Matematika Diskret

Sebuah Pengantar Terbuka, Edisi Keempat

Matematika Diskret

Sebuah Pengantar Terbuka

Oscar Levin

Edisi Keempat

Oscar Levin
School of Mathematical Science
University of Northern Colorado
Greeley, Co 80639
oscar.levin@unco.edu
http://math.oscarlevin.com/

© 2013–2025 Oscar Levin

CC BY-NC-SA 4.0
Karya ini dilisensikan di bawah Lisensi Creative Commons Atribusi-NonKomersial-BerbagiSerupa 4.0 Internasional. Untuk melihat salinan lisensi ini, kunjungi https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/.

Edisi Keempat — Terjemahan Bahasa Indonesia independen

DOI edisi Bahasa Indonesia: https://doi.org/10.5281/zenodo.21973438

Versi mutakhir sumber berbahasa Inggris tersedia secara gratis di
https://discrete.openmathbooks.org/

Terjemahan ini didasarkan pada edisi keempat karya Oscar Levin dan tidak disusun, disetujui, ataupun didukung oleh Oscar Levin atau University of Northern Colorado. Perubahan dan koreksi didokumentasikan dalam catatan asal-usul edisi.

Gambar sampul: *Pengubinan dengan Fibonacci dan Pascal*.

Untuk Madeline dan Teagan

Ucapan Terima Kasih

Buku ini tidak akan ada tanpa "Discrete and Combinatorial Mathematics," karya Richard Grassl dan Tabitha Mingus. Dari buku itulah saya mempelajari matematika diskret, dan buku itu pula yang saya gunakan untuk mengajar pada semester sebelum saya mulai menulis teks ini. Saya ingin mempertahankan nuansa berbasis penyelidikan dari buku mereka, sembari memperbarui, memperluas, dan menata ulang sebagian materinya. Beberapa pemaparan dan latihan terbaik di sini dengan murah hati disumbangkan dari sumber tersebut.

Terima kasih kepada para mahasiswa pascasarjana yang selama bertahun-tahun mengajar bersama saya dalam mata kuliah Matematika Diskret, termasuk Evan Czysz, Alees Lee, dan Sarah Sparks, yang turut mengembangkan kegiatan dan latihan baru yang telah dimasukkan ke dalam teks ini. Michelle Morgan memberikan dukungan penyuntingan naskah, dan Jennifer Zakotnik-Gutierrez membantu menulis kode untuk banyak latihan interaktif dalam versi daring buku ini. Terima kasih juga kepada Katie Morrison, Nate Eldredge, dan Richard Grassl (sekali lagi) atas saran mereka setelah menggunakan bagian-bagian teks ini di kelas mereka.

Versi daring buku ini ditulis dalam PreTeXt dan dihos di Runestone Academy berkat kerja pengembangan yang luar biasa dari Rob Beezer, Brad Miller, David Farmer, dan Alex Jordan, bersama para peserta lain dalam grup pretext-support (`groups.google.com/g/pretext-support`).

Terakhir, terima kasih kepada banyak mahasiswa yang selama bertahun-tahun telah menunjukkan kesalahan ketik dan memberikan saran, serta terima kasih sebelumnya kepada mereka yang akan melakukannya pada masa mendatang.

Prakata

Teks ini bertujuan memperkenalkan beberapa topik pilihan dalam matematika diskret pada tingkat yang sesuai bagi mahasiswa tahun pertama atau kedua jurusan matematika dan ilmu komputer, khususnya mereka yang berniat mengajar matematika di sekolah menengah pertama dan atas. Buku ini bermula sebagai kumpulan catatan untuk mata kuliah Matematika Diskret di University of Northern Colorado. Mata kuliah ini berfungsi sekaligus sebagai tinjauan topik-topik matematika diskret dan mata kuliah "jembatan" bagi mahasiswa jurusan matematika, karena UNC tidak menawarkan mata kuliah "pengantar pembuktian" secara terpisah. Seiring mata kuliah ini berkembang untuk mendukung program studi ilmu komputer kami, teks ini pun ikut berkembang. Versi buku saat ini dimaksudkan untuk mendukung pengajaran berbasis penyelidikan demi pemahaman yang sangat penting bagi calon guru, sekaligus menyediakan landasan matematika yang diperlukan dan motivasi berbasis penerapan bagi mahasiswa ilmu komputer. Saat mengajar mata kuliah ini pada Musim Semi 2024 dengan menggunakan versi awal edisi ini, saya terkejut sekaligus senang karena begitu banyak mahasiswa melaporkan bahwa untuk pertama kalinya mereka melihat betapa bermanfaatnya matematika di "dunia nyata." Saya berharap pengalaman ini dapat diulangi di kelas-kelas lain yang menggunakan teks ini.

Buku ini dimaksudkan untuk digunakan dalam kelas yang diajar dengan metode berorientasi masalah atau berbasis penyelidikan. Setiap bagian diawali dengan pratinjau isi yang mencakup pertanyaan pemantik terbuka *Selidiki!*, serta kegiatan pratinjau yang terstruktur. Kegiatan pratinjau disusun secara bertahap dan cermat untuk menyediakan titik masuk ke topik bagian tersebut serta mempersiapkan mahasiswa agar terlibat secara mendalam dengan materi. Bergantung pada laju kelas, saya berhasil dengan hanya menugaskan pratinjau bagian sebelum kelas, menggunakan kegiatan pratinjau sebagai kerja kelompok di kelas, atau menugaskan seluruh bagian untuk dibaca sebelum kelas (setiap bagian diakhiri dengan sejumlah kecil pertanyaan bacaan yang dapat ditugaskan untuk mendorong mahasiswa agar benar-benar membaca). Bagi pembaca yang menggunakan buku ini untuk belajar mandiri, semoga susunan bagian-bagiannya menyerupai gaya kelas berbasis penyelidikan yang kaya.

Topik-topik yang dibahas dalam teks ini dipilih agar sesuai dengan kebutuhan mahasiswa yang saya ajar di UNC. Bidang kajian utamanya adalah logika dan pembuktian, teori graf, kombinatorika, dan barisan. Induksi dibahas pada akhir bab tentang barisan. Struktur diskret diperkenalkan "sesuai kebutuhan", tetapi pembahasan yang lebih menyeluruh tentang himpunan dan fungsi disertakan sebagai bab tersendiri yang dapat dipelajari secara terpisah dari isi lainnya. Bab terakhir membahas dua topik tambahan: fungsi pembangkit dan teori bilangan.

Walaupun saya meyakini bahwa pilihan dan urutan topik ini optimal, silakan melompat ke bagian yang menarik bagi Anda. Sesekali terdapat contoh dan latihan yang bergantung pada materi sebelumnya, tetapi saya telah berusaha membatasinya

seminimal mungkin; biasanya materi tersebut dapat dilewati atau dipahami tanpa terlalu banyak pembelajaran tambahan. Jika Anda seorang pengajar, Anda juga dapat membuat versi khusus dengan menyunting sumber PreTeXt agar sesuai dengan kebutuhan Anda.

Penyempurnaan pada Edisi Ke-4. Banyak bagian telah ditulis ulang untuk memperjelas pemaparannya.

- Hampir 300 latihan baru, sehingga jumlah keseluruhannya menjadi lebih dari 750. Latihan-latihan ini dibagi dengan lebih baik menjadi pertanyaan kegiatan pratinjau, pertanyaan bacaan, soal latihan, dan latihan tambahan. Sebagian besar latihan baru bersifat interaktif dalam versi daring.
- Bagian-bagian baru tentang probabilitas, relasi, serta struktur diskret dan pembuktiannya. Beberapa bagian lain telah dipecah agar satu pertemuan kelas lebih memungkinkan untuk dicurahkan pada satu topik.
- Penyajian bab pencacahan disempurnakan dengan lebih menekankan pertimbangan atas himpunan hasil daripada sekadar mengikuti aturan.
- Kegiatan *Selidiki!* pada Edisi Ke-3 telah dibagi menjadi dua jenis: pertanyaan *Selidiki!* dan Kegiatan Pratinjau. Jenis pertama berupa pertanyaan terbuka yang dirancang agar Anda terlibat dengan topik yang akan segera dibahas. Jenis kedua berupa kegiatan pratinjau terstruktur yang seharusnya dapat Anda jawab sepenuhnya sebelum membaca bagian tersebut.

Edisi-edisi sebelumnya (Edisi Ke-3 yang dirilis pada 2019, Edisi Ke-2 yang dirilis pada 2016, dan Edisi Musim Gugur 2015) akan tetap tersedia bagi pengajar yang ingin menggunakan versi tersebut karena sudah terbiasa dengannya.

Saya berencana untuk terus menyempurnakan buku ini. Sebagian penyempurnaan akan berlangsung secara langsung melalui pembaruan versi daring dengan isi baru (penomoran akan tetap konsisten). Karena itu, saya mendorong Anda untuk mengirimkan saran dan komentar kapan pun Anda memilikinya.

Oscar Levin, Ph.D.
University of Northern Colorado, 2024

Cara Menggunakan Buku Ini

Selain teks pemaparan, buku ini memiliki beberapa fitur yang dirancang untuk mendorong Anda berinteraksi dengan matematika.

Pertanyaan *Selidiki!* Di berbagai bagian (biasanya tepat di awal suatu topik), Anda akan menemukan pertanyaan terbuka yang dirancang agar Anda terlibat dengan topik yang akan segera dibahas. Anda sebaiknya benar-benar meluangkan waktu untuk memikirkan, atau bahkan mengerjakan, soal-soal ini sebelum membaca bagian tersebut. Namun, jangan khawatir jika Anda belum dapat menemukan penyelesaian yang memuaskan. Tujuannya adalah membangkitkan minat Anda agar Anda membaca materi berikutnya sambil mencari jawaban.

Kegiatan Pratinjau. Sebagian besar bagian memuat kegiatan pratinjau yang terstruktur. Kegiatan ini berisi pertanyaan penuntun yang seharusnya dapat Anda jawab sepenuhnya sebelum membaca bagian tersebut. Pertanyaan-pertanyaan itu dimaksudkan untuk mempersiapkan Anda agar terlibat secara bermakna dengan isi baru yang akan dipelajari. Jika Anda menggunakan versi daring, sebagian besar pertanyaan ini akan memberi Anda umpan balik langsung sehingga Anda dapat melanjutkan dengan yakin.

Contoh. Saya telah berusaha menyertakan jumlah contoh yang "tepat". Untuk contoh-contoh yang memuat *soal*, disertakan penyelesaian lengkap. Sebelum membaca penyelesaiannya, usahakan setidaknya memahami apa yang ditanyakan oleh soal tersebut. Berbeda dari beberapa buku teks, contoh-contoh ini tidak dimaksudkan untuk mencakup semua jenis soal yang akan Anda jumpai dalam latihan. Contoh-contoh tersebut tidak boleh digunakan sebagai pola baku untuk menyelesaikan soal lain. Sebaliknya, gunakan contoh untuk memperdalam pemahaman Anda tentang konsep dan teknik yang dibahas dalam setiap bagian. Kemudian gunakan pemahaman tersebut untuk menyelesaikan latihan pada akhir setiap bagian.

Latihan. Anda menjadi mahir dalam matematika melalui latihan. Setiap bagian diakhiri dengan soal latihan yang dimaksudkan untuk memperkuat konsep dan keterampilan dasar yang disajikan dalam bagian tersebut; versi daring memberikan umpan balik langsung untuk soal-soal ini. Setelah itu terdapat latihan tambahan yang lebih menantang dan terbuka. Latihan tersebut dapat ditugaskan sebagai pekerjaan rumah tertulis atau digunakan sebagai kerja kelompok di kelas. Beberapa latihan tambahan memiliki petunjuk atau penyelesaian di bagian belakang buku, tetapi gunakanlah sesedikit mungkin. Menghadapi kesulitan merupakan bagian penting dari proses belajar. Pada akhir setiap bab disertakan kumpulan latihan serupa yang lebih banyak (sebagai semacam "tinjauan bab"), yang dapat menjembatani materi dari berbagai bagian dalam bab tersebut.

Versi Daring Interaktif. Bagi Anda yang membaca buku ini dalam bentuk cetak atau PDF, saya mendorong Anda untuk melihat juga versi daring interaktifnya. Banyak kegiatan pratinjau dan latihan bersifat interaktif serta dapat memberi Anda umpan balik langsung. Beberapa di antaranya memiliki komponen yang diacak, sehingga Anda dapat berlatih dengan banyak variasi serupa dari soal yang sama sampai menguasai topiknya.

Petunjuk dan penyelesaian contoh juga disembunyikan di balik satu klik tambahan untuk mendorong Anda memikirkan soal sebelum membaca penyelesaiannya. Tersedia pula fitur pencarian yang baik, dan indeks memiliki tautan yang dapat diperluas untuk melihat isi tanpa langsung berpindah ke halaman tersebut. Tersedia juga papan coretan Python (ikon pensil), sehingga Anda dapat mencoba beberapa kode jika berminat.

Interaktivitas tambahan sedang direncanakan. Fitur "bonus" ini akan ditambahkan secara bertahap, jadi nantikanlah!

Anda dapat melihat versi interaktif Bahasa Indonesia secara gratis di `kokunoyumeto.github.io/discrete-mathematics-open-introduction-id` atau dengan memindai kode QR di bawah ini.

Daftar Isi

Ucapan Terima Kasih vii

Prakata ix

Cara Menggunakan Buku Ini xi

0 Pendahuluan dan Dasar-Dasar 1

0.1 Apa itu Matematika Diskret? . . . 1
Pertanyaan Bacaan . . . 4
0.2 Struktur Diskret . . . 5
0.2.1 Pendahuluan . . . 5
0.2.2 Himpunan . . . 6
0.2.3 Fungsi . . . 7
0.2.4 Barisan . . . 8
0.2.5 Relasi . . . 10
0.2.6 Graf . . . 10
0.2.7 Lebih Banyak Lagi Struktur . . . 11
0.2.8 Pertanyaan Bacaan . . . 12

1 Logika dan Pembuktian 13

1.1 Pernyataan Matematis . . . 14
1.1.1 Pratinjau Bagian . . . 14
1.1.2 Pernyataan Atomik dan Molekuler . . . 18
1.1.3 Kuantor dan Predikat . . . 24
1.1.4 Pertanyaan Bacaan . . . 27
1.1.5 Soal Latihan . . . 28
1.1.6 Latihan Tambahan . . . 31
1.2 Implikasi . . . 32
1.2.1 Pratinjau Bagian . . . 32
1.2.2 Memahami Tabel Kebenaran . . . 35
1.2.3 Pernyataan yang Berkaitan . . . 37
1.2.4 Pertanyaan Bacaan . . . 43
1.2.5 Soal Latihan . . . 44
1.2.6 Latihan Tambahan . . . 45
1.3 Aturan Logika . . . 48
1.3.1 Pratinjau Bagian . . . 48
1.3.2 Tabel Kebenaran . . . 50
1.3.3 Ekuivalensi Logis . . . 53

1.3.4 Ekuivalensi untuk Pernyataan Berkuantor . . . 57
1.3.5 Deduksi . . . 60
1.3.6 Pertanyaan Bacaan . . . 63
1.3.7 Soal Latihan . . . 63
1.3.8 Latihan Tambahan . . . 64
1.4 Pembuktian . . . 69
1.4.1 Pratinjau Bagian . . . 69
1.4.2 Pembuktian Langsung . . . 72
1.4.3 Pembuktian melalui Kontraposisi . . . 77
1.4.4 Pembuktian dengan Kontradiksi . . . 80
1.4.5 Ringkasan Gaya Pembuktian . . . 83
1.4.6 Pertanyaan Bacaan . . . 86
1.4.7 Soal Latihan . . . 87
1.4.8 Latihan Tambahan . . . 90
1.5 Bukti tentang Struktur Diskret . . . 95
1.5.1 Pratinjau Bagian . . . 95
1.5.2 Bukti tentang Himpunan . . . 97
1.5.3 Bukti tentang Fungsi . . . 99
1.5.4 Bukti tentang Relasi . . . 102
1.5.5 Bukti tentang Graf . . . 103
1.5.6 Pertanyaan Bacaan . . . 105
1.5.7 Soal Latihan . . . 106
1.5.8 Latihan Tambahan . . . 108
1.6 Ringkasan Bab . . . 111
Tinjauan Bab . . . 112

2 Teori Graf **115**

2.1 Masalah dan Definisi . . . 115
2.1.1 Pratinjau Bagian . . . 116
2.1.2 Apa Itu Graf? . . . 118
2.1.3 Pertanyaan Bacaan . . . 128
2.1.4 Soal Latihan . . . 128
2.1.5 Latihan Tambahan . . . 130
2.2 Pohon . . . 134
2.2.1 Pratinjau Bagian . . . 134
2.2.2 Sifat-Sifat Pohon . . . 136
2.2.3 Pohon Merentang . . . 140
2.2.4 Pohon Berakar . . . 142
2.2.5 Pertanyaan Bacaan . . . 144
2.2.6 Soal Latihan . . . 144
2.2.7 Latihan Tambahan . . . 145

2.3 Graf Planar . . . 148
2.3.1 Pratinjau Bagian . . . 148
2.3.2 Rumus Euler untuk Graf Planar . . . 150
2.3.3 Graf Nonplanar . . . 151
2.3.4 Polihedron . . . 154
2.3.5 Pertanyaan Bacaan . . . 157
2.3.6 Soal Latihan . . . 157
2.3.7 Latihan Tambahan . . . 158
2.4 Jejak dan Sirkuit Euler . . . 161
2.4.1 Pratinjau Bagian . . . 161
2.4.2 Syarat untuk Jejak Euler . . . 163
2.4.3 Lintasan Hamilton . . . 165
2.4.4 Pertanyaan Bacaan . . . 166
2.4.5 Latihan Soal . . . 166
2.4.6 Latihan Tambahan . . . 167
2.5 Pewarnaan . . . 171
2.5.1 Pratinjau Bagian . . . 171
2.5.2 Pewarnaan Simpul . . . 174
2.5.3 Pewarnaan Sisi . . . 179
2.5.4 Pertanyaan Bacaan . . . 180
2.5.5 Latihan Soal . . . 181
2.5.6 Latihan Tambahan . . . 182
2.6 Relasi dan Graf . . . 186
2.6.1 Pratinjau Bagian . . . 186
2.6.2 Relasi secara Umum . . . 189
2.6.3 Sifat-Sifat Relasi . . . 194
2.6.4 Relasi Ekuivalensi . . . 196
2.6.5 Kelas Ekuivalensi dan Partisi . . . 198
2.6.6 Pertanyaan Bacaan . . . 201
2.6.7 Soal Latihan . . . 202
2.6.8 Latihan Tambahan . . . 203
2.7 Pencocokan pada Graf Bipartit . . . 205
Latihan . . . 208
2.8 Ringkasan Bab . . . 211
Tinjauan Bab . . . 211

3 Pencacahan **217**

3.1 Segitiga Aritmetika Pascal . . . 217
3.1.1 Pratinjau Bagian . . . 218
3.1.2 Lintasan Kisi . . . 221
3.1.3 String Bit . . . 223
3.1.4 Subhimpunan dan Piza . . . 225
3.1.5 Aljabar? . . . 227
3.1.6 Pertanyaan Bacaan . . . 229

3.1.7 Soal Latihan . . . 229
3.1.8 Latihan Tambahan . . . 230
3.2 Menggabungkan Hasil . . . 232
3.2.1 Pratinjau Bagian . . . 232
3.2.2 Apa yang Dimaksud dengan *Hasil*? . . . 233
3.2.3 Prinsip Penjumlahan dan Prinsip Perkalian . . . 235
3.2.4 Menggabungkan Prinsip . . . 242
3.2.5 Pertanyaan Bacaan . . . 244
3.2.6 Soal Latihan . . . 244
3.2.7 Latihan Tambahan . . . 246
3.3 Hasil yang Tidak Saling Lepas . . . 247
3.3.1 Pratinjau Bagian . . . 247
3.3.2 Menghitung dengan Diagram Venn . . . 248
3.3.3 Prinsip Inklusi–Eksklusi . . . 252
3.3.4 Tumpang Tindih dan Prinsip Perkalian . . . 255
3.3.5 Pertanyaan Bacaan . . . 257
3.3.6 Soal Latihan . . . 257
3.3.7 Latihan Tambahan . . . 259
3.4 Kombinasi dan Permutasi . . . 260
3.4.1 Pratinjau Bagian . . . 260
3.4.2 Mencacah Barisan . . . 262
3.4.3 Mencacah Himpunan . . . 265
3.4.4 Prinsip Hasil Bagi . . . 270
3.4.5 Pertanyaan Bacaan . . . 272
3.4.6 Soal Latihan . . . 272
3.4.7 Latihan Tambahan . . . 274
3.5 Menghitung Multihimpunan . . . 275
3.5.1 Pratinjau Bagian . . . 275
3.5.2 Silakan Ambil Kue . . . 277
3.5.3 Merepresentasikan Multihimpunan dengan String Bit . . . 280
3.5.4 Pertanyaan Bacaan . . . 284
3.5.5 Soal Latihan . . . 285
3.5.6 Latihan Tambahan . . . 286
3.6 Pembuktian Kombinatorial . . . 288
3.6.1 Pratinjau Bagian . . . 288
3.6.2 Pola dalam Segitiga Pascal . . . 290
3.6.3 Pembuktian Lainnya . . . 295
3.6.4 Pertanyaan Bacaan . . . 300
3.6.5 Soal Latihan . . . 300
3.6.6 Latihan Tambahan . . . 301
3.7 Penerapan pada Peluang . . . 306
3.7.1 Pratinjau Bagian . . . 306
3.7.2 Menghitung Peluang . . . 308
3.7.3 Aturan Peluang . . . 311
3.7.4 Peluang Bersyarat . . . 317

