitionibus obnoxia est, quas in art. praec. attigimus: adiungere oportet aliam, scilicet, quod locus heliocentricus in orbita e geocentrico deduci nequit, quoties locus terrae in alterutrum nodorum orbitae incidit; tunc itaque hanc methodum applicare non licet. Sed in eo quoque casu, ubi locus terrae ab alterutro nodorum perparum distat, hac methodo abstinere conveniet, quoniam suppositio, variationibus parvis ipsarum x, y

respondere variationes proportionales ipsarum X, Y , nimis erronea evaderet, per rationem ei quam in art. praec. attigimus similem. Sed hic quoque remedium e permutatione loci medii cum aliquo extremorum, cui locus terrae a nodis magis remotus respondeat, petere licebit, nisi forte in omnibus tribus observationibus terra in nodorum viciniis versata fuerit.

126.

Methodus praecedens ad *tertiam* illico sternit viam. Determinentur, perinde ut ante, e distantiiis corporis coelestis a terra in observationibus extremis longitudo respondentes in orbita cum radiis vectoribus. Adiumento positionis plani orbitae, quam hic calculus suppeditaverit, eruatur ex observatione media longitudo in orbita atque radius vector. Tunc autem computentur ex his tribus locis heliocentricis elementa reliqua per problema in artt. 82, 83 tractatum, quae operatio ab observationum temporibus independens erit. Hoc itaque modo innotescant tres anomaliae mediae atque motus diurnus, unde ipsa temporum intervalla inter observationem primam et secundam atque inter secundam et tertiam computare licebit. Horum differentiae ab intervallis veris pro X et Y accipientur.

Haec methodus minus idonea esset, quoties motus heliocentricus arcum exiguum tantum complectitur. In tali enim casu ista orbitae determinatio (ut iam in art. 82 monuimus) a quantitativis tertii ordinis pendet, adeoque praecisionem sufficientem non admittit. Variationes levissimae in valoribus ipsarum x, y producere possent variationes permagnas in elementis adeoque etiam in valoribus ipsarum X, Y neque has illis proportionales supponere liceret. Quoties autem tres loci motum heliocentricum considerabilem subtendunt, methodi usus utique succedet optime, siquidem exceptionibus in artt. praec. explicatis haud turbetur, ad quas manifesto in hac quoque methodo respiciendum erit.

127.

Postquam tres loci heliocentrici eo quem in art. praec. descripsimus modo eruti sunt, sequenti quoque modo procedi poterit. Determinentur elementa reliqua per problema in artt. 85—105 tractatum primo e loco primo et secundo cum intervallo temporis respondente, dein vero eodem modo e loco secundo et tertio temporisque intervallo respondente: ita pro singulis elementis duo valores prodibunt, e quorum differentiis duas ad libitum pro X et Y accipere licebit. Magnopere hanc methodum commendat commodum haud spernendum, quod in hypothesibus primis elementa reliqua, praeter duo ea quae ad stabiliendum X et Y eliguntur, omnino negligere licet, quae in ultimo demum calculo, valoribus correctis ipsarum x, y superstructo, determinabuntur sive e sola combinatione prima, sive e sola secunda, sive quod plerumque

praeferendum est e combinatione loci primi cum tertio. Ceterum electio illorum duorum elementorum, quae generaliter loquendo arbitraria est, magnam solutionum varietatem suppeditat; adoptari poterunt e. g. logarithmus semiparametri cum logarithmo semiaxis maioris, vel prior cum excentricitate, vel cum eadem posterior, vel cum aliquo horum elementorum longitudo perihelii: combinari quoque poterit aliquod horum quatuor elementorum cum anomalia excentrica loco medio in utroque calculo respondente, siquidem orbita elliptica evaserit, ubi formulae 27—30 art. 96 calculum maxime expeditum afferent. In casibus specialibus autem haec electio quadam circumspectione indiget; ita e. g. in orbitis ad parabolae similitudinem vergentibus semiaxis maior a ipsiusve logarithmus minus idonei forent, quippe quorum variationes immodicae variationibus ipsarum x, y haud proportionales censi possent: in tali casu magis e re esset eligere $\frac{1}{a}$. Sed his cautelis eo minus immoramur, quum methodus quinta in art. seq. explicanda quatuor hactenus expositis in omnibus fere casibus palmam praecripiat.

128.