3.7.5 Pertanyaan Bacaan . . . 320
3.7.6 Soal Latihan . . . 320
3.7.7 Latihan Tambahan . . . 323
3.8 Pencacahan Lanjut dengan Prinsip Inklusi–Eksklusi . . . 325
3.8.1 Pratinjau Bagian . . . 325
3.8.2 Prinsip Inklusi–Eksklusi untuk Multihimpunan . . . 327
3.8.3 Mencacah Permutasi Tanpa Titik Tetap . . . 331
3.8.4 Mencacah Fungsi . . . 333
3.8.5 Soal Latihan . . . 339
3.8.6 Latihan Tambahan . . . 340
3.9 Ringkasan Bab . . . 342
Tinjauan Bab . . . 344

4 Barisan **349**

4.1 Mendeskripsikan Barisan . . . 349
4.1.1 Pratinjau Bagian . . . 349
4.1.2 Barisan dan Rumus . . . 351
4.1.3 Jumlah Parsial dan Selisih . . . 358
4.1.4 Barisan dalam Python . . . 360
4.1.5 Pertanyaan Bacaan . . . 361
4.1.6 Soal Latihan . . . 362
4.1.7 Latihan Tambahan . . . 363
4.2 Laju Pertumbuhan . . . 366
4.2.1 Pratinjau Bagian . . . 366
4.2.2 Barisan Aritmetika . . . 368
4.2.3 Barisan Geometri . . . 370
4.2.4 Melampaui Barisan Aritmetika dan Geometri . . . 372
4.2.5 Pertanyaan Bacaan . . . 373
4.2.6 Soal Latihan . . . 374
4.2.7 Latihan Tambahan . . . 375
4.3 Barisan Polinomial . . . 378
4.3.1 Pratinjau Bagian . . . 378
4.3.2 Menjumlahkan Barisan Aritmetika: Balikkan dan Jumlahkan . . . 380
4.3.3 Polinomial Berderajat Lebih Tinggi . . . 383
4.3.4 Menyelesaikan Sistem Persamaan dengan Teknologi . . . 388
4.3.5 Pertanyaan Bacaan . . . 390
4.3.6 Soal Latihan . . . 390
4.3.7 Latihan Tambahan . . . 392
4.4 Barisan Eksponensial . . . 395
4.4.1 Pratinjau Bagian . . . 395
4.4.2 Menjumlahkan Barisan Geometri: Kalikan, Geser, dan Kurangkan . . . 397
4.4.3 Teknik Akar Karakteristik . . . 399
4.4.4 Pertanyaan Bacaan . . . 403

4.4.5 Soal Latihan . . . 403
4.4.6 Latihan Tambahan . . . 404
4.5 Pembuktian dengan Induksi . . . 406
4.5.1 Pratinjau Bagian . . . 406
4.5.2 Penalaran Rekursif . . . 407
4.5.3 Memformalkan Pembuktian . . . 408
4.5.4 Contoh . . . 409
4.5.5 Pertanyaan Bacaan . . . 413
4.5.6 Soal Latihan . . . 414
4.5.7 Latihan Tambahan . . . 417
4.6 Induksi Kuat . . . 421
4.6.1 Pratinjau Bagian . . . 421
4.6.2 Bagi dan Taklukkan . . . 423
4.6.3 Pertanyaan Bacaan . . . 426
4.6.4 Soal Latihan . . . 426
4.6.5 Latihan Tambahan . . . 428
4.7 Ringkasan Bab . . . 431
Tinjauan Bab . . . 432

5 Meninjau Kembali Struktur Diskret **437**

5.1 Himpunan . . . 437
5.1.1 Notasi . . . 437
5.1.2 Hubungan Antarhimpunan . . . 442
5.1.3 Operasi pada Himpunan . . . 444
5.1.4 Diagram Venn . . . 447
5.1.5 Latihan . . . 449
5.2 Fungsi . . . 453
5.2.1 Mendeskripsikan Fungsi . . . 454
5.2.2 Surjeksi, Injeksi, dan Bijeksi . . . 459
5.2.3 Citra dan Citra Invers . . . 462
5.2.4 Latihan . . . 465

6 Topik Tambahan **473**

6.1 Fungsi Pembangkit . . . 473
6.1.1 Menyusun Fungsi Pembangkit . . . 474
6.1.2 Pengambilan Selisih . . . 477
6.1.3 Perkalian dan Jumlah Parsial . . . 480
6.1.4 Menyelesaikan Relasi Rekurensi dengan Fungsi Pembangkit . . . 481
6.1.5 Latihan . . . 482
6.2 Pengantar Teori Bilangan . . . 485
6.2.1 Keterbagian . . . 485
6.2.2 Kelas Sisa . . . 488
6.2.3 Sifat-Sifat Kongruensi . . . 491
6.2.4 Menyelesaikan Kongruensi . . . 495

6.2.5 Menyelesaikan Persamaan Diofantin Linear 497
6.2.6 Latihan 501

Lampiran

A Petunjuk Terpilih **505**

B Penyelesaian Terpilih **517**

C Daftar Simbol **583**

Bagian Akhir

Indeks **585**

BAB 0

PENDAHULUAN DAN DASAR-DASAR

Selamat datang di Matematika Diskret. Jika ini pertama kalinya Anda menjumpai bidang ini, Anda mungkin akan merasa bahwa matematika diskret cukup berbeda dari bidang matematika lainnya. Anda bahkan mungkin belum tahu apa itu matematika diskret! Semoga pendahuluan singkat ini dapat memberi gambaran tentang apa yang dipelajari dalam bidang ini dan apa yang dapat Anda harapkan seiring berlanjutnya studi Anda.

0.1 APA ITU MATEMATIKA DISKRET?

dis·kret / dis'kret.

Adjektiva: Terpisah satu per satu dan berbeda.

Sinonim: terpisah - lepas - berbeda - abstrak.

Mendefinisikan *matematika diskret* itu sulit karena mendefinisikan *matematika* juga sulit. Apa itu matematika? Ilmu tentang bilangan? Sebagian memang demikian, tetapi Anda juga mempelajari fungsi, garis, segitiga, paralelepiped, vektor, dan .... Atau mungkin Anda ingin mengatakan bahwa matematika adalah kumpulan alat yang memungkinkan Anda memecahkan masalah. Masalah seperti apa? Ya, masalah yang melibatkan bilangan, fungsi, garis, segitiga, ... Apa pun pemahaman Anda tentang matematika, cobalah terapkan konsep "diskret" kepadanya, sebagaimana didefinisikan di atas. Sebagian matematika pada dasarnya membahas *hal-hal* yang terpisah satu per satu dan berbeda.

Dalam kuliah aljabar atau kalkulus, Anda mungkin pernah menjumpai suatu himpunan bilangan tertentu (mungkin himpunan tersebut merupakan daerah hasil suatu fungsi). Anda akan menyatakan himpunan ini sebagai suatu interval: $[0, \infty)$ adalah daerah hasil $f(x) = x^2$ karena himpunan keluaran fungsi tersebut mencakup semua bilangan real yang lebih besar dari atau sama dengan 0. Himpunan bilangan ini TIDAK diskret. Bilangan-bilangan dalam himpunan tersebut sama sekali tidak benar-benar terpisah. Bahkan, ambillah sembarang dua bilangan dalam himpunan itu; di antara keduanya terdapat tak terhingga banyak bilangan lain yang juga termasuk dalam himpunan tersebut.

Matematika diskret tetap dapat mengajukan pertanyaan tentang daerah hasil suatu fungsi, tetapi himpunannya bukan berupa interval. Perhatikan fungsi yang memberikan jumlah anak dari setiap orang yang membaca ini. Apa daerah hasilnya? Saya menduga kira-kira $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Mungkin 5 atau 6 juga termasuk.[1] Namun, tentu tidak seorang pun yang membaca ini memiliki 1.32419 anak. Himpunan keluaran ini memang *diskret* karena unsur-unsurnya terpisah. Masukan fungsi

[1] Bahkan bilangan asli yang lebih besar untuk nenek tua yang tinggal di dalam sepatu.

tersebut juga membentuk himpunan diskret karena setiap masukan adalah seorang individu.

Ada banyak objek matematika diskret selain himpunan bilangan; beberapa di antaranya akan kita perkenalkan dalam Subbab 0.2. Mempelajari **struktur** diskret ini merupakan fokus utama matematika diskret dan buku ini. Namun, kita ingin mempelajari struktur-struktur ini karena struktur tersebut menyediakan cara untuk memodelkan masalah "dunia nyata".[2]

Untuk memperoleh gambaran tentang bidang ini, mari kita perhatikan jenis-jenis masalah yang Anda pecahkan dalam matematika diskret. Berikut beberapa contoh sederhana:

Selidiki!

Catatan: Di sepanjang buku ini Anda akan menjumpai kegiatan Selidiki! *seperti kegiatan berikut. Jawablah pertanyaan-pertanyaannya sebaik mungkin agar Anda memperoleh gambaran tentang materi yang akan dibahas selanjutnya.*

1. Matematikawan paling populer di dunia mengadakan pesta untuk semua temannya. Untuk membuka acara, mereka memutuskan bahwa semua orang harus berjabat tangan. Dengan mengandaikan bahwa kesepuluh orang di pesta itu masing-masing berjabat tangan dengan setiap orang lain (tetapi tentu saja tidak dengan dirinya sendiri) tepat satu kali, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?

2. Dalam acara pemanasan Kontes Makan Hot Dog Para Bintang Oscar, Al memakan satu hot dog. Bob kemudian mengunggulinya dengan memakan tiga hot dog. Tidak mau kalah, Carl memakan lima. Hal ini berlanjut dengan setiap peserta memakan dua hot dog lebih banyak daripada peserta sebelumnya. Berapa banyak hot dog yang dimakan Zeno (peserta ke-26 sekaligus peserta terakhir)? Berapa jumlah seluruh hot dog yang dimakan?

3. Setelah menggali selama berminggu-minggu, akhirnya Anda tiba di ruang pemakaman. Ruangan itu kosong kecuali dua peti besar. Pada masing-masing peti terukir sebuah pesan (anehnya dalam bahasa Indonesia):

   Tepat satu dari kedua peti ini berisi harta karun, sedangkan peti lainnya dipenuhi kalajengking abadi yang mematikan.

   Untuk masing-masing peti, jika pesan pada peti itu benar, maka peti tersebut berisi harta karun.

[2]Harus diakui bahwa banyak masalah yang dibahas dalam buku ini sengaja direkayasa dan jelas bersifat fiktif, tetapi semoga Anda dapat melihat bagaimana masalah-masalah sederhana ini dapat digeneralisasi sehingga benar-benar merepresentasikan masalah yang penting bagi orang-orang dalam kenyataan.

Masalahnya, Anda tidak tahu apakah pesan-pesan tersebut benar atau salah. Apa yang akan Anda lakukan?

4. Pada zaman dahulu kala, lima kota kecil memutuskan untuk membangun jalan yang langsung menghubungkan setiap pasangan kota. Walaupun kota-kota itu memiliki banyak uang untuk membangun jalan sepanjang dan berkelok-kelok sesuka mereka, sangatlah penting agar jalan-jalan itu tidak berpotongan satu sama lain (karena rambu berhenti belum ditemukan). Selain itu, terowongan dan jembatan tidak diizinkan karena alasan moral. Mungkinkah setiap kota tersebut membangun jalan menuju masing-masing dari keempat kota lainnya tanpa membuat satu pun perpotongan?

Ketika mempertimbangkan masalah-masalah di atas, jangan khawatir jika penyelesaiannya belum tampak jelas bagi Anda. Di sini kita lebih tertarik pada jenis informasi yang diperlukan agar dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut. Bagaimana kita dapat merepresentasikan situasi itu menggunakan objek-objek yang terpisah satu per satu dan berbeda? Jangan lanjutkan membaca sebelum setidaknya memikirkan hal ini untuk setiap pertanyaan.

Siap? Berikut beberapa hal yang mungkin telah Anda pikirkan:

1. Orang-orang di pesta tersebut adalah individu-individu. Kita dapat mempertimbangkan *himpunan* orang-orang itu. Kita juga dapat mempertimbangkan himpunan pasangan orang, karena tepat dua orang diperlukan untuk berjabat tangan. Jadi, pertanyaan sesungguhnya adalah: berapa banyak pasangan yang dapat dibuat menggunakan unsur-unsur dari himpunan beranggota 10?

   Sebagai contoh, jika ada tiga orang di pesta tersebut, yang praktis saja kita beri nama 1, 2, dan 3, maka pasangan-pasangannya adalah $(1, 2)$, $(1, 3)$, dan $(2, 3)$. Atau perlukah kita menyertakan pula $(2, 1)$, $(3, 1)$, dan $(3, 2)$?

2. Untuk menghitung banyaknya hot dog yang dimakan, baik oleh seorang individu maupun secara keseluruhan, kita dapat menggunakan **barisan** bilangan bulat. Suku ke-n dalam barisan tersebut dapat menyatakan banyaknya hot dog yang dimakan oleh peserta ke-n. Kita dapat mempertimbangkan barisan kedua, yang juga terdiri atas bilangan bulat, yang memberikan jumlah keseluruhan hot dog yang dimakan bersama-sama oleh n peserta pertama.

   Dengan demikian, penyelesaian masalah tersebut adalah nilai suku ke-26 dalam barisan. Untuk membantu menemukannya, kita dapat mempertimbangkan laju pertumbuhan barisan-barisan tersebut serta bagaimana kedua barisan itu saling berhubungan.

3. Pertanyaan logika juga termasuk dalam cakupan matematika diskret: Setiap pernyataan dapat memiliki *nilai* Benar atau Salah (tanpa kemungkinan di

antaranya). Untuk menjawab pertanyaan seperti persoalan peti berisi kalajengking, kita harus memahami struktur pernyataan serta bagaimana nilai kebenaran bagian-bagian pernyataan saling berinteraksi untuk menentukan nilai kebenaran seluruh pernyataan.

4. Pertanyaan terakhir membahas struktur diskret yang disebut **graf**, yang tidak boleh disamakan dengan grafik suatu fungsi atau himpunan titik. Kita dapat menggunakan graf untuk menyatakan unsur-unsur mana dalam suatu himpunan (atau kota-kota mana) yang saling berhubungan (atau terhubung oleh jalan). Dalam kasus ini, pertanyaannya menjadi: dapatkah kita menggambar graf dengan lima simpul (kota) dan sepuluh sisi (jalan) sedemikian sehingga tidak ada dua sisi yang berpotongan?

Keempat masalah di atas menggambarkan empat topik utama buku ini: **kombinatorika** (teori tentang cara berbagai hal *dikombinasikan*; khususnya, cara menghitung kemungkinan-kemungkinan tersebut), **barisan**, **logika simbolik**, dan **teori graf**. Namun, ada topik-topik lain yang juga dianggap sebagai bagian dari matematika diskret, termasuk ilmu komputer, aljabar abstrak, teori bilangan, teori permainan, probabilitas, dan geometri (beberapa di antaranya, terutama dua yang terakhir, memiliki versi diskret maupun nondiskret).

Pada akhirnya, cara terbaik untuk mempelajari matematika diskret adalah dengan *mengerjakannya*. Mari kita mulai! Sebelum mulai menjawab masalah-masalah yang lebih rumit (dan menyenangkan), kita akan meninjau secara sangat singkat jenis-jenis struktur diskret yang akan kita gunakan.

Pertanyaan Bacaan

Setiap bagian buku ini akan diakhiri dengan beberapa *Pertanyaan Bacaan* seperti yang terdapat di bawah ini. Pertanyaan-pertanyaan tersebut dirancang untuk membantu Anda merenungkan apa yang telah Anda baca. Secara khusus, pertanyaan bacaan terakhir meminta Anda mengajukan pertanyaan Anda sendiri. Memikirkan apa yang belum Anda ketahui merupakan cara yang sangat baik untuk memperdalam pemahaman atas apa yang sudah Anda ketahui.

1. Saat ini, bagaimana Anda akan menjelaskan pokok bahasan matematika **diskret** jika Anda sedang menceritakan mata kuliah yang Anda ikuti kepada teman-teman? Tulislah satu atau dua kalimat.

2. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tulislah setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda penasaran.

0.2 Struktur Diskret

0.2.1 Pendahuluan

Selidiki!

Satu set domino dobel-enam terdiri atas keping-keping yang memuat pasangan bilangan, masing-masing dari 0 sampai 6. Berapa banyak keping dalam satu set domino dobel-enam? Berapa banyak domino dalam satu set domino dobel-sembilan? Berapa banyak domino dalam satu set domino dobel-n?

Cobalah 0.2.1

Luangkan beberapa menit untuk memikirkan pertanyaan-pertanyaan di atas. Kemudian tulislah 2-3 kalimat yang menggambarkan pemikiran Anda. Anda tidak perlu menemukan solusi lengkap, tetapi jelaskan apa yang dapat Anda coba dan apa yang menurut Anda mungkin perlu dilakukan untuk menemukan solusi.

Kita menggunakan pendekatan pemecahan masalah untuk mempelajari matematika diskret: Kita akan menelaah beragam pertanyaan yang berciri diskret dan memikirkan cara menjawabnya (serta membuktikan bahwa jawaban kita benar). Ini bukan satu-satunya cara mempelajari matematika diskret. Pendekatan lain adalah mempelajari alat-alat yang digunakan untuk menyelesaikan masalah. Seandainya kita mahasiswa seni, kita dapat mempelajari kuas, kuda-kuda, dan komposisi cat, yang tentu menarik, tetapi menurut saya melukis sendiri pohon-pohon kecil yang ceria itu lebih menyenangkan.

Meskipun demikian, memahami alat memang membantu kita menggunakannya. Karena itu, dalam bagian ini kita akan menelaah beberapa alat dasar yang digunakan dalam matematika diskret. Kita akan kembali membahasnya sepanjang pembelajaran dan memahaminya lebih baik ketika diperlukan.

Alat-alat dalam bidang kita disebut **struktur diskret**. Struktur diskret adalah objek matematika yang kita gunakan untuk merepresentasikan bagian-bagian dari masalah yang sedang kita selesaikan. "Struktur" merupakan kata yang tepat di sini karena "benda-benda" ini memiliki batasan cukup kaku yang menjadikannya sebagaimana adanya, sama seperti gedung apartemen akan memiliki karakteristik yang berbeda dari hanggar pesawat atau jembatan gantung (semuanya merupakan jenis struktur fisik, bukan struktur matematika—sekadar untuk memperjelasnya secara berlebihan dan merusak metafora tadi).

Struktur yang paling sering kita gunakan dalam matematika diskret adalah **himpunan**, **fungsi**, **barisan**, **relasi**, dan **graf**. Sekarang kita akan meninjau masing-masing secara singkat. Seiring kemajuan pembelajaran kita, masing-masing akan

dikaji secara lebih terperinci.

0.2.2 Himpunan

Himpunan adalah kumpulan elemen yang *tidak terurut*. Definisi ini memang agak samar, tetapi cukup untuk keperluan kita, kecuali jika kita ingin menghabiskan satu buku penuh untuk memahami himpunan secara lebih tepat. Seluruh matematika dapat didefinisikan hanya dengan menggunakan himpunan (bahkan bilangan pun dapat dipandang sebagai himpunan), tetapi itu juga bukan yang akan kita lakukan. Sebaliknya, kita ingin dapat membicarakan kumpulan bilangan dan objek lain, lalu mengumpulkannya dalam sesuatu yang kita sebut **himpunan**.

Kita dapat mendeskripsikan himpunan dengan menyatakan secara tepat elemen mana saja yang menjadi anggota himpunan tersebut. Keanggotaan ini dapat kita nyatakan dengan kata-kata (misalnya, misalkan A adalah himpunan semua bilangan asli yang kurang dari 10), dengan mencantumkan semua elemennya secara eksplisit (misalnya, $A = \{3, 5, 7\}$), atau dengan menggunakan apa yang disebut **deskripsi pembentuk himpunan** (juga disebut **notasi pembentuk himpunan**). Contohnya adalah $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$. Kita membacanya sebagai "A adalah himpunan bilangan asli yang memenuhi sifat kurang dari 10." Secara lebih tepat, simbol $\mathbb{N}$ menyatakan bilangan asli, yang juga merupakan suatu himpunan: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (ini menunjukkan cara lain untuk mendeskripsikan himpunan). Simbol $\in$ berarti "merupakan elemen dari". Simbol : dibaca "sedemikian sehingga" dan memberi tahu kita bahwa bagian sesudahnya merupakan *syarat* yang harus dipenuhi oleh elemen-elemen himpunan tersebut.

> **Omong-omong...** Dalam buku ini, kita mendefinisikan **bilangan asli** sebagai bilangan cacah yang dimulai dari 0. Tidak semua buku memasukkan 0 ke dalam himpunan ini. Hal itu sangat bergantung pada bidang matematika yang Anda pelajari.

Karena himpunan yang sama dapat dideskripsikan dengan beberapa cara, kita perlu berhati-hati dalam memahami arti dua himpunan yang sama atau berbeda. Suatu himpunan *ditentukan* oleh keanggotaannya, sehingga keempat bentuk berikut mendeskripsikan himpunan yang persis sama:

1. $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. $\{1, 2, 1 + 1, 1 + 2, 2 + 2\}$. (Berapa banyak bilangan yang termasuk dalam himpunan ini? Jawabannya bukan 5.)
3. $\{2, 4, 1, 3\}$. (Yang penting hanyalah elemen apa saja yang terdapat dalam kumpulan tersebut, bukan urutan penulisannya.)
4. $\{x \in \mathbb{N} : x < 5 \text{ dan } x \geq 1\}$.

Ada banyak hal yang dapat kita *lakukan* dengan himpunan, yang akan kita bahas lebih terperinci saat diperlukan. Kita akan melihat bahwa sering kali bermanfaat

untuk membentuk himpunan baru dari himpunan yang sudah ada (misalnya dengan mengambil **gabungan** atau **irisan** himpunan), membandingkan himpunan (menanyakan apakah suatu himpunan merupakan **himpunan bagian** dari himpunan lain), dan mencari banyaknya elemen suatu himpunan (yang disebut **kardinalitas**). Kita mungkin juga ingin memasangkan elemen suatu himpunan dengan elemen himpunan lain. Untuk melakukannya, kita dapat menggunakan **fungsi**, yang akan dibahas berikutnya. Hebatnya, kita juga dapat menggunakan himpunan itu sendiri untuk mendeskripsikan fungsi. Mari kita lihat.

0.2.3 Fungsi

Salah satu cara mendefinisikan **fungsi** adalah sebagai aturan yang memasangkan setiap masukan dengan tepat satu keluaran. Keluaran tersebut disebut **citra** dari masukan. Fungsi juga dilengkapi dengan **domain**, yaitu himpunan semua masukan, dan **kodomain**, yaitu himpunan semua keluaran yang diperbolehkan. Kita juga dapat membicarakan **daerah hasil** fungsi, yaitu himpunan semua keluaran yang *benar-benar dihasilkan*, atau dengan kata lain, himpunan semua *citra* elemen-elemen domain.

Kita menulis $f : X \to Y$ untuk mendeskripsikan fungsi bernama f dengan domain X dan kodomain Y. Namun, ini belum memberi tahu kita *fungsi yang mana* yang merupakan f. Untuk mendefinisikan fungsi tersebut, kita harus mendeskripsikan aturannya. Hal ini sering dilakukan dengan rumus (misalnya, $f(x) = x^2$ menyatakan bahwa setiap elemen domain dipetakan ke kuadratnya), atau dengan kata-kata (seperti ketika kita baru saja mendeskripsikan fungsi pengkuadratan). Kita juga dapat mendefinisikan fungsi dengan tabel atau grafik.

Hal utama yang menjadikan suatu aturan sebagai *fungsi* adalah bahwa setiap masukan memiliki *tepat satu* keluaran. Dengan kata lain, aturan tersebut harus terdefinisi dengan baik. Keluaran apa yang kita pasangkan dengan masukan 7? Untuk suatu fungsi tertentu, hanya boleh ada satu jawaban.

Karena fungsi memetakan suatu himpunan (domain) ke himpunan lain (kodomain), terdapat hubungan yang jelas antara himpunan dan fungsi. Namun, ada hubungan lain yang patut diperhatikan: grafik suatu fungsi sering dideskripsikan sebagai ***himpunan*** titik. Berikut ini contohnya.

Contoh 0.2.2

Perhatikan fungsi $f : \{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 6\}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x$. Jika kita ingin menggambar grafik fungsi ini, kita akan menggambar titik-titik $(1, 2)$, $(2, 4)$, dan $(3, 6)$ (tetapi kita tidak akan menghubungkan titik-titik tersebut dengan garis karena kita sedang mempelajari matematika diskret; domainnya hanya memuat tiga elemen, bukan tak terhingga banyaknya elemen di antaranya).

Jadi, fungsi tersebut berasosiasi dengan himpunan titik $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$. Bahkan, himpunan titik ini berasosiasi secara tepat dengan fungsi ini (dan hanya fungsi ini). Dengan demikian, kita dapat memandang himpunan titik

ini *sebagai fungsi itu sendiri*.

Tentu saja, di sini kita menggunakan sebuah objek matematika: **pasangan terurut**. Objek ini bukan himpunan (karena himpunan tidak terurut). Bagaimana seharusnya kita membicarakan objek-objek terurut? Kita akan membahas pertanyaan ini dalam bagian berikutnya.

Ada satu pertimbangan penting lagi tentang cara kita mendefinisikan fungsi dengan suatu aturan. **Rumus tertutup** adalah rumus yang memberikan setiap keluaran melalui aturan eksplisit yang hanya didasarkan pada masukannya. Inilah yang biasanya kita bayangkan sebagai rumus. Sebagai contoh, $f(n) = 3n + 1$ adalah rumus tertutup karena untuk mencari $f(5)$, misalnya, kita mengambil masukan 5 dan melakukan sesuatu terhadapnya: mengalikannya dengan 3, lalu menambahkan 1.

Lalu, bentuk lain suatu rumus itu apa? **Definisi rekursif** suatu fungsi memberi tahu kita cara menghitung keluaran untuk suatu masukan *berdasarkan keluaran-keluaran lain dari fungsi tersebut*. Sebagai contoh, kita dapat menetapkan bahwa $f(n) = 2 \cdot f(n-1)$. Jika kita juga menetapkan **syarat awal** bahwa $f(0) = 3$, kita dapat memperoleh $f(1) = 2 \cdot 3 = 6$, lalu $f(2) = 2 \cdot 6 = 12$, dan seterusnya. Berapakah $f(5)$ di sini? Satu-satunya cara menjawabnya adalah dengan mencari $f(4)$, yang berarti kita perlu mencari $f(3)$, dan itu dapat kita lakukan karena kita telah menghitung $f(2)$.

Definisi rekursif fungsi mungkin kurang berguna untuk mencari keluaran tertentu, tetapi sering kali lebih mudah ditetapkan bagi suatu penerapan tertentu. Kita akan mengkaji fenomena ini lebih jauh ketika mempelajari barisan. Omong-omong soal barisan...

0.2.4 Barisan

Terkadang kita tidak hanya tertarik pada kumpulan bilangan, tetapi juga pada *urutan* kemunculan bilangan-bilangan tersebut. Dalam kasus seperti itu, kita tidak dapat menggunakan *himpunan* karena himpunan tidak membedakan urutan elemennya. Sebagai gantinya, kita menelaah **barisan**.

Kita akan menelaah barisan **hingga** maupun **tak hingga**. Barisan hingga dapat berupa sesuatu yang sederhana seperti $(1, 2, 3)$; ini adalah barisan dengan 3 elemen dalam urutan tertentu tersebut. Kita juga dapat menyebutnya **tripel terurut**, sebagaimana $(7, 3)$ merupakan pasangan terurut. Secara umum, kita dapat menyebutnya n**-tupel** jika memiliki n elemen (kita mengasumsikan bahwa tupel terurut).

Perbedaan utama antara barisan $(1, 2, 3)$ dan himpunan $\{1, 2, 3\}$ adalah bahwa dalam barisan kita "memedulikan" urutan. Artinya, barisan $(1, 2, 3)$ berbeda dari barisan $(2, 3, 1)$, sedangkan himpunan $\{1, 2, 3\}$ identik dengan $\{2, 3, 1\}$.

Kita akan sering menggunakan barisan sebagai alat pencacahan. Sebagai contoh, pertanyaan pencacahan yang sangat sederhana adalah, "Berapa banyak roda yang dimiliki 100 mobil?" Alih-alih hanya menjawab satu pertanyaan ini, kita dapat

menggeneralisasikannya dan menanyakan berapa banyak roda yang dimiliki n mobil, lalu memperoleh barisan jawaban. Hasilnya adalah barisan tak hingga $(4, 8, 12, \ldots)$. Urutan kemunculan kelipatan 4 ini penting karena setiap bilangan dalam barisan bersesuaian dengan versi tertentu dari pertanyaan tersebut.

Kita dapat memandang barisan bilangan sebagai daftar terurut. Kita dapat menyebut **suku-sukunya** secara sederhana sebagai

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

dan dapat menyebut keseluruhan barisan sebagai $(a_n)_{n\geq 0}$ atau $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Jika ingin sedikit lebih tepat dan abstrak, kita dapat memandang barisan sebagai *fungsi*. Domainnya adalah bilangan asli atau suatu himpunan bagian yang terdiri atas bilangan-bilangan asli berurutan (seperti $\{1, 2, 3, 4\}$). Kodomainnya adalah suatu himpunan. Kita memandang domain sebagai posisi-posisi dalam barisan dan citra dari masukan-masukan tersebut sebagai suku-suku barisan.

Sebagai contoh, kita dapat menelaah barisan Fibonacci $(f_n)_{n\geq 1}$, yang dimulai dengan $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. Berapakah suku ke-4 barisan tersebut? Kita dapat mengatakan $f_4 = 3$ (dengan asumsi bahwa angka 1 yang pertama adalah suku pertama, bukan suku ke-0). Perhatikan bahwa hanya boleh ada satu suku ke-4. Untuk setiap nilai n tertentu, hanya boleh ada satu suku ke-n. Jadi, untuk setiap masukan (posisi suku), hanya ada satu keluaran (suku tersebut). Menulis $f(4) = 3$ sepenuhnya masuk akal, dan bentuk itu memang tampak seperti fungsi. Namun, kita lebih suka menggunakan subskrip.

Kita juga dapat mendeskripsikan suku-suku suatu barisan dengan menggunakan tabel. Kita dapat menuliskan sesuatu seperti berikut:

n	1	2	3	4	...
a_n	1	3	6	10	...

Bentuk ini persis seperti cara merepresentasikan fungsi, meskipun tabel tersebut mendeskripsikan barisan **bilangan segitiga** (nanti kita akan melihat mengapa bilangan-bilangan itu disebut demikian).

Karena barisan adalah fungsi, kita dapat menggunakan setiap teknik untuk mendeskripsikan fungsi guna mendeskripsikan barisan. Secara khusus, kita dapat memberikan **rumus tertutup** untuk suatu barisan dengan memberikan fungsi bagi suku ke-n secara eksplisit. Sebagai contoh,

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sebagai alternatif, kita dapat mendefinisikan barisan secara rekursif dengan menyatakan cara memperoleh suatu suku dari suku sebelumnya. Cara ini sangat berguna, khususnya untuk barisan Fibonacci:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; f_1 = 1, f_2 = 1.$$

Sebagian besar upaya kita dalam memahami barisan akan digunakan untuk mengambil suatu definisi rekursif dan mencari rumus tertutup bagi barisan tersebut.

Kita akan mempelajari hal ini, beserta semua hal lain yang berkaitan dengan barisan, dalam Bab 4.

0.2.5 Relasi

Bagaimana bilangan 2 dan 6 saling berhubungan? Ah, saya tahu: $2 < 6$. Selain itu, 6 merupakan kelipatan dari 2. Kedua bilangan tersebut juga sama-sama genap. Dan inilah fakta lainnya: Keduanya *tidak sama*. Keempat hal ini merupakan contoh **relasi**: kurang dari, kelipatan dari, sama-sama genap, tidak sama. Masih ada banyak lagi (tak terhingga banyaknya) relasi untuk pasangan bilangan.

Semua contoh di atas merupakan **relasi biner** karena menghubungkan dua elemen. Kita juga dapat menelaah relasi antara lebih dari dua elemen. Sebagai contoh, kita dapat menelaah relasi "tripel Pythagoras" pada tiga bilangan, yang berlaku tepat ketika ketiga bilangan itu merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku. Jadi, relasi tersebut berlaku untuk tripel $(3, 4, 5)$, tetapi tidak untuk $(4, 5, 6)$ (karena $3^2 + 4^2 = 5^2$, sedangkan $4^2 + 5^2 \neq 6^2$).

Perhatikan bahwa kita dapat membicarakan suatu pasangan atau tripel yang *memenuhi* suatu relasi. Kita dapat mengatakan bahwa suatu pasangan *termasuk* dalam relasi tersebut. Cara yang cermat dan formal untuk mendefinisikan relasi adalah sebagai *himpunan* pasangan terurut (atau tripel, dan seterusnya). Perhatikan himpunan (tak hingga) semua pasangan terurut (a, b) sedemikian sehingga $a < b$. Setiap elemen himpunan ini memuat bilangan-bilangan yang memenuhi relasi "kurang dari", dan setiap pasangan bilangan yang memenuhi relasi tersebut merupakan pasangan di dalam himpunan itu. Jadi, kita dapat mengatakan bahwa himpunan pasangan ini ***adalah*** relasi tersebut.

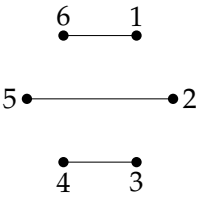
Relasi dapat memiliki beberapa sifat baku, dan menentukan apakah suatu relasi memiliki sifat tertentu sering kali dapat membantu kita memahami relasi itu dengan lebih baik. Sebagai contoh, relasi kurang dari bersifat **irrefleksif** karena tidak ada elemen yang kurang dari dirinya sendiri. Relasi ini juga **antisimetris** karena tidak ada bilangan berbeda a dan b sedemikian sehingga $a < b$ dan $b < a$. Relasi ini juga **transitif** karena jika $a < b$ dan $b < c$, maka harus berlaku $a < c$. Namun, ini hanyalah beberapa contoh sifat relasi.

Mengapa kita perlu memedulikan sifat-sifat ini? Ternyata beberapa kelompok sifat sering muncul bersama-sama, dan untuk kumpulan sifat semacam itu kita dapat membuktikan hasil umum tentang relasi-relasi yang memenuhinya. Jadi, jika kita dapat membuktikan bahwa suatu relasi bersifat **refleksif**, **simetris**, dan **transitif** (apa pun arti istilah-istilah itu), kita tahu bahwa relasi tersebut merupakan **relasi ekuivalensi**, sehingga kita juga tahu bahwa relasi itu memiliki banyak sifat lain. Sebagian besar matematika diskret membahas kajian jenis-jenis relasi tertentu. Salah satu favorit saya adalah relasi yang menghasilkan graf.

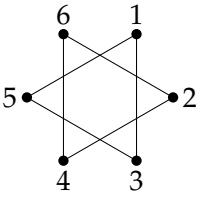
0.2.6 Graf

Perhatikan himpunan $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pasangan bilangan mana dari himpunan tersebut yang jumlahnya 7? Kita dapat memiliki $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, atau $\{3, 4\}$. Kita dapat

menggambarkan himpunan dan pasangan-pasangan (tak terurut) yang menarik itu (yakni, himpunan bagian beranggota dua) sebagai gambar yang disebut graf:



Di sisi lain, kita mungkin ingin menelaah pasangan bilangan yang jumlahnya genap. Dengan demikian, kita akan memperoleh gambar berikut.



Kita menyebut struktur diskret ini **graf**. Graf merupakan suatu jenis relasi yang bersifat **simetris** (jika a berelasi dengan b, maka b berelasi dengan a) dan **irrefleksif** (tidak ada elemen yang berelasi dengan dirinya sendiri).

Namun, kita umumnya memandang graf sebagai gambar titik-titik dan garis-garis, atau secara lebih tepat sebagai himpunan **simpul** bersama dengan himpunan **sisi**, dengan setiap sisi merupakan himpunan bagian beranggota dua dari himpunan simpul. Perhatikan bahwa bahkan di sini kita menggunakan struktur *himpunan* untuk mendefinisikan struktur *graf*.

Graf muncul dalam segala macam penerapan di dunia nyata: Di suatu kelas, beberapa mahasiswa saling berteman, jadi anggaplah para mahasiswa sebagai simpul dan hubungan pertemanan sebagai sisi. Dalam geografi, beberapa negara berbagi perbatasan, jadi anggaplah negara-negara sebagai simpul dan hubungkan sepasang simpul dengan suatu sisi jika kedua negara tersebut berbagi perbatasan. Mungkin Anda sedang merencanakan perjalanan dan ingin terbang dari Denver ke Paris. Apakah ada penerbangan langsung, atau Anda harus singgah di Newark? Dengan kata lain, apakah graf penerbangan memiliki sisi antara Denver dan Paris, atau hanya antara Denver dan Newark serta antara Newark dan Paris? Ketika kurir Amazon mengantar paket ke 10 rumah di lingkungan Anda, bagaimana aplikasinya mengetahui urutan pengantaran paket? Teori graf!

Kajian graf merupakan bidang tersendiri; banyak matematikawan meraih gelar doktor dalam bidang ini dan menulis ratusan makalah setiap tahun. Kita akan mulai menyelami permukaan bidang yang menarik ini dalam Bab 2.

0.2.7 Lebih Banyak Lagi Struktur

Daftar struktur kita dapat terus berlanjut, tetapi kita akan berhenti di sini. Kita hanya akan meluangkan sedikit waktu untuk menelaah **multihimpunan**, yang serupa dengan himpunan, kecuali bahwa multihimpunan dapat memiliki elemen

berulang. Karena ini bukan kelas geometri, kita tidak akan menelaah **geometri hingga** atau **desain** (yang berada di antara graf dan geometri). Struktur diskret berguna dalam ilmu komputer, tetapi kita tidak akan sampai mempelajari **senarai berantai** atau **pohon merah-hitam**. Walaupun aljabar abstrak merupakan bidang yang menarik, kita tidak akan sampai membahas **grup**, **gelanggang**, **matroid**, **poset**, **aljabar Boolean**, atau .... Semuanya merupakan contoh himpunan yang padanya kita mendefinisikan operasi tambahan dan mengkaji struktur aljabar dari cara himpunan dan operasi tersebut berinteraksi.

Intinya, matematika diskret itu luar biasa, dan Anda dapat menghabiskan beberapa masa hidup untuk mempelajarinya. Jadi, tunggu apa lagi? Mari kita terjun dan menyelesaikan sejumlah masalah.

0.2.8 Pertanyaan Bacaan

1. Ingat kembali masalah domino pada awal bagian ini. Kita menanyakan berapa banyak domino dalam satu *set* domino dobel-enam. Apakah ini benar-benar suatu himpunan dalam pengertian matematika kita? Struktur diskret apa yang akan Anda gunakan untuk merepresentasikan setiap domino secara individual?

2. Satu set domino dobel-nol hanya akan memuat satu domino (kedua sisinya menunjukkan 0). Satu set dobel-satu akan memuat domino tersebut ditambah domino $(1, 0)$ dan $(1, 1)$. Kita dapat melanjutkan dengan cara ini untuk membentuk suatu barisan set domino. Carilah tiga suku berikutnya dari barisan tersebut.

$1, 3, _ , _ , _ , ...$

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tulislah setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda penasaran.

Bab 1

Logika dan Pembuktian

Logika adalah kajian tentang konsekuensi. Jika diberikan beberapa pernyataan atau fakta matematis, kita ingin dapat menarik sejumlah kesimpulan. Sebagai contoh, andaikan saya memberi tahu Anda bahwa suatu fungsi bernilai real kontinu pada interval $[0, 1]$, dengan $f(0) = -1$ dan $f(1) = 5$. Dapatkah kita menyimpulkan bahwa terdapat suatu titik dalam $[0, 1]$ tempat grafik fungsi tersebut memotong sumbu x? Ya, berkat Teorema Nilai Antara dari kalkulus. Dapatkah kita menyimpulkan bahwa terdapat tepat satu titik seperti itu? Tidak. Setiap kali kita menemukan sebuah "jawaban" dalam matematika, sesungguhnya kita memiliki suatu argumen (yang mungkin tersembunyi).

Matematika pada hakikatnya berkenaan dengan menetapkan pernyataan-pernyataan umum (seperti Teorema Nilai Antara). Hal ini dilakukan melalui suatu argumen yang disebut pembuktian. Kita mulai dengan beberapa syarat yang diberikan, yaitu *premis* argumen kita, lalu dari premis-premis tersebut kita memperoleh konsekuensi yang menjadi perhatian kita, yaitu *kesimpulan*.

Masalahnya, sebagaimana tentu Anda ketahui dari berdebat dengan teman, tidak semua argumen merupakan argumen yang *baik*. Argumen yang buruk adalah argumen yang kesimpulannya tidak mengikuti premis-premisnya; dengan kata lain, kesimpulannya bukan konsekuensi dari premis-premis tersebut. Logika mengkaji hal-hal yang membuat suatu argumen baik atau buruk. Dengan kata lain, logika bertujuan menentukan kapan suatu kesimpulan merupakan, atau bukan merupakan, konsekuensi dari sekumpulan premis.

Kita akan memulai di Subbab 1.1 dengan membahas pernyataan, yaitu unsur pembangun argumen. Memahami apa yang tergolong pernyataan dan bentuk apa saja yang dapat dimiliki pernyataan merupakan langkah pertama untuk memahami argumen. Di Subbab 1.2, kita akan mengamati lebih dekat bagaimana pernyataan-pernyataan dapat digabungkan. Kemudian, di Subbab 1.3, kita akan melihat perangkat matematis apa yang dapat kita kembangkan untuk menganalisis pernyataan-pernyataan tersebut dan interaksi di antaranya dengan lebih baik. Terakhir, di Subbab 1.4 dan Subbab 1.5 kita akan menyatukan semuanya untuk melihat bagaimana perangkat-perangkat ini dapat digunakan dalam menyusun argumen dan membuktikan pernyataan.

1.1 Pernyataan Matematis

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Mengidentifikasi struktur logis pernyataan untuk menentukan nilai kebenarannya berdasarkan nilai kebenaran bagian-bagiannya.
2. Mengidentifikasi penggunaan kuantor dalam suatu pernyataan, dan menentukan nilai kebenaran pernyataan tersebut berdasarkan kuantor-kuantor itu.
3. Menerjemahkan pernyataan dari bahasa alami ke simbol logika dan sebaliknya.

1.1.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Ketika berjalan melewati sebuah hutan rekaan, Anda bertemu tiga troll yang menjaga sebuah jembatan. Masing-masing adalah seorang *kesatria*, yang selalu berkata benar, atau seorang *penipu*, yang selalu berdusta. Para troll tidak akan membiarkan Anda lewat sampai Anda dapat mengidentifikasi dengan tepat mana yang kesatria dan mana yang penipu. Setiap troll membuat satu pernyataan:

Troll 1: Jika saya seorang penipu, maka tepat ada dua kesatria di sini.