Designemus tres radios vectores eodem modo erutos ut in artt. 125, 126 per r, r', r'' ; motum angularem heliocentricum in orbita a loco secundo ad tertium per $2f$, a primo ad tertium per $2f'$, a primo ad secundum per $2f''$, ita ut habeatur $f' = f + f''$; sit porro

$$r'r'' \sin 2f = n, \quad rr'' \sin 2f' = n', \quad rr' \sin 2f'' = n'';$$

denique producta quantitatis constantis k (art. 2) in temporis intervalla ab observatione secunda ad tertiam, a prima ad tertiam, a prima ad secundam resp. $\theta, \theta', \theta''$. Incipiat computus duplex elementorum (perinde ut in art. praec.) tum ex r, r', f'' et θ'' , tum ex r', r'', f, θ : in utroque vero calculo non ad elementa ipsa progredieris, sed subsistes, quamprimum quantitas ea, quae rationem sectoris elliptici ad triangulum exprimit, supraque (art. 91) per y vel $-Y$ denotata est, eruta fuerit. Sit valor huius quantitatis in calculo primo η'' , in secundo η . Habebimus itaque per formulam 18 art. 95 pro semiparametro p valorem duplicem:

$$\sqrt{p} = \frac{\eta'' n''}{\theta''} \quad \text{atque} \quad \sqrt{p} = \frac{\eta n}{\theta}.$$

Sed per art. 82 habemus insuper valorem tertium

$$p = \frac{4rr'r'' \sin f \sin f' \sin f''}{n - n' + n''},$$

qui tres valores manifesto identici esse deberent, si pro x, y ab initio valores veri accepti fuissent. Quamobrem esse deberet

$$\begin{aligned}\frac{\theta''}{\theta} &= \frac{\eta'' n''}{\eta n} \\ n - n' + n'' &= \frac{4\theta\theta'' r r' r'' \sin f \sin f' \sin f''}{\eta\eta'' n n''} \\ &= \frac{n' \theta \theta''}{2\eta\eta'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}.\end{aligned}$$

Nisi itaque his aequationibus iam in primo calculo sponte satisfit, statuere licebit

$$\begin{aligned}X &= \log \frac{\eta n \theta''}{\eta'' n'' \theta} \\ Y &= n - n' + n'' - \frac{n' \theta \theta''}{2\eta\eta'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}.\end{aligned}$$

Haec methodus applicationem aequae generalem patitur, ac secunda in art. 125 explicata, magnum vero lucrum est, quod in hacce quinta hypotheses primae evolutionem elementorum ipsorum non requirunt, sed in media quasi via subsistunt. Ceterum simulatque in hac operatione eo perventum est, ut praevideri possit, hypothesin novam a veritate haud sensibilter discrepaturam esse, in hac elementa ipsa vel duntaxat ex r, r', f'', θ'' , vel ex r', r'', f, θ , vel quod praestat ex r, r'', f', θ' determinare sufficiet.

129.

Quinque methodi hactenus expositae protinus ad totidem alias viam sternunt, quae ab illis eo tantum differunt, quod pro x et y loco distantiarum a terra, inclinatio orbitae atque longitudo nodi ascendentis accipiuntur. Hae igitur methodi novae ita se habent:

I. Determinantur ex x et y duobusque locis geocentricis extremis secundum artt. 74, 75 longitudes heliocentricae in orbita radiique vectores, atque hinc et ex temporibus respondentibus omnia reliqua elementa; ex his denique locus geocentricus pro tempore observationis mediae, cuius differentiae a loco observato in longitudine et latitudine ipsas X et Y suppediunt.

Quatuor reliquae methodi in eo conveniunt, quod e positione plani orbitae locisque geocentricis omnes tres longitudes heliocentricae in orbita radiique vectores respondententes computantur. Dein autem

II. elementa reliqua determinantur e duobus locis extremis tantum atque temporibus respondentibus; secundum haec elementa calculantur pro tempore observationis mediae longitudo in orbita atque radius vector, quarum

quantitatum differentiae a valoribus prius inventis, i. e. e loco geocentrico deductis, ipsas X, Y exhibebunt.

III. Aut derivantur orbitae dimensiones reliquae ex omnibus tribus locis heliocentricis (artt. 82, 83), in quem calculum tempora non ingrediuntur: dein temporum intervalla eruuntur, quae in orbita ita inventa inter observationem primam et secundam, atque inter hanc et tertiam elapsa esse deberent, et quorum differentiae a veris ipsas X, Y nobis suggerent.

IV. Calculantur elementa reliqua duplici modo, puta tum e combinatione loci primi cum secundo, tum e combinatione secundi cum tertio, adhibitis temporum intervallis respondentibus. Comparatis hisce duobus elementorum systematibus inter se, e differentiis duae quaecunque pro X, Y accipi poterunt.