Troll 2: Troll 1 sedang berdusta.

Troll 3: Entah kami semua penipu, atau setidaknya salah satu dari kami adalah kesatria.

Troll mana berperan sebagai apa?

Cobalah 1.1.1

Luangkan beberapa menit untuk memikirkan masalah Penyelidikan di atas. Apa yang dapat Anda simpulkan jika Anda mengetahui bahwa Troll 1 memang seorang penipu (yaitu, pernyataannya salah)? Sampaikan pemikiran awal Anda tentang hal ini.

Untuk *mengerjakan* matematika, kita harus mampu *berbicara* dan *menulis* tentang matematika. Mungkin pengalaman Anda dengan matematika sejauh ini sebagian besar berkaitan dengan mencari jawaban numerik atas berbagai soal. Ketika kita mulai memasuki matematika yang lebih lanjut dan abstrak, menulis akan memainkan peran yang lebih menonjol dalam proses matematis.

Sebenarnya, tujuan utama matematika sebagai disiplin akademik tersendiri adalah menetapkan kebenaran-kebenaran matematis yang umum. Bagaimana kita dapat mengetahui apakah fakta-fakta ini, yang mungkin disebut *teorema* atau *proposisi*, benar? Kita menyusun argumen yang sahih, yang disebut *bukti*, untuk menetapkan kebenaran pernyataan tersebut. Di sini, argumen bukanlah pertengkaran seperti yang mungkin Anda alami dengan ibu Anda ketika berbeda pendapat mengenai menu makan malam. Sebaliknya, istilah ini memiliki definisi teknis.

Definisi 1.1.2 Argumen.

Sebuah **argumen** adalah rangkaian pernyataan; pernyataan terakhir disebut **kesimpulan** , sedangkan pernyataan lainnya disebut **premis**.

Suatu argumen disebut **sahih** apabila kesimpulannya pasti benar setiap kali semua premisnya benar. Suatu argumen **tidak sahih** jika argumen tersebut tidak sahih; artinya, semua premis dapat benar, tetapi kesimpulannya masih mungkin salah.

Suatu argumen disebut **kukuh** apabila argumen itu sahih dan semua premisnya benar. Sebuah **bukti** atas suatu pernyataan adalah argumen kukuh yang kesimpulannya merupakan pernyataan tersebut.

Omong-omong... Definisi kita untuk **argumen**, **argumen sahih**, dan **argumen kukuh** sama dengan definisi yang digunakan dalam filsafat, disiplin akademik utama lainnya yang mengkaji logika dan penalaran.

Untuk menentukan apakah kita memiliki bukti atas suatu pernyataan, kita harus memutuskan apakah setiap premis benar dan apakah argumennya sahih: apakah kesimpulan *mengikuti* premis-premis tersebut. Bagaimana kita dapat melakukannya?

Contoh 1.1.3

Perhatikan dua argumen berikut:

Jika Edith memakan sayurannya, maka ia boleh mendapat kue.
Edith memakan sayurannya.

$\therefore$ Edith mendapat kue.

Florence harus memakan sayurannya untuk mendapat kue.
Florence memakan sayurannya.

$\therefore$ Florence mendapat kue.

(Simbol "$\therefore$" berarti "oleh karena itu")

Apakah argumen-argumen ini sahih?

Penyelesaian. Apakah Anda setuju bahwa argumen pertama sahih, sedangkan argumen kedua tidak? Kita akan segera mengembangkan pemahaman yang lebih baik tentang logika dalam analisis ini, tetapi jika intuisi Anda sejalan dengan penilaian tersebut, berarti Anda sudah berada di jalur yang tepat.

Perhatikan bahwa kedua argumen tersebut tampak hampir identik. Edith dan Florence sama-sama memakan sayuran mereka. Dalam kedua kasus, ada hubungan antara memakan sayuran dan memperoleh kue. Namun, kita menyatakan bahwa menyimpulkan Edith mendapat kue itu sahih, sedangkan menyimpulkan Florence mendapat kue tidak sahih. Perbedaannya pasti terletak pada hubungan antara memakan sayuran dan memperoleh kue. Kita perlu terampil membaca dan memahami kalimat-kalimat ini. Apakah kedua kalimat itu memiliki arti yang sama?

Sayangnya, dalam bahasa sehari-hari kita sering kurang cermat, dan Anda mungkin tergoda untuk mengatakan bahwa keduanya ekuivalen. Namun, perhatikan bahwa hanya karena Florence *harus* memakan sayurannya, kita tidak menyatakan bahwa tindakan tersebut sudah *cukup* (misalnya, ia mungkin juga perlu membersihkan kamarnya). Dalam praktik sehari-hari (nonmatematis), Anda mungkin tergoda untuk mengatakan bahwa "arah sebaliknya" ini tersirat. Dalam matematika, kita tidak pernah mendapat kemewahan semacam itu.

Catatan 1.1.4 Argumen-argumen dalam contoh di atas menggambarkan pokok penting lainnya: Sekalipun Anda tidak peduli pada kemajuan pengetahuan manusia di bidang matematika, kemahiran menganalisis argumen tetaplah berguna. Begitu pula sekalipun Anda tidak ingin memberi nenek Anda kue. Jika Anda *menggunakan* matematika untuk memecahkan masalah dalam disiplin lain, Anda tetap perlu menunjukkan bahwa solusi Anda benar. Anda sebaiknya memiliki argumen yang bagus untuk itu!

Karena argumen tersusun dari pernyataan, kita harus menyepakati apa yang dianggap sebagai pernyataan.

Definisi 1.1.5

Sebuah **pernyataan** adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah.

Jika kalimat-kalimat dalam suatu argumen tidak dapat bernilai benar atau salah, tidak akan ada cara untuk menentukan apakah argumen itu sahih, karena kesahihan menggambarkan hubungan antara nilai kebenaran premis dan kesimpulan.

Tujuan bagian ini adalah mengeksplorasi berbagai "bentuk" yang dapat dimiliki sebuah pernyataan. Kita akan melihat bahwa pernyataan yang lebih rumit dapat

disusun dari pernyataan yang lebih sederhana dengan cara yang sepenuhnya menentukan nilai kebenarannya berdasarkan nilai kebenaran bagian-bagiannya.

Kegiatan Pratinjau

Sebelum melanjutkan ke isi utama bagian ini, selesaikan kegiatan pratinjau berikut untuk mulai memikirkan jenis pertanyaan yang akan dibahas.

1. Manakah di antara kalimat berikut yang seharusnya dianggap sebagai pernyataan? Dengan kata lain, untuk kalimat mana di bawah ini Anda *mungkin* dapat menyatakan bahwa kalimat tersebut benar atau salah? Pilih semua yang sesuai.

A. Jumlah 100 bilangan bulat positif pertama.

B. Berapakah jumlah 100 bilangan bulat positif pertama?

C. Jumlah 100 bilangan bulat positif pertama adalah 5050.

D. Apakah jumlah 100 bilangan bulat positif pertama adalah 5050?

E. Jumlah 100 bilangan bulat positif pertama adalah 17.

2. Anda dan teman sekamar Anda sedang berdebat, dan ia dengan berani menyatakan bahwa nanas enak baik di atas piza maupun dalam smoothie. Manakah tanggapan berikut yang masuk akal terhadap pernyataan ini dari sudut pandang logika?

A. Pernyataan tersebut salah karena meskipun nanas enak dalam smoothie, nanas TIDAK enak di atas piza.

B. Pernyataan tersebut salah karena meskipun nanas enak di atas piza dan nanas enak dalam smoothie, smoothie piza tidak pernah enak.

C. Pernyataan tersebut setengah benar karena apa pun pendapat Anda tentang nanas di atas piza, setidaknya kita semua dapat sepakat bahwa nanas enak dalam smoothie.

D. Pernyataan tersebut salah karena setiap orang yang menyukai nanas di atas piza TIDAK menyukai nanas dalam smoothie.

3. Teman sekamar Anda kini membuat klaim yang lebih keterlaluan lagi: Jika sebuah film pahlawan super merupakan bagian dari Marvel Cinematic Universe, maka film itu bagus. Manakah tanggapan berikut yang masuk akal terhadap klaim ini dari sudut pandang logika?

A. Pernyataan ini salah karena ada film pahlawan super yang bagus, seperti Wonder Woman dan Dark Knight, yang diangkat dari DC Comics sehingga bukan bagian dari Marvel Cinematic Universe.

B. Pernyataan tersebut salah karena setidaknya ada satu film pahlawan super yang merupakan bagian dari Marvel Cinematic Universe tetapi tidak bagus.

C. Pernyataan tersebut salah karena, sebagai contoh, Green Lantern bukan film Marvel dan juga tidak bagus.

D. Pernyataan tersebut benar karena lebih dari separuh film Marvel bagus.

4. Teman sekamar Anda tidak juga berhenti melontarkan klaim yang keterlaluan. Kini ia menyatakan bahwa entah setiap troll adalah penipu, atau setidaknya ada satu troll yang merupakan kesatria. Apa yang dapat Anda katakan tentang hal ini?

A. Ya, pernyataan ini benar karena setiap troll adalah kesatria atau penipu. Jika tidak *semua* troll merupakan penipu, maka pasti ada *setidaknya satu* troll yang merupakan kesatria.

B. Pernyataan ini salah karena beberapa troll merupakan kesatria dan troll lainnya merupakan penipu.

C. Pernyataan tersebut salah karena tidak ada cara untuk memastikan mana dari kedua pilihan itu yang terjadi.

D. Pernyataan tersebut salah karena tidak mungkin ada troll yang mengatakan bahwa semua troll adalah penipu, sebab penipu selalu berdusta.

1.1.2 Pernyataan Atomik dan Molekuler

Sebuah **pernyataan** adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah. Suatu pernyataan disebut **atomik** jika tidak dapat diuraikan menjadi pernyataan-pernyataan yang lebih kecil; jika dapat, pernyataan tersebut disebut **molekuler**.

Contoh 1.1.6

Berikut ini merupakan pernyataan (bahkan, pernyataan *atomik*):

- Nomor telepon di Amerika Serikat terdiri atas 10 digit.
- Bulan terbuat dari keju.
- 42 adalah bilangan kuadrat sempurna.
- Setiap bilangan genap yang lebih besar dari 2 dapat dinyatakan sebagai jumlah dua bilangan prima.
- $3 + 7 = 12$

Sementara itu, berikut ini bukan pernyataan:

- Apakah Anda mau kue?
- Jumlah dua bilangan kuadrat.
- $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1$.
- Pergilah ke kamar Anda!
- $3 + x = 12$

Alasan kalimat "$3 + x = 12$" bukan merupakan pernyataan adalah karena kalimat tersebut memuat sebuah variabel. Bergantung pada nilai x, kalimat itu dapat bernilai benar atau salah, tetapi saat ini tidak bernilai keduanya. Salah satu cara untuk mengubah *kalimat* tersebut menjadi *pernyataan* adalah menentukan nilai variabelnya dengan suatu cara. Hal ini dapat dilakukan dengan menetapkan substitusi tertentu, misalnya "$3 + x = 12$ dengan $x = 9$," yang merupakan pernyataan benar. Atau, Anda dapat *mengikat* variabel bebas tersebut dengan memberinya *kuantor*, seperti dalam "Untuk semua nilai x, $3 + x = 12$," yang bernilai salah. Kita akan membahas kuantor secara lebih terperinci dalam subbagian Kuantor dan Predikat di bawah ini.

Anda dapat menyusun pernyataan (molekuler) yang lebih rumit dari pernyataan (atomik atau molekuler) yang lebih sederhana dengan menggunakan **penghubung logis**. Sebagai contoh, berikut ini adalah pernyataan molekuler:

> Nomor telepon di Amerika Serikat terdiri atas 10 digit, dan 42 adalah bilangan kuadrat sempurna.

Perhatikan bahwa kita dapat menguraikannya menjadi dua pernyataan yang lebih kecil. Kedua pernyataan yang lebih pendek tersebut *dihubungkan* oleh kata "dan." Kita akan membahas 5 penghubung: "dan" (Sam adalah seorang laki-laki, dan Chris adalah seorang perempuan), "atau" (Sam adalah seorang laki-laki, atau Chris adalah seorang perempuan), "jika. . . , maka. . . " (jika Sam adalah seorang laki-laki, maka Chris adalah seorang perempuan), "jika dan hanya jika" (Sam adalah seorang laki-laki jika dan hanya jika Chris adalah seorang perempuan), dan "tidak" (Sam bukan seorang laki-laki). Empat penghubung pertama disebut **penghubung biner** (karena menghubungkan dua pernyataan), sedangkan "tidak" merupakan contoh **penghubung uner** (karena diterapkan pada satu pernyataan).

Pernyataan molekuler ini tentu saja tetap merupakan pernyataan, sehingga harus bernilai benar atau salah. Pengamatan penting di sini adalah bahwa **nilai kebenaran** pernyataan molekuler sepenuhnya ditentukan oleh jenis penghubung dan nilai kebenaran bagian-bagiannya. Kita tidak perlu mengetahui apa yang sebenarnya dinyatakan oleh bagian-bagian tersebut atau apakah terdapat hubungan materiil di antara keduanya; kita hanya perlu mengetahui apakah bagian-bagian itu benar atau salah.

Untuk menganalisis penghubung logis, cukup dengan mempertimbangkan **variabel proposisional** (kadang-kadang disebut variabel *kalimat*), yang biasanya berupa huruf kapital di bagian tengah alfabet: $P, Q, R, S, \ldots$. Kita memandang variabel-variabel ini sebagai pengganti pernyataan (biasanya atomik), tetapi hanya

ada dua *nilai* yang dapat dimiliki variabel tersebut: benar atau salah.[1] Kita juga memiliki simbol untuk penghubung logis: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$.

Definisi 1.1.7 Penghubung Logis.

Kita mendefinisikan **penghubung logis** berikut.

- $P \wedge Q$ dibaca "P dan Q," dan disebut **konjungsi**.
- $P \vee Q$ dibaca "P atau Q," dan disebut **disjungsi**.
- $P \rightarrow Q$ dibaca "jika P maka Q," dan disebut **implikasi** atau **kondisional**.
- $P \leftrightarrow Q$ dibaca "P jika dan hanya jika Q," dan disebut **bikondisional**.
- $\neg P$ dibaca "tidak P," dan disebut **negasi**.

Nilai kebenaran suatu pernyataan ditentukan oleh nilai kebenaran bagian-bagiannya, bergantung pada penghubung yang digunakan:

Definisi 1.1.8 Syarat Kebenaran untuk Penghubung.

Syarat kebenaran untuk penghubung logis didefinisikan sebagai berikut.

- $P \wedge Q$ benar ketika P dan Q keduanya benar.
- $P \vee Q$ benar ketika P atau Q, atau keduanya, benar.
- $P \rightarrow Q$ benar ketika P salah atau Q benar (atau keduanya).
- $P \leftrightarrow Q$ benar ketika P dan Q keduanya benar, atau keduanya salah.
- $\neg P$ benar ketika P salah.

Setiap definisi di atas dapat disajikan dalam sebuah tabel yang disebut **tabel kebenaran**. Kita cukup mencantumkan nilai kebenaran pernyataan untuk setiap kemungkinan kombinasi nilai kebenaran bagian-bagiannya.

[1] Dalam pemrograman komputer, variabel semacam ini disebut **variabel Boolean**.

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

P	Q	$P \rightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

P	$\neg P$
B	S
S	B

Gambar 1.1.9 Tabel kebenaran untuk penghubung logis.

Sebagai contoh, kita dapat menggunakan tabel kebenaran untuk $P \rightarrow Q$ guna menentukan apakah pernyataan "Jika 5 genap, maka 6 genap" benar atau salah. Di sini P adalah pernyataan "5 genap", dan Q adalah pernyataan "6 genap." Karena 5 tidak genap, pernyataan P salah. Karena 6 genap, pernyataan Q benar. Tabel kebenaran memberi tahu kita bahwa pernyataan $P \rightarrow Q$ benar ketika P salah dan Q benar (baris ke-3). Jadi, pernyataan "Jika 5 genap, maka 6 genap" benar. (Jika Anda kurang berkenan dengan kenyataan bahwa pernyataan itu benar, simpan dahulu pikiran tersebut; semoga kita segera dapat menjelaskannya.)

Perhatikan bahwa bagi kita, *atau* adalah **atau inklusif** (dan bukan *atau eksklusif* yang kadang-kadang digunakan), yang berarti bahwa $P \vee Q$ benar ketika P atau Q *atau baik* P *maupun* Q benar. Untuk penghubung lainnya, "dan" berperilaku seperti yang Anda harapkan, demikian pula negasi. Bikondisional (jika dan hanya jika) mungkin tampak sedikit aneh, tetapi Anda sebaiknya memandangnya sebagai pernyataan bahwa kedua bagian tersebut *ekuivalen* karena memiliki nilai kebenaran yang sama.

Dengan demikian, hanya tersisa implikasi $P \rightarrow Q$, yang dalam matematika memiliki arti sedikit berbeda dari penggunaannya dalam bahasa sehari-hari. Namun, implikasi begitu umum dan berguna dalam matematika sehingga kita perlu mengembangkan kelancaran dalam penggunaannya; karena itulah topik ini layak mendapat satu bagian penuh (Subbab 1.2).

Contoh 1.1.10

Dengan menggunakan syarat kebenaran untuk penghubung logis, tentukan pernyataan mana di bawah ini yang benar dan mana yang salah.

1. 17 adalah bilangan prima, dan 17 adalah bilangan ganjil.
2. 17 adalah bilangan prima, dan 18 adalah bilangan prima.
3. 17 adalah bilangan prima, atau 18 adalah bilangan prima.
4. 17 adalah bilangan prima, atau 19 adalah bilangan prima.
5. Jika 17 adalah bilangan prima, maka 19 adalah bilangan prima.

6. Jika 18 adalah bilangan prima, maka bilangan favorit saya adalah 17.
7. 17 adalah bilangan prima jika dan hanya jika 19 adalah bilangan prima.
8. 17 bukan bilangan prima jika dan hanya jika 19 bukan bilangan prima.

Penyelesaian. Pertama, mari kita sepakati beberapa fakta: 17 memang prima dan ganjil, 18 bukan prima maupun ganjil, dan 19 prima.

1. Benar. Kedua bagian konjungsi benar, sehingga seluruh pernyataan benar.
2. Salah. Bagian pertama benar, tetapi bagian kedua salah, sehingga seluruh pernyataan salah.
3. Benar. Bagian pertama benar, sehingga seluruh pernyataan benar. Begitu menemukan satu pernyataan benar dalam suatu disjungsi, kita dapat berhenti memeriksa dan menyatakan bahwa seluruh pernyataan benar.
4. Benar. Karena kita menggunakan atau inklusif, pernyataan tersebut benar ketika kedua bagiannya benar.
5. Benar. Jangan khawatir bahwa tidak ada alasan kuat mengapa keprimaan 17 *menyebabkan* keprimaan 19. Bukan itu yang kita maksud dengan pernyataan kondisional. Karena bagian "maka" benar, kita mengetahui bahwa pernyataan secara keseluruhan benar.
6. Benar. Bagian "jika" dari pernyataan tersebut salah. Hanya itu yang kita perlukan. Saya yakin Anda bahkan tidak mengetahui bilangan favorit saya, dan Anda juga tidak perlu mengetahuinya. Pernyataan tersebut benar.
7. Benar. Apakah kedua bagian memiliki nilai kebenaran yang sama? Ya, karena keduanya benar. Jadi, seluruh pernyataan benar.
8. Ini juga benar. Sekarang kedua bagian salah (karena keduanya merupakan negasi dari pernyataan benar), sehingga seluruh pernyataan benar.

Cara kita mendefinisikan penghubung logis dan nilai kebenarannya sangat presisi dan teknis. Bahasa sering kali tidak demikian. Bagian dari belajar mengomunikasikan matematika adalah mempelajari kaidah bahasa matematika dan cara menerjemahkan pernyataan dalam bahasa sehari-hari menjadi pernyataan teknis tersebut. Hal ini akan menjadi lebih mudah dengan latihan, jadi pastikan Anda banyak berbicara dengan orang lain tentang matematika yang sedang Anda pelajari.

Berikut beberapa contoh yang menunjukkan mengapa bahasa sehari-hari mungkin sulit diterjemahkan.

Contoh 1.1.11

Identifikasi struktur logis setiap pernyataan berikut.

1. 4 dan 5 keduanya bilangan prima.
2. Hanya satu di antara 4 atau 5 yang merupakan bilangan prima.
3. Anda harus hadir setiap hari dan mengerjakan pekerjaan rumah agar lulus mata kuliah ini.
4. Setiap bilangan adalah genap atau ganjil.

Penyelesaian.

1. Apakah Anda setuju bahwa ini sama dengan pernyataan "4 adalah bilangan prima, *dan* 5 adalah bilangan prima"? Perhatikan bahwa menuliskannya sebagai $P \wedge Q$, dengan P adalah "4" dan Q adalah "5 adalah bilangan prima", tidaklah masuk akal. Namun, jika kita menetapkan P sebagai pernyataan "4 adalah bilangan prima", maka kedua bagian konjungsi merupakan pernyataan.
2. Sekali lagi, kita tidak dapat begitu saja menjadikan apa yang berada di salah satu sisi kata "atau" sebagai pernyataan. Namun, jika kita menetapkan P sebagai "4 adalah bilangan prima" dan Q sebagai "5 adalah bilangan prima", kita dapat menuliskannya sebagai $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$. Artinya, 4 adalah bilangan prima atau 5 adalah bilangan prima, dan tidak benar bahwa baik 4 maupun 5 keduanya bilangan prima.
3. Berikut cara lain untuk mengungkapkan pernyataan yang sama: Jika Anda lulus mata kuliah ini, maka Anda pasti hadir setiap hari dan mengerjakan pekerjaan rumah. Jika kita sepakat bahwa ini hanyalah cara yang lebih jelas untuk menyatakan pernyataan semula, kita dapat menggambarkan strukturnya sebagai $P \rightarrow (Q \wedge R)$.
4. Perhatikan bahwa ini tidak sama dengan mengatakan "Setiap bilangan adalah genap, atau setiap bilangan adalah ganjil." Tentu saja, mengatakan "3 adalah genap atau ganjil" *sama* dengan mengatakan "3 adalah genap, atau 3 adalah ganjil." Bahasa memang membingungkan!

   Kita belum memiliki perangkat logika untuk menerjemahkan pernyataan ini menjadi sesuatu yang lebih dari P, dengan P sebagai pernyataan "Setiap bilangan adalah genap atau ganjil." Untungnya, perangkat itu tersedia, mulai... sekarang!

1.1.3 Kuantor dan Predikat

Tahukah Anda bahwa semua mamalia memiliki rambut? Bahwa setiap bilangan bulat adalah genap atau ganjil? Bahwa beberapa bilangan ganjil bukan bilangan prima?

Tujuan kita adalah mengeksplorasi cara menulis pernyataan semacam ini dalam notasi matematika agar struktur logisnya tampak jelas.

Untuk itu, kita perlu mempertimbangkan jenis kalimat dasar baru yang disebut **predikat**, yang menyerupai pernyataan tetapi memuat **variabel bebas**. Ketika Anda mengganti variabel tersebut dengan suatu konstanta, kalimat itu menjadi pernyataan yang sesungguhnya. Anggaplah predikat sebagai klaim tentang nilai-nilai yang disubstitusikan untuk variabel "penampung" tersebut.

Predikat dapat dijadikan pernyataan (benar atau salah) dengan mengevaluasinya pada konstanta tertentu, atau kita dapat mengklaim bahwa sebagian atau semua konstanta yang mungkin akan membuat pernyataan yang dihasilkan benar atau salah. Hal ini dilakukan dengan menggunakan **kuantor**.

Definisi 1.1.12 Kuantor.

Kuantor universal ditulis $\forall$ dan dibaca "untuk semua." **Kuantor eksistensial** ditulis $\exists$ dan dibaca "terdapat" atau "untuk suatu."

Kita biasanya menulis predikat dengan cara yang serupa dengan penulisan fungsi, tetapi menggunakan huruf kapital. Sebagai contoh, kita dapat menggunakan predikat $P(x)$ untuk menyatakan "x adalah bilangan prima". Kemudian kita dapat mengatakan bahwa $P(7)$ benar (karena 7 adalah bilangan prima) dan $P(8)$ salah. Atau, dengan menggunakan kuantor, kita dapat menyatakan (secara keliru) bahwa semua bilangan adalah prima dengan menulis $\forall x P(x)$, atau menyatakan (secara benar) bahwa terdapat setidaknya satu bilangan prima dengan menulis $\exists x P(x)$.

Contoh 1.1.13

Terjemahkan pernyataan "Setiap bilangan adalah genap atau ganjil" ke dalam simbol.

Penyelesaian. Bahkan sebelum mulai menggunakan simbol, akan membantu jika kita menyatakannya kembali dengan cara yang menangkap struktur logis pernyataan tersebut. Apa yang dinyatakan oleh klaim ini? Untuk sembarang bilangan, bilangan tersebut genap atau ganjil. Secara khusus, kita tidak menyatakan bahwa semua bilangan genap atau bahwa semua bilangan ganjil.

Mari kita gunakan $E(x)$ untuk menyatakan bahwa x genap, dan $O(x)$ untuk menyatakan bahwa x ganjil. Kemudian kita dapat menulis,

$$E(x) \vee O(x)$$

untuk menyatakan bahwa x genap atau x ganjil. Untuk nilai x mana perny-

ataan itu benar (menurut klaim tersebut)? Untuk *semuanya*. Jadi, kita menulis pernyataan itu sebagai,

$$\forall x(O(x) \vee E(x)).$$

Kita menambahkan tanda kurung untuk menegaskan bahwa **cakupan** kuantor universal mencakup kedua predikat.

Perhatikan bahwa jika kita secara keliru menafsirkan pernyataan itu sebagai klaim bahwa semua bilangan genap atau semua bilangan ganjil, kita dapat menuliskannya sebagai $\forall x O(x) \vee \forall x E(x)$. Ini tidak sama!

Sama seperti yang kita lakukan untuk logika proposisional dan penghubung logis, kita perlu menentukan apa artinya predikat berkuantor bernilai benar atau salah. Kita mengatakan $\forall x P(x)$ benar jika $P(a)$ benar untuk setiap konstanta a yang kita substitusikan bagi x. Demikian pula, $\exists x P(x)$ benar jika terdapat setidaknya satu nilai a yang membuat $P(a)$ benar.

Namun, kita harus berhati-hati di sini. Perhatikan pernyataan

$$\forall x \exists y(y < x).$$

Pernyataan ini dibaca, "Untuk setiap x, terdapat suatu y sedemikian sehingga y lebih kecil daripada x." Perhatikan bahwa $<$ adalah predikat dengan dua variabel bebas; kita memilih menuliskannya dengan simbol di antara kedua variabel, alih-alih bentuk $L(y, x)$ atau $<(y, x)$ yang tampak ganjil.

Apakah pernyataan ini benar? Jawabannya bergantung pada **semesta pembicaraan** kita. Ketika mengatakan "untuk semua" x, apakah yang kita maksud semua bilangan bulat positif, semua bilangan real, semua gajah, atau...? Biasanya, informasi ini tersirat dari konteks pernyataan. Dalam matematika diskret, kita hampir selalu memberikan kuantor atas *bilangan asli*, $0, 1, 2, \ldots$, jadi mari kita gunakan himpunan tersebut sebagai semesta pembicaraan di sini.

Agar pernyataan itu benar, untuk setiap bilangan asli yang kita pilih, harus ada suatu bilangan asli yang benar-benar lebih kecil. Mungkin kita dapat menetapkan y sebagai $x - 1$? Namun, inilah masalahnya: bagaimana jika $x = 0$? Maka $y = -1$, dan itu *bukan bilangan!* (dalam semesta pembicaraan kita). Dengan demikian, kita melihat bahwa pernyataan tersebut salah karena ada suatu bilangan yang kurang dari atau sama dengan semua bilangan lainnya. Dalam simbol,

$$\exists x \forall y(y \geq x).$$

Kita akan mengeksplorasi beberapa aturan untuk bekerja dengan kuantor dan penghubung lainnya dalam Subbab 1.3. Untuk saat ini, kita akan berfokus pada penerjemahan antara pernyataan informal dalam bahasa sehari-hari dan bahasa logika yang lebih presisi. Tidak ada algoritma sempurna untuk melakukan penerjemahan ini, tetapi berikut beberapa pedoman praktis yang berguna.

Setiap _____ adalah _____.

Setiap pernyataan berbentuk "Setiap objek yang bersifat P merupakan objek yang bersifat Q" dapat ditulis sebagai

$$\forall x(P(x) \to Q(x)).$$

Contoh: semua mamalia memiliki rambut menjadi $\forall x(M(x) \to H(x))$, dengan $M(x)$ berarti x adalah mamalia, dan $H(x)$ berarti x memiliki rambut.

Untuk memahaminya, pikirkan makna pernyataan semacam ini dalam konteks himpunan. Kita menyatakan bahwa himpunan mamalia termuat dalam, atau merupakan himpunan bagian dari, himpunan objek yang berambut. Makna "A adalah himpunan bagian dari B" tepatnya adalah bahwa setiap elemen A merupakan elemen B. Hal ini juga dapat dinyatakan dengan mengatakan bahwa "jika x adalah elemen A, maka x juga merupakan elemen B."

Sebagian _____ adalah _____.

Setiap pernyataan berbentuk "Sebagian objek yang bersifat P merupakan objek yang bersifat Q" dapat ditulis sebagai

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)).$$

Contoh: Beberapa kucing dapat berenang menjadi $\exists x(C(x) \wedge S(x))$, dengan $C(x)$ berarti x adalah kucing, dan $S(x)$ berarti x dapat berenang.

Sekali lagi, akan membantu jika kita memikirkan cara menyatakan pernyataan semacam itu dalam konteks himpunan. Mengatakan bahwa beberapa kucing dapat berenang berarti mengatakan bahwa ada objek yang termasuk baik dalam himpunan kucing maupun dalam himpunan objek yang dapat berenang. Hewan semacam itu termasuk dalam *irisan* kedua himpunan, yang dapat Anda gambarkan sebagai keanggotaan dalam himpunan pertama *dan* himpunan kedua. Pernyataan eksistensial berbentuk ini menyatakan bahwa irisan kedua himpunan tersebut tidak kosong.

Kuantor Implisit. Bersikap presisi dalam matematika selalu merupakan gagasan yang baik. Namun, kadang-kadang kita dapat sedikit longgar selama kita semua menyepakati suatu konvensi. Salah satu contoh konvensi semacam itu adalah menganggap bahwa kalimat yang memuat predikat dengan variabel bebas dimaksudkan sebagai pernyataan, dengan variabel-variabel tersebut diberi kuantor universal.

Sebagai contoh, apakah Anda percaya bahwa jika suatu bangun merupakan persegi, maka bangun itu merupakan persegi panjang? Namun, bagaimana kalimat itu dapat benar jika bukan pernyataan? Agar sedikit lebih presisi, kita memiliki dua predikat: $S(x)$ untuk "x adalah persegi" dan $R(x)$ untuk "x adalah persegi panjang".

Kalimat yang sedang kita tinjau adalah

$$S(x) \to R(x).$$

Kalimat ini tidak benar maupun salah karena bukan merupakan pernyataan. Namun, ayolah! Kita semua tahu bahwa yang kita maksud adalah pernyataan,

$$\forall x(S(x) \to R(x)),$$

dan inilah yang menurut konvensi kita perlu dipertimbangkan. Pernyataan yang dihasilkan disebut **generalisasi universal** dari kalimat semula.

Definisi 1.1.14

Untuk suatu kalimat dengan variabel bebas, **generalisasi universal** kalimat tersebut adalah pernyataan yang diperoleh dengan menambahkan kuantor universal secukupnya pada awal kalimat sehingga semua variabel bebas menjadi terikat.

Demikian pula, kita akan sering sedikit longgar dalam membedakan predikat dan pernyataan. Sebagai contoh, kita mungkin menulis, *misalkan* $P(n)$ *adalah* pernyataan *"*n *adalah bilangan prima"*, yang secara teknis tidak tepat. Secara implisit, yang kita maksud adalah mendefinisikan $P(n)$ sebagai predikat yang untuk setiap n menjadi pernyataan n adalah bilangan prima.

1.1.4 Pertanyaan Bacaan

1. Pasangkan setiap pernyataan dalam simbol dengan jenis pernyataannya.

$P \to Q$	P dan Q (konjungsi)
$P \vee Q$	Jika P, maka Q (implikasi)
$P \wedge Q$	P atau Q (disjungsi)
$\neg P$	Tidak P (negasi)

2. Perhatikan kalimat "Jika $x > 3$, maka x genap."

Manakah di antara pernyataan berikut yang benar mengenai kalimat tersebut? Pilih semua yang sesuai.

A. Kalimat tersebut merupakan pernyataan salah karena memiliki variabel bebas.

B. Generalisasi universal kalimat tersebut merupakan pernyataan.

C. Jika Anda menyubstitusikan 10 untuk x, pernyataan yang dihasilkan benar.

D. Kalimat tersebut menjadi pernyataan benar untuk bilangan asli apa pun yang Anda substitusikan bagi x.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda penasaran.

1.1.5 Soal Latihan

1. Untuk setiap kalimat di bawah ini, tentukan apakah kalimat tersebut merupakan pernyataan atomik, pernyataan molekuler, atau bukan pernyataan.

(a) Sebagian orang memperkirakan badai akan datang, dan sebagian yang lain memperkirakan langit akan cerah.

(b) Ibu datang untuk menata kembali ruang tamu.

(c) Belajarlah berenang.

2. Klasifikasikan setiap kalimat di bawah ini sebagai pernyataan atomik, pernyataan molekuler, atau bukan pernyataan. Jika kalimat tersebut merupakan pernyataan molekuler, tentukan jenisnya (konjungsi, disjungsi, implikasi, bikondisional, atau negasi).

(a) Beberapa mahasiswa tiba lebih awal.

(b) Setiap bilangan asli yang lebih besar dari 1 merupakan bilangan prima atau komposit.

(c) Masuklah ke kamar Anda!

(d) Tim Broncos akan memenangi Super Bowl, atau saya akan mengakui bahwa ramalan saya keliru.

(e) Kemeja ini tidak berwarna hitam.

3. Tentukan apakah setiap pernyataan molekuler di bawah ini benar atau salah, atau apakah nilai kebenarannya tidak mungkin ditentukan. Anggaplah Anda tidak mengetahui bilangan favorit saya (tetapi Anda mengetahui bilangan mana yang prima).

(a) Jika 4 merupakan bilangan favorit saya, maka $4 + 1$ merupakan bilangan favorit saya.

(b) 8 merupakan bilangan favorit saya, dan 3 bukan bilangan prima.

(c) 4 merupakan bilangan favorit saya, atau 4 merupakan bilangan prima.

(d) Jika 4 merupakan bilangan prima, maka $2 \cdot 4$ merupakan bilangan prima.

(e) Jika 3 merupakan bilangan prima, maka 3 merupakan bilangan favorit saya.

(f) 8 merupakan bilangan favorit saya, dan 4 bukan bilangan prima.

4. Misalkan $P(x, y)$ adalah predikat "orang x dapat diperdaya pada waktu y." Pasangkan setiap pernyataan dengan representasi simboliknya.

Pada setiap waktu, terdapat orang yang dapat diperdaya.	$\exists x \forall y P(x, y)$
Pada suatu waktu, semua orang dapat diperdaya.	$\forall x \exists y P(x, y)$
Setiap orang dapat diperdaya pada suatu waktu.	$\forall y \exists x P(x, y)$
Beberapa orang dapat diperdaya setiap saat.	$\exists y \forall x P(x, y)$

5. Teman Anda percaya bahwa Anda tidak dapat memperdaya semua orang pada waktu yang sama. Apa cara lain untuk menyatakan hal ini, dan bagaimana Anda menuliskannya dalam simbol (dengan menggunakan $P(x, y)$ untuk menyatakan bahwa Anda dapat memperdaya x pada waktu y)?

A. Terdapat seseorang yang tidak pernah diperdaya. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

B. Tidak seorang pun pernah diperdaya. $\forall x \forall y \neg P(x, y)$

C. Terdapat seseorang yang pada suatu waktu tidak diperdaya. $\exists x \exists y \neg P(x, y)$

D. Setiap orang pada suatu waktu tidak diperdaya. $\forall x \exists y \neg P(x, y)$

6. Terlepas dari keyakinan Anda tentang berapa banyak orang yang dapat diperdaya pada berbagai waktu, apa yang dapat Anda simpulkan jika kita menafsirkan ulang $P(x, y)$ sebagai $x < y$ dan hanya melakukan kuantifikasi atas bilangan asli (sehingga $\forall x$ berarti "untuk setiap bilangan asli" dan $\exists x$ berarti "terdapat bilangan asli")? Pilih semua pilihan yang berlaku.

A. $\forall x \exists y P(x, y)$ bernilai benar.

B. $\exists x \forall y P(x, y)$ bernilai benar.

C. $\forall y \exists x P(x, y)$ bernilai benar.

D. $\exists y \forall x P(x, y)$ bernilai benar.

E. Apa pun arti $P(x, y)$, kita dapat menyimpulkan bahwa $\forall x \exists y P(x, y)$ dan $\exists y \forall x P(x, y)$ TIDAK *ekuivalen secara logis*.

7. Misalkan $P(x)$ adalah predikat "$17x + 1$ genap."

(a) Apakah $P(15)$ benar atau salah?

(b) Apakah ada sesuatu yang dapat Anda simpulkan tentang $\exists x P(x)$ dari nilai kebenaran $P(15)$?

(c) Apakah ada sesuatu yang dapat Anda simpulkan tentang $\forall x P(x)$ dari nilai kebenaran $P(15)$?

8. Misalkan $P(x)$ adalah predikat "$18x + 1$ genap."

(a) Apakah $P(15)$ benar atau salah?

(b) Apakah ada sesuatu yang dapat Anda simpulkan tentang $\exists x P(x)$ dari nilai kebenaran $P(15)$?

(c) Apakah ada sesuatu yang dapat Anda simpulkan tentang $\forall x P(x)$ dari nilai kebenaran $P(15)$?

9. Perhatikan kalimat $\exists x P(x, y) \rightarrow \forall x P(x, y)$. Apa yang dapat kita katakan tentang kalimat ini? Pilih semua pilihan yang berlaku.

A. Kalimat tersebut merupakan pernyataan karena mengandung kuantor.

B. Kalimat tersebut bukan pernyataan karena x dan z merupakan variabel bebas.

C. Kalimat tersebut bukan pernyataan karena y merupakan variabel bebas.

D. Generalisasi universal dari kalimat tersebut merupakan pernyataan.

10. Misalkan $P(x, y)$ adalah suatu predikat biner yang didefinisikan pada semesta pembicaraan yang sangat kecil, yaitu bilangan bulat 1, 2, 3, dan 4. Untuk masing-masing dari 16 pasangan bilangan tersebut, $P(x, y)$ bernilai benar atau salah menurut tabel berikut (nilai x terletak pada baris dan nilai y terletak pada kolom).

	1	**2**	**3**	**4**
1	B	S	S	S
2	S	B	B	S
3	B	B	B	B
4	S	S	S	S

Sebagai contoh, $P(1, 3)$ bernilai salah, sebagaimana ditunjukkan oleh S pada baris pertama dan kolom ketiga.

Gunakan tabel tersebut untuk menentukan apakah pernyataan-pernyataan berikut benar atau salah.

(a) $\forall y \exists x P(x, y)$.

(b) $\exists x \forall y P(x, y)$.

(c) $\forall x \exists y P(x, y)$.

(d) $\exists y \forall x P(x, y)$.

1.1.6 Latihan Tambahan

1. Misalkan P dan Q adalah pernyataan berikut: P: Jack lulus matematika. Q: Jill lulus matematika.

(a) Nyatakan "Jack dan Jill keduanya lulus matematika" dalam simbol.

(b) Nyatakan "Jika Jack lulus matematika, maka Jill tidak lulus" dalam simbol.

(c) Terjemahkan "$P \vee Q$" dalam bahasa Indonesia.

(d) Terjemahkan "$\neg(P \wedge Q) \rightarrow Q$" dalam bahasa Indonesia.

(e) Misalkan Anda mengetahui bahwa jika Jack lulus matematika, maka Jill juga lulus. Apa yang dapat Anda simpulkan jika Anda mengetahui bahwa:

i. Jill lulus matematika?

ii. Jill tidak lulus matematika?

2. Nyatakan dalam simbol. Gunakan $E(x)$ untuk "x genap" dan $O(x)$ untuk "x ganjil."

(a) Tidak ada bilangan yang sekaligus genap dan ganjil.

(b) Satu lebihnya dari setiap bilangan genap merupakan bilangan ganjil.

(c) Terdapat bilangan prima yang genap.

(d) Di antara sembarang dua bilangan terdapat bilangan ketiga.

(e) Tidak ada bilangan di antara suatu bilangan dan satu lebihnya dari bilangan tersebut.

3. Untuk setiap pernyataan berikut, berikan semesta pembicaraan yang membuat pernyataan tersebut benar dan semesta pembicaraan yang membuatnya salah.

(a) $\forall x \exists y (y^2 = x)$.

(b) $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z < y))$.

(c) $\exists x \forall y \forall z (y < z \rightarrow y \leq x \leq z)$.

1.2 Implikasi

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menjelaskan kondisi yang membuat suatu implikasi bernilai benar.
2. Mengidentifikasi pernyataan yang ekuivalen dengan suatu implikasi atau konversnya.
3. Menjelaskan hubungan antara nilai kebenaran suatu implikasi, konversnya, dan kontraposisinya.

1.2.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Ibu Timmy kecil berkata kepadanya, "Jika kamu tidak menghabiskan brokolimu, kamu tidak akan mendapat es krim." Tentu saja, Timmy sangat menyukai es krim, sehingga ia segera menghabiskan semua brokolinya (yang ternyata cukup enak).

Setelah makan malam, ketika Timmy meminta es krimnya, permintaannya ditolak! Apakah Timmy berhak merasa kesal? Mengapa atau mengapa tidak?

Sejauh ini, jenis pernyataan yang paling penting dalam matematika adalah implikasi. Implikasi juga merupakan jenis pernyataan majemuk dasar yang paling tidak intuitif. Tujuan kita dalam bagian ini adalah lebih mengenal konsep penting tersebut.

Untuk memahami mengapa bentuk pernyataan ini begitu umum, perhatikan *Teorema Pythagoras*. Terlepas dari apa yang mungkin diklaim media sosial, Teorema Pythagoras bukanlah

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Baiklah, persamaan itu memang memiliki variabel, jadi mungkin kita menggunakan konvensi dengan mengambil generalisasi universal,

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \left(a^2 + b^2 = c^2\right).$$

Jadi, $1^2+5^2 = 2^2$??? Baiklah. Persamaan tersebut benar selama a dan b adalah panjang sisi-sisi siku-siku suatu segitiga siku-siku dan c adalah panjang hipotenusanya. Dengan kata lain:

> *Jika* a dan b adalah panjang sisi-sisi siku-siku suatu segitiga siku-siku dengan hipotenusa sepanjang c, *maka* $a^2 + b^2 = c^2$.