V. Sive denique idem calculus duplex tantummodo usque ad valores quantitatis in art. 91 per y denotatae producitur, ac dein pro X, Y expressiones in art. praec. traditae adoptantur.

Ut quatuor ultimis harum methodorum tuto uti liceat, loci terrae pro omnibus tribus observationibus orbitae nodis non nimis vicini esse debent: contra usus methodi primae tantummodo requirit, ut eadem conditio in duabus observationibus extremis locum habeat, sive potius (quoniam locum medium pro aliquo extremorum substituere licet), ut e tribus locis terrae non plures quam unus in nodorum viciniis versentur.

130.

Decem methodi inde ab art. 124 explicatae innituntur suppositioni, valores approximatos distantiarum corporis coelestis a terra, aut positionis plani orbitae, iam in potestate esse. Quoties quidem id agitur, ut dimensiones orbitae, quarum valores approximati iam alicunde innotuerunt, puta per calculum anteriorem observationibus aliis innixum, per observationes magis ab invicem remotas corrigantur, postulatum illud nullis manifesto difficultatibus obnoxium erit. Sed hinc nondum liquet, quonam modo calculum primum aggredi liceat, ubi omnes orbitae dimensiones penitus adhuc incognitae sunt: hic vero problematis nostri casus longe gravissimus atque difficillimus est, uti iam ex problemate analogo in theoria cometarum praesumi potest, quod quamdiu geometras torserit quotque tentaminibus irritis originem dederit satis constat. Ut problema nostrum recte solutum censi possit, manifesto conditionibus sequentibus satisfieri oportet, siquidem solutio ad instar normae inde ab art. 119 explicatae exhibetur: *Primo* quantitates x, y tali modo sunt eligendae, ut valores ipsarum approximatos ex ipsa problematis natura petere liceat, saltem, quamdiu corporis coelestis motus heliocentricus intra observationes non nimis magnus est. *Secundo* autem requiritur, ut variationibus exiguis quantitatum x, y variationes non nimis magnae in quantitativis inde derivandis respondeant, ne errores in illarum valoribus suppositis forte commissi impediant, quominus has quoque pro approximatis habere liceat. Denique *tertio*

postulamus, ut operationes, per quas a quantitativibus x, y successive usque ad X, Y progrediendum est, non nimis prolixae evadant.

Hae conditiones criterium subministrabunt, secundum quod de cuiusvis methodi praestantia iudicium ferri poterit: adhuc evidentius quidem ea applicationibus frequentibus se manifestabit. Methodus ea, quam exponere iam accingimur, et quae quodammodo tamquam pars gravissima huius operis consideranda est, illis conditionibus ita satisfacit, ut nihil amplius desiderandum relinquere videatur. Quam antequam in forma ad praxin commodissima explicare aggrediamur, quasdam considerationes praeliminares praemitemus, aditumque quasi ad illam, qui alias forsitan obscurior minusque obvius videri possit, illustrabimus atque aperiemus.

Modern edition: authorship and sources

Historical author: Carl Friedrich Gauss. The historical editors, correspondents, contributors and issuing institutions retain the attributions printed in the source and reproduced in the historical text. Their writing is not attributed to an AI system.

Source edition: Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Band VII, 1906, containing *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Hamburg, 1809. Digital witness: Göttinger Digitalisierungszentrum, PPN236008730.

This original-language partial edition contains the historical titles, complete Praefatio and Contenta, and Articles 1–130. Further articles are outside this edition. Historical wording, mathematical expressions and notes are retained. Modern fonts and reflow represent content rather than historical type identity. Qualified readings are described in the accompanying README.

AI-transcribed text and AI-produced source comparisons and typesetting: OpenAI GPT-6 Astra (Ultra). This credit concerns the modern encoding and does not replace historical authorship. No human or independent review is claimed.

Alternative witness for Articles 98 and 124: Internet Archive, *Werke*, volume 7, item [werkehrsgvonderg07gausuoft](#), Gerstein–University of Toronto digitization; PDF [werkehrsgvonderg07gausuoft.pdf](#), leaves 140–141, printed pages 130–131, for Article 98; leaf 175, printed page 165, for Article 124. For Article 98 this witness supports the qualified exponent reading and comparison of small detached marks. For Article 124 it supplies a comparison for the qualified unprimed reading of X beside a small detached contour in the principal witness. Physical independence of the typesetting or image processing is not asserted.

These editions are freely available for study and teaching.