Matematika berkaitan dengan pembuatan klaim umum, tetapi suatu klaim jarang berlaku bagi benar-benar *setiap* objek matematika. Cara kita *membatasi* klaim pada jenis objek tertentu adalah dengan implikasi: "Ambillah objek apa pun, *jika* objek itu berjenis tepat, *maka* hal ini benar tentang objek tersebut."

Demikian pula, sebagaimana kita lihat pada subbagian Kuantor dan Predikat, ketika membuat klaim seperti "Setiap persegi adalah persegi panjang," sebenarnya kita memiliki suatu implikasi: "Jika sesuatu merupakan persegi, maka sesuatu itu merupakan persegi panjang."

Berikut adalah pengingat tentang apa yang dimaksud dengan implikasi.

Definisi 1.2.1 Implikasi.

Suatu **implikasi** (atau **kondisional**) adalah pernyataan majemuk berbentuk

$$P \to Q$$

dengan P dan Q merupakan pernyataan. Kita mengatakan bahwa

- P adalah **premis** (atau **anteseden**).
- Q adalah **kesimpulan** (atau **konsekuen**).

Suatu implikasi bernilai *benar* jika P salah atau Q benar (atau keduanya), dan bernilai *salah* dalam keadaan lainnya. Secara khusus, satu-satunya cara agar $P \to Q$ bernilai salah adalah ketika P benar *dan* Q salah.

Definisi nilai kebenaran suatu implikasi juga dapat disajikan sebagai tabel kebenaran:

P	Q	$P \to Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Gambar 1.2.2 Tabel kebenaran untuk $P \to Q$.

Apakah tabel kebenaran ini masuk akal? Haruskah kita memercayainya? Perhatikan khususnya baris ketiga: S, B, B, lalu pertimbangkan implikasi "Jika $5 < 3$, maka $5 + 3 = 8$." Apakah pernyataan itu *terasa* benar? Menurut tabel kebenaran, pernyataan tersebut memang benar (karena $5 < 3$ salah dan $5 + 3 = 8$ benar).

Sebagian besar pembahasan selanjutnya dalam bagian ini bertujuan meyakinkan kita bahwa tabel kebenaran ini masuk akal.

Aktivitas Pratinjau

1. Perhatikan pernyataan "Jika Tommy tidak memakan brokolinya, maka ia tidak akan mendapat es krim." Manakah di antara pernyataan berikut yang memiliki arti sama (yaitu, akan benar dalam situasi yang sama)? Pilih semua yang sesuai.

A. Jika Tommy memakan brokolinya, maka ia akan mendapat es krim.

B. Jika Tommy mendapat es krim, maka ia telah memakan brokolinya.

C. Jika Tommy tidak mendapat es krim, maka ia tidak memakan brokolinya.

D. Tommy memakan brokolinya, tetapi tetap tidak mendapat es krim.

2. Misalkan paman Anda yang mencurigakan menawarkan kesepakatan berikut: Jika Anda meminjamkan mobil kepadanya, maka ia akan membawakan Anda taco. Dalam situasi manakah berikut ini wajar untuk mengatakan bahwa paman Anda berbohong (yaitu, pernyataannya salah)? Pilih semua yang sesuai.

A. Anda meminjamkan mobil kepadanya. Ia membawakan Anda taco.

B. Anda meminjamkan mobil kepadanya. Ia tidak pernah membelikan Anda taco.

C. Anda tidak meminjamkan mobil kepadanya. Ia tetap membawakan Anda taco.

D. Anda tidak meminjamkan mobil kepadanya. Ia tidak pernah membawakan Anda taco.

3. Perhatikan *kalimat* "Jika $x \geq 10$, maka $x^2 \geq 25$." Kalimat ini menjadi suatu pernyataan ketika kita mengganti x dengan sebuah nilai, atau "mengikat" x di dalam cakupan suatu kuantor. Manakah di antara klaim berikut yang benar (pilih semua yang sesuai)?

A. Jika kita mengganti x dengan 15, pernyataan yang dihasilkan bernilai benar. (Perhatikan bahwa $15^2 = 225$.)

B. Jika kita mengganti x dengan 3, pernyataan yang dihasilkan bernilai benar.

C. Jika kita mengganti x dengan 6, pernyataan yang dihasilkan bernilai benar.

D. Generalisasi universal ("untuk semua x, jika $x \geq 10$, maka $x^2 \geq 25$") bernilai benar.

E. Ada suatu bilangan yang dapat menggantikan x sehingga pernyataan tersebut bernilai salah.

4. Perhatikan pernyataan "Jika saya menonton film, maka saya makan berondong jagung" (yang kebetulan benar). Berdasarkan intuisi bahasa sehari-hari semata, manakah di antara pernyataan berikut yang memiliki arti sama? Pilih semua yang sesuai.

A. Jika saya makan berondong jagung, maka saya menonton film.

B. Jika saya tidak makan berondong jagung, maka saya tidak menonton film.

C. Makan berondong jagung merupakan syarat perlu ketika saya menonton film.

D. Untuk menonton film, makan berondong jagung merupakan syarat cukup bagi saya.

E. Saya menonton film hanya jika saya makan berondong jagung.

1.2.2 Memahami Tabel Kebenaran

Nilai kebenaran suatu implikasi ditentukan oleh nilai kebenaran kedua bagiannya. Definisi kita mengenai syarat kebenaran implikasi menyatakan bahwa hanya ada satu cara agar implikasi bernilai salah: ketika premis benar dan kesimpulan salah.

Contoh 1.2.3

Perhatikan pernyataan berikut:

> Jika Bob mendapat nilai 90 pada ujian akhir, maka Bob akan lulus mata kuliah tersebut.

Ini jelas merupakan implikasi: P adalah pernyataan "Bob mendapat nilai 90 pada ujian akhir," dan Q adalah pernyataan "Bob akan lulus mata kuliah tersebut."

Misalkan saya mengatakan pernyataan tersebut kepada Bob. Dalam keadaan apa saya pantas disebut berbohong? Bagaimana jika Bob benar-benar mendapat nilai 90 pada ujian akhir, dan ia lulus mata kuliah tersebut? Dalam hal itu, saya tidak berbohong; pernyataan saya benar. Namun, jika Bob mendapat nilai 90 pada ujian akhir tetapi tidak lulus mata kuliah tersebut, maka saya berbohong sehingga pernyataan itu salah. Kasus yang rumit adalah ini: Bagaimana jika Bob tidak mendapat nilai 90 pada ujian akhir? Mungkin ia lulus, mungkin juga tidak. Apakah saya berbohong dalam salah satu kasus itu? Menurut saya, tidak. Dalam dua kasus terakhir ini, P salah dan pernyataan $P \to Q$ benar. Dalam kasus pertama, Q benar, demikian pula $P \to Q$. Jadi, $P \to Q$ benar ketika P salah atau Q benar.

Untuk memperjelas, meskipun kadang-kadang kita membaca $P \to Q$ sebagai

"*P mengimplikasikan Q*", kita tidak mensyaratkan adanya hubungan *kausal* antara pernyataan P dan Q (meskipun hubungan itu mungkin ada). "Jika $x < y$, maka $x + 1 < y + 1$," merupakan pernyataan yang benar (atau setidaknya generalisasi universalnya benar). Kita tahu pernyataan itu benar karena memahami interaksi kedua bagiannya. Jika Anda menambahkan 1 pada dua bilangan x dan y, urutannya tidak berubah. Namun, pernyataan "jika $1 < 2$, maka Euklides mempelajari geometri" juga merupakan implikasi yang benar.

Contoh 1.2.4

Tentukan manakah di antara pernyataan berikut yang benar dan manakah yang salah. Jelaskan secara singkat.

1. Jika $1 = 1$, maka sebagian besar kuda memiliki 4 kaki.
2. Jika $0 = 1$, maka $1 = 1$.
3. Jika 8 adalah bilangan prima, maka digit ke-7624 dari π adalah 8.
4. Jika digit ke-7624 dari π adalah 8, maka $2 + 2 = 4$.

Penyelesaian. Keempat pernyataan tersebut benar. Ingat, satu-satunya cara agar suatu implikasi bernilai salah adalah ketika bagian *jika* benar dan bagian *maka* salah.

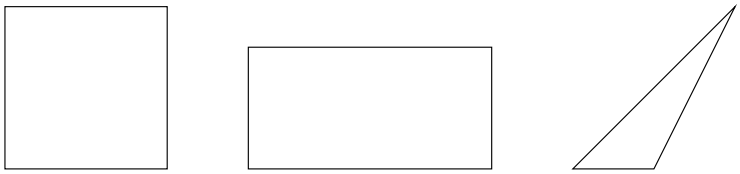
1. Di sini premis dan kesimpulan keduanya benar, sehingga implikasinya benar. Tidak menjadi masalah bahwa tidak ada hubungan bermakna antara fakta matematika yang benar dan fakta tentang kuda.
2. Di sini premis salah dan kesimpulan benar, sehingga implikasinya benar.
3. Saya tidak tahu digit ke-7624 dari π, tetapi hal itu tidak penting. Karena premisnya salah, implikasinya otomatis benar.
4. Terlepas dari nilai kebenaran premisnya, kesimpulannya benar sehingga implikasinya benar.

Ini merupakan contoh yang aneh dan sebenarnya bukan cara kita menggunakan implikasi. Namun, keanehan ini bukan sekadar akibat matematikawan bersikap keras kepala. Syarat kebenaran implikasi *harus* demikian agar matematika masuk akal. Mari kita lihat alasannya.

Contoh 1.2.5

Perhatikan pernyataan "Semua persegi adalah persegi panjang," yang juga dapat dirumuskan sebagai "Untuk semua bangun, jika bangun tersebut

adalah persegi, maka bangun tersebut adalah persegi panjang." Apakah pernyataan ini benar atau salah? Apakah kita yakin? Bagaimana dengan tiga bangun berikut?



Penyelesaian. Tentu saja pernyataan itu benar. Persegi adalah bangun datar bersisi 4 dengan 4 sudut siku-siku dan 4 sisi yang sama panjang, sedangkan persegi panjang adalah bangun datar bersisi 4 dengan 4 sudut siku-siku.

Namun, ketika mempertimbangkan pernyataan universal seperti ini, yang kita maksud adalah bahwa apa pun yang kita "substitusikan" untuk variabel ("bangun tersebut" dalam kasus ini), pernyataan yang dihasilkan bernilai benar. Ketika pernyataan itu membahas suatu bangun tertentu, kita memiliki implikasi $P \to Q$. Artinya, harus benar bahwa jika bangun di sebelah kiri merupakan persegi, maka bangun itu merupakan persegi panjang. Bagus. Bangun itu merupakan persegi (P benar) dan merupakan persegi panjang (Q benar), jadi implikasinya memang benar.

Apakah implikasi tersebut benar untuk persegi panjang di tengah? Bangun itu bukan persegi (P salah), dan bangun itu merupakan persegi panjang (Q benar). Namun, kita meyakini bahwa semua persegi adalah persegi panjang, sehingga pernyataan tersebut harus benar, bahkan untuk sebuah persegi panjang. Hal ini hanya mungkin jika "salah mengimplikasikan benar" bernilai benar!

Demikian pula, semua persegi adalah persegi panjang merupakan pernyataan yang benar, bahkan ketika kita melihat sebuah segitiga. P salah (segitiga bukan persegi), dan Q salah (segitiga bukan persegi panjang). Untungnya, kita mendefinisikan implikasi sebagai benar dalam kasus ini juga.

Kita telah memberikan bangun-bangun yang menggambarkan baris 1, 3, dan 4 pada tabel kebenaran implikasi (Gambar 1.2.2). Bangun apa yang menggambarkan baris 2? Bangun itu harus merupakan persegi tetapi bukan persegi panjang.... Tentu saja kita tidak dapat menemukannya, tepat karena pernyataan tersebut benar!

1.2.3 Pernyataan yang Berkaitan

Implikasi merupakan salah satu cara untuk menyatakan hubungan antara dua pernyataan. Sering kali menarik untuk menanyakan apakah terdapat hubungan lain antara kedua pernyataan tersebut. Di sini kita memperkenalkan beberapa istilah umum untuk membahas pertanyaan ini.

Definisi 1.2.6 Konvers, Kontraposisi, dan Invers.

Untuk suatu implikasi $P \to Q$, kita mengatakan bahwa

- **Konvers**-nya adalah pernyataan $Q \to P$.
- **Kontraposisi**-nya adalah pernyataan $\neg Q \to \neg P$.
- **Invers**-nya adalah pernyataan $\neg P \to \neg Q$.

Contoh 1.2.7

Perhatikan implikasi "Jika Anda membersihkan kamar, maka Anda boleh pergi ke pesta." Berikan konvers, kontraposisi, dan invers dari pernyataan ini.

Penyelesaian. Konversnya adalah "Jika Anda boleh pergi ke pesta, maka Anda membersihkan kamar."

Kontraposisinya adalah "Jika Anda tidak boleh pergi ke pesta, maka Anda tidak membersihkan kamar."

Inversnya adalah "Jika Anda tidak membersihkan kamar, maka Anda tidak boleh pergi ke pesta."

Secara simbolis, konvers dan kontraposisi sama-sama *menukar* urutan kedua bagian pernyataan (atau, sebagai cara lain untuk membayangkannya, membalik arah panah). Kontraposisi dan invers mengambil *negasi* dari kedua pernyataan. Perhatikan bahwa jika Anda mengambil konvers (menukar urutan), lalu mengambil kontraposisi *dari* konvers tersebut (mengembalikan urutan dan menegasikan kedua bagian), Anda memperoleh invers. Jadi, invers tidak lain adalah kontraposisi dari konvers. Atau konvers dari kontraposisi, suatu fakta menarik untuk disebutkan di pesta.

Ketika mempertimbangkan pernyataan berkuantor, kita mengabaikan kuantor di bagian luar saat membentuk konvers, kontraposisi, dan invers.

Kuantor serta Konvers, Kontraposisi, dan Invers.

Implikasi berkuantor $\forall x(P(x) \to Q(x))$ memiliki:

Konvers	$\forall x(Q(x) \to P(x))$
Kontraposisi	$\forall x(\neg Q(x) \to \neg P(x))$
Invers	$\forall x(\neg P(x) \to \neg Q(x))$

Keterangan 1.2.8 Kita kecil kemungkinan menjumpai pernyataan berbentuk $\exists x(P(x) \to Q(x))$, sebab pernyataan ini akan otomatis benar jika ada suatu x

yang membuat $P(x)$ salah. Namun, jika kita menjumpainya, aturan yang sama seperti di atas berlaku bagi konvers, kontraposisi, dan invers: abaikan saja kuantornya ketika menukar dan/atau menegasikan bagian-bagian implikasi.

Sebagai contoh, "Untuk semua bangun, jika bangun tersebut merupakan persegi, maka bangun tersebut merupakan persegi panjang" (yaitu, semua persegi adalah persegi panjang) memiliki konvers "Untuk semua bangun, jika bangun tersebut merupakan persegi panjang, maka bangun tersebut merupakan persegi" (jadi, semua persegi panjang adalah persegi).

Nah, pernyataan itu tidak benar! Ada bangun yang merupakan persegi panjang tetapi BUKAN persegi. Ini memang merupakan contoh pernyataan benar dengan konvers yang salah. Banyak contoh seperti ini dijumpai di seluruh matematika. Ada pula contoh implikasi benar yang konversnya juga benar. Anda tidak dapat mengetahuinya hanya dari logikanya.[2]

Kontraposisi dari "Untuk semua bangun, jika bangun tersebut merupakan persegi, maka bangun tersebut merupakan persegi panjang" adalah "Untuk semua bangun, jika bangun tersebut bukan persegi panjang, maka bangun tersebut bukan persegi." Pernyataan ini benar. Bahkan, ***kontraposisi dari pernyataan yang benar selalu benar***!

Karena kontraposisi suatu implikasi selalu memiliki nilai kebenaran yang sama dengan implikasi asalnya, sering kali menganalisis kontraposisi dapat membantu menentukan apakah suatu implikasi benar.

Contoh 1.2.9

Benar atau salah: Jika Anda mengambil sembilan kartu apa pun dari satu set kartu standar, maka Anda akan memiliki setidaknya tiga kartu dengan jenis yang sama. Apakah konversnya benar?

Penyelesaian. Benar. Implikasi semula agak sulit dianalisis karena ada begitu banyak kombinasi sembilan kartu. Namun, perhatikan kontraposisinya: jika Anda *tidak* memiliki setidaknya tiga kartu dengan jenis yang sama, maka Anda tidak memiliki sembilan kartu. Alasan kebenarannya mudah dilihat. Jika Anda tidak memiliki setidaknya tiga kartu dari satu jenis, Anda paling banyak memiliki dua kartu dari masing-masing keempat jenis, sehingga jumlahnya paling banyak delapan kartu.

Konversnya: Jika Anda memiliki setidaknya tiga kartu dengan jenis yang sama, maka Anda memiliki sembilan kartu. Pernyataan ini salah. Anda bisa saja hanya memiliki tiga sekop. Perhatikan bahwa untuk menunjukkan bahwa konvers tersebut (sebuah implikasi) salah, kita memberikan contoh

[2]Ternyata Teorema Pythagoras merupakan salah satu pernyataan demikian. Juga benar bahwa *jika* $a^2 + b^2 = c^2$, *maka* terdapat segitiga siku-siku dengan sisi-sisi siku-siku sepanjang a dan b serta hipotenusa sepanjang c. Jadi, kita juga dapat menuliskan teorema tersebut sebagai bikondisional: "a dan b adalah panjang sisi-sisi siku-siku suatu segitiga siku-siku dengan hipotenusa sepanjang c *jika dan hanya jika* $a^2 + b^2 = c^2$."

ketika premisnya benar (Anda memang memiliki tiga kartu dengan jenis yang sama), tetapi kesimpulannya salah (Anda tidak memiliki sembilan kartu). Dengan kata lain, kita mencari contoh yang menempatkan kita pada baris 2 tabel kebenaran implikasi.

Memahami konvers dan kontraposisi dapat membantu kita memahami implikasi dan nilai kebenarannya:

Contoh 1.2.10

Misalkan saya memberi tahu Sue bahwa jika ia mendapat nilai 93% pada ujian akhirnya, maka ia akan mendapat nilai A dalam mata kuliah tersebut. Dengan mengasumsikan bahwa perkataan saya benar, apa yang dapat Anda simpulkan dalam kasus-kasus berikut?

1. Sue mendapat nilai 93% pada ujian akhirnya.
2. Sue mendapat nilai A dalam mata kuliah tersebut.
3. Sue tidak mendapat nilai 93% pada ujian akhirnya.
4. Sue tidak mendapat nilai A dalam mata kuliah tersebut.

Penyelesaian. Pertama-tama, perhatikan bahwa setiap kali $P \to Q$ dan P keduanya merupakan pernyataan yang benar, Q juga harus benar. Untuk soal ini, gunakan P untuk menyatakan "Sue mendapat nilai 93% pada ujian akhirnya" dan Q untuk menyatakan "Sue akan mendapat nilai A dalam mata kuliah tersebut."

1. Kita memiliki $P \to Q$ dan P, sehingga Q mengikuti. Sue mendapat nilai A.
2. Anda tidak dapat menyimpulkan apa pun. Sebagai contoh, Sue mungkin mendapat nilai A karena mengerjakan tugas tambahan. Perhatikan bahwa kita tidak mengetahui apakah, jika Sue mendapat nilai A, maka ia mendapat nilai 93% pada ujian akhirnya. Pernyataan tersebut adalah konvers dari implikasi semula, sehingga bisa benar atau salah.
3. Kontraposisi dari konvers $P \to Q$ adalah $\neg P \to \neg Q$, yang menyatakan bahwa jika Sue tidak mendapat nilai 93% pada ujian akhir, maka ia tidak akan mendapat nilai A dalam mata kuliah tersebut. Namun, hal ini tidak mengikuti implikasi semula. Sekali lagi, kita tidak dapat menyimpulkan apa pun. Sue mungkin saja mengerjakan tugas tambahan.
4. Apa yang akan terjadi jika Sue tidak mendapat nilai A tetapi *memang* mendapat nilai 93% pada ujian akhir? Dalam hal itu, P benar dan

Q salah. Ini membuat implikasi $P \to Q$ salah! Jadi, Sue pasti tidak mendapat nilai 93% pada ujian akhir. Perhatikan bahwa sekarang kita memiliki implikasi $\neg Q \to \neg P$, yaitu kontraposisi dari $P \to Q$. Karena $P \to Q$ diasumsikan benar, kita tahu bahwa $\neg Q \to \neg P$ juga benar.

Seperti yang telah kita katakan di atas, suatu implikasi tidak ekuivalen secara logis dengan konversnya, tetapi implikasi dan konversnya mungkin sama-sama benar. Dalam hal ini, ketika $P \to Q$ dan $Q \to P$ keduanya benar, kita mengatakan bahwa P dan Q ekuivalen dan menuliskan $P \leftrightarrow Q$. Ini merupakan bikondisional yang kita sebutkan dalam Subbab 1.1.

Anda dapat memandang pernyataan "jika dan hanya jika" sebagai pernyataan yang memiliki dua bagian: suatu implikasi dan konversnya. Kita dapat menyebut salah satunya sebagai bagian "jika", dan yang lain sebagai bagian "hanya jika". Kadang-kadang kita juga mengatakan bahwa pernyataan "jika dan hanya jika" memiliki dua arah: arah maju ($P \to Q$) dan arah mundur ($P \leftarrow Q$, yang sebenarnya hanyalah notasi kurang cermat untuk $Q \to P$).

Mari kita pikirkan sejenak bagian mana yang merupakan bagian yang mana. Apakah $P \to Q$ merupakan bagian "jika" atau bagian "hanya jika"? Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.2.11

Misalkan benar bahwa saya bernyanyi jika dan hanya jika saya sedang mandi. Kita tahu bahwa ini berarti jika saya bernyanyi, maka saya sedang mandi, dan juga konversnya, yaitu jika saya sedang mandi, maka saya bernyanyi. Misalkan P adalah pernyataan "Saya bernyanyi," dan Q adalah "Saya sedang mandi." Dengan demikian, $P \to Q$ adalah pernyataan "jika saya bernyanyi, maka saya sedang mandi." Ini merupakan bagian mana dari pernyataan jika dan hanya jika?

Yang sebenarnya kita tanyakan adalah arti "Saya bernyanyi *jika* saya sedang mandi" dan "Saya bernyanyi *hanya jika* saya sedang mandi." Kapan pernyataan pertama (bagian "jika") bernilai *salah*? Ketika saya sedang mandi tetapi tidak bernyanyi. Itu merupakan kondisi salah yang sama dengan pernyataan "Jika saya sedang mandi, maka saya bernyanyi." Jadi, bagian "jika" adalah $Q \to P$. Di sisi lain, mengatakan "Saya bernyanyi hanya jika saya sedang mandi" ekuivalen dengan mengatakan "Jika saya bernyanyi, maka saya sedang mandi," sehingga bagian "hanya jika" adalah $P \to Q$.

Mengetahui bagian mana yang merupakan bagian "jika" atau "hanya jika" tidaklah terlalu penting, tetapi hal ini menggambarkan sesuatu yang sangat penting: *Ada banyak cara untuk menyatakan suatu implikasi!*

Contoh 1.2.12

Nyatakan kembali implikasi "Jika saya bermimpi, maka saya sedang tidur" dengan sebanyak mungkin cara. Kemudian lakukan hal yang sama untuk konversnya.

Penyelesaian. Pernyataan-pernyataan berikut semuanya ekuivalen dengan implikasi semula:

1. Saya sedang tidur jika saya bermimpi.
2. Saya bermimpi hanya jika saya sedang tidur.
3. Agar dapat bermimpi, saya harus sedang tidur.
4. Untuk bermimpi, keadaan sedang tidur merupakan syarat perlu.
5. Untuk berada dalam keadaan tidur, bermimpi merupakan syarat cukup.
6. Saya tidak bermimpi kecuali jika saya sedang tidur.

Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen dengan konversnya (jika saya sedang tidur, maka saya bermimpi):

1. Saya bermimpi jika saya sedang tidur.
2. Saya sedang tidur hanya jika saya bermimpi.
3. Bermimpi merupakan syarat perlu untuk berada dalam keadaan tidur.
4. Berada dalam keadaan tidur merupakan syarat cukup untuk bermimpi.
5. Jika saya tidak bermimpi, maka saya tidak sedang tidur.

Semoga Anda setuju dengan contoh di atas. Kita menyertakan versi "perlu dan cukup" karena istilah tersebut umum digunakan dalam pembahasan matematika. Mari kita tetapkan maknanya secara tegas.

Definisi 1.2.13 Syarat Perlu dan Syarat Cukup.

- "P merupakan syarat perlu bagi Q" berarti $Q \to P$.
- "P merupakan syarat cukup bagi Q" berarti $P \to Q$.
- Jika P merupakan syarat perlu dan cukup bagi Q, maka $P \leftrightarrow Q$.

Sejujurnya, saya mengalami kesulitan dengan istilah-istilah ini jika tidak sangat berhati-hati. Menurut saya, memiliki sebuah contoh baku sebagai acuan sangat membantu.

Contoh 1.2.14

Dalam satu set kartu standar, jenis kartu berwarna merah adalah hati dan wajik. Jenis kartu berwarna hitam adalah keriting dan sekop. Jadi, setelah mengambil sebuah kartu, benar bahwa jika kartu saya adalah sekop, maka kartu saya berwarna hitam.

Nyatakan kembali fakta ini dengan menggunakan ungkapan syarat perlu dan syarat cukup.

Penyelesaian. Agar kartu saya merupakan sekop, kartu itu harus berwarna hitam; dengan kata lain, berwarna hitam merupakan syarat perlu. Namun, berwarna hitam bukan syarat cukup untuk menyatakan bahwa saya memegang sekop (karena kartu itu mungkin keriting).

Saya juga dapat mengatakan bahwa memiliki sekop merupakan syarat cukup untuk memiliki kartu hitam. Memiliki sekop bukan syarat perlu.

Akan membantu jika kita memikirkan banyaknya bukti yang diperlukan. Apakah mengetahui bahwa kartu tersebut merupakan sekop merupakan bukti yang cukup untuk menyimpulkan bahwa kartu itu berwarna hitam? Ya, itu cukup! Menjadi sekop merupakan syarat cukup agar kartu tersebut berwarna hitam.

Memikirkan perlu dan cukupnya suatu syarat juga dapat membantu ketika menulis bukti dan memberikan pembenaran bagi kesimpulan. Jika Anda ingin membuktikan suatu fakta matematika, akan membantu untuk memikirkan fakta lain apa yang *sudah memadai* (cukup) untuk membuktikan fakta tersebut. Jika Anda memiliki suatu asumsi, pikirkan apa yang juga harus menjadi syarat perlu jika premis itu benar.

1.2.4 Pertanyaan Bacaan

1. Kebetulan benar bahwa semua mamalia memiliki rambut. Manakah di antara pernyataan berikut yang juga benar?

A. Memiliki rambut merupakan syarat perlu untuk menjadi mamalia.

B. Memiliki rambut merupakan syarat cukup untuk menjadi mamalia.

C. Jika seekor hewan tidak memiliki rambut, maka hewan itu bukan mamalia.

D. Seekor hewan merupakan mamalia hanya jika hewan itu memiliki rambut.

2. Berikan contoh suatu implikasi *benar* (dituliskan dengan kata-kata) yang memiliki konvers *salah*. Jelaskan mengapa implikasi Anda benar dan mengapa konversnya salah.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan mengenai isi bagian ini yang membuat Anda ingin

tahu.

1.2.5 Soal Latihan

1. Di dalam brankas saya terdapat selembar kertas yang memuat dua bangun yang digambar dengan krayon berwarna. Bangun yang satu merupakan lingkaran dan bangun yang lain merupakan segi lima. Setiap bangun digambar dengan satu warna. Misalkan Anda memercayai pernyataan saya, "Jika bangun lingkaran berwarna ungu, maka bangun segi lima berwarna jingga."

Berdasarkan informasi tersebut, apa yang Anda ketahui tentang nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut?

(a) Bangun lingkaran dan bangun segi lima sama-sama berwarna ungu.

(b) Bangun lingkaran dan bangun segi lima sama-sama berwarna jingga.

(c) Bangun lingkaran tidak berwarna ungu, atau bangun segi lima berwarna jingga.

(d) Jika bangun segi lima berwarna jingga, maka bangun lingkaran berwarna ungu.

(e) Jika bangun segi lima tidak berwarna jingga, maka bangun lingkaran tidak berwarna ungu.

2. Misalkan pernyataan *"Jika bangun persegi berwarna kuning, maka bangun lingkaran berwarna ungu"* benar. Anggap pula bahwa konversnya salah. Klasifikasikan setiap pernyataan di bawah ini sebagai benar atau salah (jika mungkin).

(a) Bangun lingkaran berwarna ungu.

(b) Bangun persegi berwarna kuning jika dan hanya jika bangun lingkaran tidak berwarna ungu.

(c) Bangun persegi berwarna kuning.

(d) Bangun persegi berwarna kuning jika dan hanya jika bangun lingkaran berwarna ungu.

3. Perhatikan pernyataan *"Jika Anda memberi saya kacang ajaib, maka saya akan memberi Anda seekor sapi."* Tentukan apakah setiap pernyataan di bawah ini merupakan konvers, kontraposisi, atau bukan keduanya.

(a) Jika saya memberi Anda seekor sapi, maka Anda tidak akan memberi saya kacang ajaib.

(b) Jika saya memberi Anda seekor sapi, maka Anda akan memberi saya kacang ajaib.

(c) Jika Anda tidak memberi saya kacang ajaib, maka saya tidak akan memberi Anda seekor sapi.

(d) Jika Anda memberi saya kacang ajaib, maka saya tidak akan memberi Anda seekor sapi.

(e) Anda akan memberi saya kacang ajaib, dan saya tidak akan memberi Anda seekor sapi.

(f) Jika saya tidak memberi Anda seekor sapi, maka Anda tidak akan memberi saya kacang ajaib.

4. Anda menemukan sebuah makalah lama tentang teori graf yang membahas *viskositas* suatu graf (sejauh yang Anda ketahui, istilah tersebut mungkin sepenuhnya diciptakan oleh penulisnya). Sebuah teorema dalam makalah itu menyatakan, "jika suatu graf memenuhi *kondisi (V)*, maka graf tersebut *bersifat viskos*." Manakah di antara pernyataan berikut yang ekuivalen dengan klaim tersebut? Manakah yang ekuivalen dengan *konvers* klaim tersebut?

(a) Hanya graf yang bersifat viskos yang memenuhi kondisi (V).

(b) Agar suatu graf bersifat viskos, graf tersebut harus memenuhi kondisi (V).

(c) Suatu graf bersifat viskos hanya jika graf tersebut memenuhi kondisi (V).

(d) Memenuhi kondisi (V) merupakan syarat perlu agar suatu graf bersifat viskos.

(e) Suatu graf bersifat viskos jika graf tersebut memenuhi kondisi (V).

5. Manakah di antara pernyataan berikut yang ekuivalen dengan implikasi "*jika Anda memenangi lotre, maka Anda akan menjadi kaya*," dan manakah yang ekuivalen dengan konvers implikasi tersebut?

(a) Jika Anda tidak kaya, maka Anda tidak memenangi lotre.

(b) Memenangi lotre merupakan syarat cukup untuk menjadi kaya.

(c) Anda memenangi lotre, atau Anda tidak kaya.

(d) Jika Anda kaya, Anda pasti telah memenangi lotre.

(e) Anda akan memenangi lotre jika dan hanya jika Anda kaya.

1.2.6 Latihan Tambahan

1. Terjemahkan ke dalam bahasa Indonesia:

(a) $\forall x(E(x) \rightarrow E(x+2))$.

(b) $\forall x \exists y(\sin(x) = y)$.

(c) $\forall y \exists x(\sin(x) = y)$.

(d) $\forall x \forall y (x^3 = y^3 \rightarrow x = y)$.

2. Perhatikan pernyataan berikut: "Jika Oscar makan makanan Tionghoa, maka ia minum susu."

(a) Tulislah konvers pernyataan tersebut.

(b) Tulislah kontraposisi pernyataan tersebut.

(c) Mungkinkah kontraposisinya salah? Jika demikian, apa yang dapat Anda simpulkan?

(d) Misalkan pernyataan asal benar dan Oscar minum susu. Dapatkah Anda menyimpulkan sesuatu (tentang apakah ia makan makanan Tionghoa)? Jelaskan.

(e) Misalkan pernyataan asal benar dan Oscar tidak minum susu. Dapatkah Anda menyimpulkan sesuatu (tentang apakah ia makan makanan Tionghoa)? Jelaskan.

3. Tulislah setiap pernyataan berikut dalam bentuk "Jika . . . , maka . . . ." Berhati-hatilah: beberapa pernyataan mungkin salah (hal itu tidak menjadi masalah untuk tujuan pertanyaan ini).

(a) Untuk menurunkan berat badan, Anda harus berolahraga.

(b) Untuk menurunkan berat badan, Anda hanya perlu berolahraga.

(c) Setiap orang Amerika bersifat patriotik.

(d) Anda bersifat patriotik hanya jika Anda orang Amerika.

(e) Himpunan bilangan rasional merupakan himpunan bagian dari bilangan real.

(f) Suatu bilangan prima jika bilangan tersebut tidak genap.

(g) Broncos akan memenangi Super Bowl, atau mereka tidak akan bermain dalam Super Bowl.

4. Perhatikan implikasi berikut: "Jika Anda membersihkan kamar, maka Anda boleh menonton televisi." Nyatakan kembali implikasi tersebut dalam sebanyak mungkin bentuk. Kemudian lakukan hal yang sama untuk konversnya.

5. Ingat kembali dari kalkulus: jika suatu fungsi terdiferensialkan di titik c, maka fungsi tersebut kontinu di c, tetapi konvers pernyataan ini tidak benar (misalnya, $f(x) = |x|$ di titik 0). Nyatakan kembali fakta ini dengan menggunakan bahasa "perlu dan cukup".

6. Perhatikan pernyataan berikut: "Untuk setiap bilangan asli n, jika n prima, maka n soliter." Untuk soal ini, Anda tidak perlu mengetahui arti *soliter*; cukup ketahui bahwa soliter merupakan sifat yang dimiliki sebagian bilangan tetapi

tidak dimiliki bilangan lainnya.

(a) Tulislah konvers dan kontraposisi pernyataan tersebut, serta tandai masing-masing. Catatan: pernyataan asal mengklaim bahwa suatu implikasi benar untuk setiap n, dan implikasi itulah yang kita ambil konvers dan kontraposisinya.

(b) Tulislah negasi pernyataan asal. Apa yang perlu Anda tunjukkan untuk membuktikan bahwa pernyataan tersebut salah?

(c) Walaupun Anda tidak mengetahui apakah 10 soliter (bahkan, tidak seorang pun mengetahuinya), apakah pernyataan "Jika 10 prima, maka 10 soliter" benar atau salah? Jelaskan.

(d) Ternyata 8 soliter. Apakah fakta ini memberi tahu Anda sesuatu tentang benar atau salahnya pernyataan asal, konversnya, atau kontraposisinya? Jelaskan.

(e) Dengan mengasumsikan bahwa pernyataan asal benar, apa yang dapat Anda katakan tentang hubungan antara *himpunan P* bilangan prima dan *himpunan S* bilangan soliter? Jelaskan.

1.3 Aturan Logika

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menggunakan tabel kebenaran untuk menentukan apakah dua pernyataan ekuivalen secara logis.
2. Menggunakan tabel kebenaran untuk menentukan apakah suatu aturan deduksi sahih.
3. Menggunakan ekuivalensi logis dan aturan deduksi untuk menyederhanakan pernyataan dan membuat deduksi.

1.3.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Holmes selalu mengenakan salah satu dari dua rompi miliknya: satu berbahan wol kasar dan satu berwarna hijau mint. Ia selalu mengenakan rompi hijau atau sepatu merah. Setiap kali mengenakan kemeja ungu dan rompi hijau, ia memilih untuk tidak memakai dasi kupu-kupu. Ia tidak pernah mengenakan rompi hijau kecuali jika ia juga mengenakan kemeja ungu atau sepatu merah. Setiap kali mengenakan sepatu merah, ia juga mengenakan kemeja ungu. Hari ini, Holmes memakai dasi kupu-kupu. Apa lagi yang ia kenakan?

Cobalah 1.3.1

Luangkan beberapa menit untuk memikirkan pertanyaan *Selidiki!* di atas. Dari enam pernyataan dalam teka-teki tersebut, hanya satu yang atomik. Gunakan pernyataan atomik ini dan satu pernyataan lain untuk menyimpulkan pernyataan baru tentang apa yang mungkin dikenakan (atau tidak dikenakan) Holmes. Jelaskan mengapa menurut Anda pernyataan baru tersebut benar.

Petunjuk. Pernyataan atomiknya adalah, "Holmes memakai dasi kupu-kupu." Hanya satu pernyataan majemuk yang memuat pernyataan ini sebagai salah satu *atom*-nya.

Logika mempelajari cara pernyataan-pernyataan saling berinteraksi. Lebih tepatnya, kita menelaah bagaimana bentuk logis pernyataan dapat saling berinteraksi.

Kajian logika tidak mempersoalkan isi pernyataan atomik ataupun makna predikat. Sebagai contoh, klaim "Jika laba-laba memiliki enam kaki, maka Sam berjalan pincang," dan "Jika bulan terbuat dari keju, maka cheddar adalah sejenis keju," identik dari sudut pandang logika. Logika tidak mempersoalkan apakah Sam seekor laba-laba atau apa bahan penyusun bulan menurut ilmu kuliner. Kedua pernyataan memiliki bentuk yang sama: keduanya merupakan implikasi, $P \to Q$.

Tentu saja, dalam matematika kita sering kali *memang* mengetahui hubungan di antara berbagai pernyataan atomik. Sebagai contoh, kita mengetahui hubungan antara sifat genap dan sifat kelipatan 10. Hubungan itu memungkinkan kita membuat klaim seperti, "Jika bilangan yang sedang saya pikirkan merupakan kelipatan 10, maka bilangan itu genap." Misalkan saya juga memberi tahu Anda bahwa sekarang saya sedang memikirkan suatu bilangan yang tidak genap. Kita dapat menyimpulkan bahwa saya tidak sedang memikirkan kelipatan 10! Yang terpenting, jika kita menerima kebenaran pernyataan-pernyataan tersebut, kita dapat membuat deduksi ini tanpa memikirkan hakikat bilangan. Kemampuan memisahkan isi argumen dari bentuk logisnya dapat terasa sangat membebaskan dan memberi kejernihan yang amat dibutuhkan ketika kita mencoba memahami penalaran yang rumit.

Tujuan kita dalam bagian ini adalah menetapkan beberapa prosedur untuk menganalisis bagaimana kebenaran atau kesalahan pernyataan saling berinteraksi berdasarkan bentuk logisnya. Kita akan melihat bahwa beberapa pernyataan majemuk pasti benar tanpa bergantung pada benar atau salahnya bagian-bagian atomiknya, sedangkan beberapa pernyataan lain pasti selalu salah. Untuk pernyataan lainnya, dua pernyataan dapat selalu benar atau salah secara bersamaan, atau setiap kali satu pernyataan benar, pernyataan lain juga harus benar.

Metode utama untuk menetapkan hubungan-hubungan ini adalah **tabel kebenaran**. Ada prosedur yang sangat jelas untuk menyusun dan menganalisis tabel kebenaran, tetapi untuk argumen rumit yang memuat banyak pernyataan atomik, tabel kebenarannya menjadi sangat besar dan sukar ditangani. Karena itu, kita akan menggunakan tabel kebenaran untuk memahami beberapa ekuivalensi dan deduksi dasar yang dapat diterapkan dalam suatu rangkaian penalaran guna membangun argumen yang lebih besar.

Aktivitas Pratinjau

1. Perhatikan pernyataan, "Setiap kali Holmes mengenakan kemeja ungu dan rompi hijau, ia memilih untuk tidak memakai dasi kupu-kupu." Misalkan P adalah pernyataan "Holmes mengenakan kemeja ungu," G adalah pernyataan "Holmes mengenakan rompi hijau," dan B adalah pernyataan "Holmes memakai dasi kupu-kupu." Manakah di antara pilihan berikut yang merupakan terjemahan terbaik pernyataan tersebut ke dalam logika proposisional?

A. $(P \wedge G) \to \neg B$

B. $(P \wedge G) \to B$

C. $(P \vee G) \to \neg B$

D. $P \wedge (G \rightarrow B)$

2. Perhatikan pernyataan, "Holmes tidak pernah mengenakan rompi hijau kecuali jika ia juga mengenakan kemeja ungu atau sepatu merah." Dengan P dan G seperti pada pertanyaan sebelumnya, serta R sebagai pernyataan "Holmes mengenakan sepatu merah," manakah di antara pilihan berikut yang merupakan terjemahan terbaik pernyataan tersebut ke dalam logika proposisional?

A. $G \rightarrow (P \vee R)$

B. $\neg G \rightarrow (P \vee R)$

C. $(P \vee R) \rightarrow G$

D. $(P \vee R) \rightarrow \neg G$

3. Perhatikan pernyataan "Jika Anda mengambil jurusan matematika, maka Anda akan mendapat pekerjaan bergaji tinggi," dan pernyataan "Anda tidak mengambil jurusan matematika, atau Anda akan mendapat pekerjaan bergaji tinggi." Dalam kasus manakah di antara pilihan berikut *kedua* pernyataan itu benar? Pilih semua yang sesuai.

A. Anda mengambil jurusan matematika dan mendapat pekerjaan bergaji tinggi.

B. Anda mengambil jurusan matematika dan tidak mendapat pekerjaan bergaji tinggi.

C. Anda tidak mengambil jurusan matematika dan mendapat pekerjaan bergaji tinggi.

D. Anda tidak mengambil jurusan matematika dan tidak mendapat pekerjaan bergaji tinggi.

1.3.2 Tabel Kebenaran

Berikut sebuah pertanyaan tentang permainan Monopoli:

> Jika Anda mendapat lebih banyak lemparan angka kembar daripada pemain lain, maka Anda akan kalah, atau jika Anda kalah, maka Anda pasti telah membeli properti terbanyak.

Benar atau salah? Kita akan menjawab pertanyaan ini tanpa perlu mengetahui apa pun tentang Monopoli. Sebagai gantinya, kita akan melihat *bentuk* logis pernyataan tersebut.

Kita perlu menentukan kapan pernyataan $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)$ benar. Dengan menggunakan definisi konektif dalam Definisi 1.1.8, kita melihat bahwa agar pernyataan ini benar, $P \rightarrow Q$ harus benar atau $Q \rightarrow R$ harus benar (atau keduanya). Pernyataan-pernyataan itu benar jika P salah atau Q benar (pada kasus pertama), dan Q salah atau R benar (pada kasus kedua). Jadi—ya, ini menjadi agak rumit.

Untungnya, kita dapat membuat bagan untuk mencatat semua kemungkinan dengan sebuah **tabel kebenaran**.

Gagasannya demikian: Pada setiap baris, kita mencantumkan satu kemungkinan kombinasi B dan S (Benar dan Salah) untuk setiap variabel proposisional, lalu menandai apakah pernyataan (majemuk) yang dibahas benar atau salah dalam kasus tersebut. Kita melakukan ini untuk setiap kemungkinan kombinasi B dan S. Dengan demikian, kita dapat melihat dengan jelas kasus-kasus ketika pernyataan itu benar atau salah. Untuk pernyataan yang rumit, pertama-tama kita akan mengisi nilai untuk setiap bagian pernyataan sebagai cara memecah tugas menjadi bagian-bagian yang lebih kecil dan lebih mudah ditangani.

Karena nilai kebenaran suatu pernyataan sepenuhnya ditentukan oleh nilai kebenaran bagian-bagiannya dan cara bagian-bagian itu dihubungkan, yang perlu Anda ketahui hanyalah tabel kebenaran untuk setiap konektif logis, yang telah kita lihat dalam Gambar 1.1.9

Semua tabel kebenaran yang kita bahas di sini dibangun dari tabel-tabel dasar dengan menerapkan aturan dasar beberapa kali.

Contoh 1.3.2

Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan $\neg P \vee Q$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa pernyataan ini bukan $\neg(P \vee Q)$; negasi hanya berlaku pada P. **Konektif utama** di sini adalah $\vee$, yang berarti kita akan menggunakan tabel kebenarannya *terakhir*. Pertama, kita menerapkan tabel kebenaran untuk $\neg$, lalu menerapkan tabel kebenaran untuk $\vee$ dengan menggunakan "masukan" dari $\neg P$ dan Q.

Karena terdapat dua variabel, ada empat kemungkinan kombinasi B dan S. Dengan menggabungkan semuanya, kita memperoleh tabel kebenaran berikut.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
B	B	S	B
B	S	S	S
S	B	B	B
S	S	B	B

Kita menambahkan kolom untuk $\neg P$ agar pengisian kolom terakhir lebih mudah. Entri pada kolom $\neg P$ ditentukan oleh entri pada kolom P. Kemudian, untuk mengisi kolom terakhir, perhatikan hanya kolom Q dan kolom $\neg P$, lalu gunakan aturan untuk $\vee$.

Sekarang mari kita jawab pertanyaan kita tentang Monopoli.

Contoh 1.3.3

Analisislah pernyataan "Jika Anda mendapat lebih banyak lemparan angka kembar daripada pemain lain, maka Anda akan kalah, atau jika Anda kalah, maka Anda pasti telah membeli properti terbanyak," dengan menggunakan tabel kebenaran.

Penyelesaian. Nyatakan pernyataan tersebut dengan simbol sebagai $(P \to Q) \vee (Q \to R)$, dengan P sebagai pernyataan "Anda mendapat lebih banyak lemparan angka kembar daripada pemain lain," Q sebagai pernyataan "Anda akan kalah," dan R sebagai pernyataan "Anda pasti telah membeli properti terbanyak." Sekarang buatlah tabel kebenaran.

Tabel kebenaran harus memuat 8 baris untuk mencakup setiap kemungkinan kombinasi benar dan salah di antara ketiga pernyataan. Berikut tabel kebenaran lengkapnya:

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \vee (Q \to R)$
B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	B
B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B

Tiga kolom pertama hanyalah daftar sistematis semua kemungkinan kombinasi B dan S untuk ketiga pernyataan (dapatkah Anda melihat bagaimana mencantumkan 16 kemungkinan kombinasi untuk empat pernyataan?). Dua kolom berikutnya ditentukan oleh nilai P, Q, dan R serta definisi implikasi. Kemudian, kolom terakhir ditentukan oleh nilai pada dua kolom sebelumnya dan definisi $\vee$. Kolom terakhir inilah yang kita perhatikan.

Perhatikan bahwa dalam masing-masing dari delapan kemungkinan kasus, pernyataan yang dibahas bernilai benar. Jadi, pernyataan kita tentang Monopoli benar (tanpa bergantung pada berapa banyak properti yang Anda miliki, berapa kali Anda melempar angka kembar, atau apakah Anda menang atau kalah).

Pernyataan tentang Monopoli adalah contoh **tautologi**, yaitu pernyataan yang niscaya benar semata-mata berdasarkan bentuk logisnya. Tautologi selalu benar, tetapi tidak banyak memberi tahu kita tentang dunia. Kita tidak memerlukan pengetahuan tentang Monopoli untuk menentukan bahwa pernyataan tersebut benar; jadi, mengetahui bahwa pernyataan itu benar tidak memberi tahu kita apa pun tentang Monopoli. Sama benarnya dengan pernyataan "jika bulan terbuat dari keju, maka Elvis masih hidup, atau jika Elvis masih hidup, maka unicorn memiliki

5 kaki."

1.3.3 Ekuivalensi Logis

Anda mungkin telah memperhatikan dalam Contoh 1.3.2 bahwa kolom terakhir pada tabel kebenaran untuk $\neg P \vee Q$ identik dengan kolom terakhir pada tabel kebenaran untuk $P \to Q$:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	B	B
S	S	B	B

Ini menunjukkan bahwa apa pun nilai P dan Q, pernyataan $\neg P \vee Q$ dan $P \to Q$ selalu keduanya benar atau keduanya salah. Karena itu, kita mengatakan bahwa pernyataan-pernyataan tersebut **ekuivalen secara logis**.

Definisi 1.3.4 Ekuivalensi Logis.

Dua pernyataan (majemuk) P dan Q disebut **ekuivalen secara logis** jika P benar tepat ketika Q benar. Artinya, P dan Q memiliki nilai kebenaran yang sama untuk setiap pemberian nilai kebenaran pada bagian-bagian atomiknya.

Kita menuliskannya sebagai $P \equiv Q$.

Untuk memverifikasi bahwa dua pernyataan ekuivalen secara logis, Anda dapat membuat tabel kebenaran untuk masing-masing pernyataan dan memeriksa apakah kolom untuk kedua pernyataan tersebut identik.

Dalam Subbab 1.2 kita menyatakan bahwa setiap kali suatu implikasi benar, kontraposisinya juga benar. Sekarang kita dapat menyatakan klaim ini sebagai teorema berikut.

Teorema 1.3.5

Suatu implikasi ekuivalen secara logis dengan kontraposisinya. Artinya,

$$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P.$$

Bukti. Kita cukup memeriksa tabel-tabel kebenarannya.

P	Q	$P \to Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
B	B	S	S	B
B	S	B	S	S
S	B	S	B	B
S	S	B	B	B

(Perhatikan bahwa kombinasi nilai kebenaran dalam kedua tabel disusun

dengan urutan yang sama, sehingga kita dapat dengan mudah melihat bahwa kolom terakhirnya identik.)

Mengenali dua pernyataan sebagai ekuivalen secara logis dapat sangat membantu. Merumuskan ulang suatu pernyataan matematika sering kali memberi wawasan tentang maknanya atau cara membuktikan maupun menyangkalnya. Dengan menggunakan tabel kebenaran, kita dapat memverifikasi secara sistematis bahwa dua pernyataan memang ekuivalen secara logis.

Contoh 1.3.6

Apakah pernyataan "Tidak akan turun hujan atau salju," dan "Tidak akan turun hujan dan tidak akan turun salju," ekuivalen secara logis?

Penyelesaian. Kita ingin mengetahui apakah $\neg(P \vee Q)$ ekuivalen secara logis dengan $\neg P \wedge \neg Q$. Buatlah tabel kebenaran yang memuat kedua pernyataan:

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
B	B	S	S
B	S	S	S
S	B	S	S
S	S	B	B

Karena nilai kebenaran kedua pernyataan sama pada setiap baris, kedua pernyataan tersebut ekuivalen secara logis.

Perhatikan bahwa contoh ini memberi kita cara untuk "mendistribusikan" negasi terhadap disjungsi ("atau"). Kita memiliki aturan serupa untuk mendistribusikan negasi terhadap konjungsi ("dan"):

Teorema 1.3.7 Hukum De Morgan.

Negasi dari suatu disjungsi atau konjungsi masing-masing ekuivalen secara logis dengan konjungsi atau disjungsi dari negasi-negasinya. Artinya,

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

dan,

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q.$$

Hal ini menunjukkan bahwa mungkin ada semacam "aljabar" yang dapat diterapkan pada pernyataan (memang ada: disebut *aljabar Boolean*) untuk mengubah satu pernyataan menjadi pernyataan lain. Kita dapat mulai mengumpulkan contoh-contoh ekuivalensi logis yang berguna dan menerapkannya secara berturut-turut pada suatu pernyataan, alih-alih menuliskan tabel kebenaran yang rumit.

Hukum De Morgan tidak secara langsung membantu kita menangani implikasi, tetapi seperti yang kita lihat di atas, setiap implikasi dapat ditulis sebagai disjungsi:

Implikasi adalah Disjungsi.

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q.$$

Contoh: "Jika suatu bilangan merupakan kelipatan 4, maka bilangan itu genap" ekuivalen dengan "Suatu bilangan bukan kelipatan 4, atau (jika bukan demikian) bilangan itu genap."

Dengan hasil ini dan hukum De Morgan, Anda dapat mengambil pernyataan apa pun dan *menyederhanakannya* hingga negasi hanya diterapkan pada proposisi atomik. Namun, mungkin saja beberapa negasi bertumpuk. Hal ini dapat ditangani dengan mudah:

Negasi Ganda.

$$\neg\neg P \equiv P.$$

Contoh: "Tidak benar bahwa c tidak ganjil" berarti "c ganjil."

Mari kita lihat bagaimana ekuivalensi-ekuivalensi yang telah kita jumpai dapat diterapkan.

Contoh 1.3.8

Buktikan bahwa pernyataan $\neg(P \to Q)$ dan $P \wedge \neg Q$ ekuivalen secara logis tanpa menggunakan tabel kebenaran.

Penyelesaian. Kita akan memulai dengan salah satu pernyataan dan mengubahnya menjadi pernyataan yang lain melalui rangkaian pernyataan yang ekuivalen secara logis. Mulailah dengan $\neg(P \to Q)$. Kita dapat menulis ulang implikasi sebagai disjungsi, sehingga pernyataan ini ekuivalen secara logis dengan

$$\neg(\neg P \vee Q).$$

Sekarang terapkan hukum De Morgan untuk memperoleh

$$\neg\neg P \wedge \neg Q.$$

Terakhir, gunakan negasi ganda untuk memperoleh $P \wedge \neg Q$

Perhatikan bahwa contoh di atas menunjukkan bahwa negasi suatu implikasi BUKANLAH implikasi: negasi tersebut adalah konjungsi! Kita telah melihat ini sebelumnya dalam Subbab 1.1, tetapi hasil ini begitu penting dan berguna sehingga layak dinyatakan sebagai teorema.

Teorema 1.3.9 Negasi Implikasi.

Negasi suatu implikasi adalah konjungsi:

$$\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q.$$

*Artinya, satu-satunya cara suatu implikasi bernilai salah adalah ketika hipotesisnya benar **DAN** kesimpulannya salah.*

Untuk memverifikasi bahwa dua pernyataan ekuivalen secara logis, Anda dapat menggunakan tabel kebenaran atau rangkaian penggantian yang ekuivalen secara logis. Metode tabel kebenaran, meskipun merepotkan, memiliki kelebihan karena dapat memverifikasi bahwa dua pernyataan TIDAK ekuivalen secara logis.

Contoh 1.3.10

Apakah pernyataan $(P \vee Q) \to R$ dan $(P \to R) \vee (Q \to R)$ ekuivalen secara logis?

Penyelesaian. Perhatikan bahwa meskipun kita dapat mulai menulis ulang pernyataan-pernyataan ini dengan penggantian yang ekuivalen secara logis sambil berharap dapat mengubah yang satu menjadi yang lain, kita tidak akan pernah yakin apakah kegagalan kita disebabkan oleh tidak adanya ekuivalensi logis atau oleh kurangnya kreativitas kita. Karena itu, mari kita buat tabel kebenaran:

P	Q	R	$(P \vee Q) \to R$	$(P \to R) \vee (Q \to R)$
B	B	B	B	B
B	B	S	S	S
B	S	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	B
S	B	S	S	B
S	S	B	B	B
S	S	S	B	B

Perhatikan baris keempat (atau keenam). Dalam kasus ini, $(P \to R) \vee (Q \to R)$ benar, tetapi $(P \vee Q) \to R$ salah. Oleh karena itu, pernyataan-pernyataan tersebut tidak ekuivalen secara logis.

Meskipun tidak ada ekuivalensi logis, setiap kali $(P \vee Q) \to R$ benar, $(P \to R) \vee (Q \to R)$ juga benar. Hal ini memberi tahu kita bahwa kita dapat *mendeduksi* $(P \to R) \vee (Q \to R)$ dari $(P \vee Q) \to R$, tetapi tidak dalam arah sebaliknya.

1.3.4 Ekuivalensi untuk Pernyataan Berkuantor

Semua contoh yang telah kita bahas sejauh ini hanya melibatkan logika *proposisional*, dengan satuan dasar logika berupa pernyataan yang benar atau salah. Kita juga dapat mengatakan bahwa dua pernyataan yang melibatkan kuantor dan predikat ekuivalen secara logis.

Terkadang kuantor tidak berperan dalam ekuivalensi tersebut. Sebagai contoh,

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)).$$

Begitu kita mengganti x dengan suatu konstanta, tersisa dua pernyataan yang ekuivalen secara logis berdasarkan bentuk proposisionalnya.

Pada kesempatan lain yang lebih menarik, justru logika kuantorlah yang membuat pernyataan-pernyataan itu ekuivalen secara logis. Yang sangat menarik di sini adalah bahwa kita tidak dapat menggunakan tabel kebenaran untuk memverifikasi ekuivalensi-ekuivalensi ini!

Sebagai gantinya, kita perlu menalar tentang semesta pembicaraan sebagai suatu himpunan. Sebagai contoh, mari kita perhatikan bagaimana negasi berinteraksi dengan kuantor.

Perhatikan klaim bahwa "semua bilangan ganjil adalah prima." Kita dapat menyatakannya secara simbolis sebagai $\forall x(O(x) \to P(x))$. Pernyataan itu jelas tidak benar, sehingga yang *benar* adalah "tidak semua bilangan ganjil adalah prima" (yaitu, $\neg\forall x(O(x) \to P(x))$). Bagaimana kita mengetahuinya? Mudah: 9. Ya, 9 ganjil tetapi bukan prima. Namun, apakah cukup bahwa hanya satu bilangan ganjil bukan bilangan prima?

Untuk menyangkal klaim universal, Anda hanya memerlukan *satu* contoh penyangkal. Anda hanya perlu menunjukkan bahwa *terdapat* suatu bilangan yang membuat klaim tersebut salah. Dalam kasus kita, terdapat ekuivalensi

$$\neg\forall x(O(x) \to P(x)) \equiv \exists x(O(x) \wedge \neg P(x)).$$

Jika sejenak kita mengabaikan kuantornya, kita memperoleh

$$\neg(O \to P) \equiv O \wedge \neg P$$

yang tepat merupakan contoh dari Teorema 1.3.9. Bagian baru yang menarik adalah bahwa ketika kita menegasikan kuantor universal, kita memperoleh kuantor eksistensial.

Menegasikan kuantor eksistensial menghasilkan kuantor universal. Hal ini masuk akal. Jika tidak terdapat sesuatu yang memiliki suatu sifat, maka segala sesuatu tidak memiliki sifat tersebut.

Kuantor dan Negasi.

$\neg\forall x P(x)$ ekuivalen dengan $\exists x \neg P(x)$.

$\neg\exists x P(x)$ ekuivalen dengan $\forall x \neg P(x)$.

Secara simbolis, kita dapat memindahkan simbol negasi melewati suatu kuantor, tetapi hal itu menyebabkan jenis kuantornya berubah.

Cara lain untuk memahami mengapa hal ini masuk akal: Kuantor universal menyerupai konjungsi (yang mungkin tak hingga), sebab kuantor ini menyatakan bahwa sifat tersebut benar untuk benda ini, dan benda itu, dan benda lainnya,... semua benda. Kuantor eksistensial menyerupai disjungsi (yang mungkin tak hingga): Sifat tersebut benar untuk sedikitnya satu benda, mungkin benda ini, atau benda itu, atau benda lainnya, atau.... Hukum De Morgan memberi tahu kita bahwa ketika menegasikan konjungsi, kita memperoleh disjungsi, dan ketika menegasikan disjungsi, kita memperoleh konjungsi. Bukankah menyenangkan ketika semuanya berjalan sebagaimana mestinya?

Contoh 1.3.11

Misalkan kita menyatakan bahwa tidak ada bilangan terkecil. Kita dapat menerjemahkan pernyataan ini ke dalam simbol sebagai

$$\neg\exists x\forall y(x \leq y).$$

("Tidak benar bahwa terdapat bilangan x sedemikian sehingga untuk setiap bilangan y, x kurang dari atau sama dengan y.")

Namun, kita mengetahui bagaimana negasi berinteraksi dengan kuantor: Kita dapat memindahkan negasi melewati suatu kuantor dengan mengubah jenis kuantornya (antara universal dan eksistensial). Jadi, pernyataan di atas semestinya *ekuivalen secara logis* dengan

$$\forall x\exists y(y < x).$$

Perhatikan bahwa $y < x$ adalah negasi dari $x \leq y$. Pernyataan ini dibaca, "Untuk setiap bilangan x, terdapat bilangan y yang lebih kecil daripada x." Kita melihat bahwa ini merupakan cara lain untuk menyatakan klaim semula.

Penting untuk menegaskan bahwa logika predikat *memperluas* logika proposisional (seperti mekanika kuantum memperluas mekanika klasik). Semua yang telah kita pelajari tentang ekuivalensi logis dan deduksi tetap berlaku. Namun, logika predikat memungkinkan kita menganalisis pernyataan dengan tingkat perincian yang lebih tinggi, hingga menelaah proposisi individual P, Q, dan seterusnya.

Untuk melakukannya, kita perlu memahami bagaimana kuantor dan konektif berinteraksi. Kita telah melihat sedikit tentang negasi dan kuantor. Bagaimana dengan konektif lainnya? Mari kita lihat sebuah contoh yang menyelidiki bagaimana kuantor universal dan disjungsi dapat (atau tidak dapat) bekerja bersama.

Contoh 1.3.12

Perhatikan dua pernyataan berikut,

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \qquad \forall x P(x) \vee \forall x Q(x).$$

Apakah keduanya ekuivalen secara logis?

Penyelesaian. Pernyataan-pernyataan ini TIDAK ekuivalen secara logis. Secara intuitif, pernyataan di sebelah kiri menyatakan bahwa setiap objek merupakan objek-P atau objek-Q. Pernyataan di sebelah kanan menyatakan bahwa setiap objek merupakan objek-P, atau setiap objek merupakan objek-Q. Keduanya *terasa* berbeda.

Untuk memastikannya, kita ingin menentukan predikat $P(x)$ dan $Q(x)$ serta suatu semesta pembicaraan sedemikian sehingga salah satu pernyataan benar dan yang lain salah. Misalkan $P(x)$ adalah "x genap" dan $Q(x)$ adalah "x ganjil." Semesta pembicaraan kita adalah semua bilangan bulat (karena pada himpunan bilangan inilah sifat genap dan ganjil bermakna).

Pernyataan di sebelah kiri benar! Setiap bilangan genap atau ganjil. Namun, apakah setiap bilangan genap? Tidak. Apakah setiap bilangan ganjil? Tidak. Jadi, pernyataan di sebelah kanan salah (pernyataan itu berbentuk *salah atau salah*).

Menariknya, pernyataan di sebelah kanan mengimplikasikan pernyataan di sebelah kiri. Artinya,

$$(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$$

selalu benar.

Hal ini mirip dengan tautologi, meskipun istilah itu kita khususkan untuk kebenaran niscaya dalam logika proposisional. Pernyataan dalam logika predikat yang niscaya benar mendapat sebutan yang lebih bergengsi, yaitu **hukum logika** (atau terkadang **sahih secara logis**, tetapi sebutan itu kurang menarik).

Kita juga dapat menelaah bagaimana kuantor saling berinteraksi.

Contoh 1.3.13

Dapatkah Anda menukar urutan kuantor? Sebagai contoh, perhatikan dua pernyataan berikut:

$$\forall x \exists y P(x, y) \qquad \text{dan} \qquad \exists y \forall x P(x, y).$$

Apakah keduanya ekuivalen secara logis?

Penyelesaian. Pernyataan-pernyataan ini TIDAK ekuivalen secara logis. Untuk melihatnya, kita harus memberikan interpretasi atas predikat $P(x, y)$ yang membuat salah satu pernyataan benar dan yang lain salah.

Misalkan $P(x, y)$ adalah predikat $x < y$. Dalam bilangan asli, benar bahwa untuk setiap x terdapat suatu y yang lebih besar daripada x tersebut (karena terdapat tak hingga banyak bilangan). Namun, tidak ada bilangan asli y yang lebih besar daripada setiap bilangan x. Jadi, mungkin saja $\forall x \exists y P(x, y)$ benar sedangkan $\exists y \forall x P(x, y)$ salah.

Namun, arah sebaliknya tidak mungkin terjadi. Jika terdapat suatu y yang membuat setiap x memenuhi $P(x, y)$, maka tentu saja untuk setiap x terdapat suatu y yang memenuhi $P(x, y)$. Pernyataan pertama mengatakan bahwa kita dapat menemukan satu y yang berlaku untuk setiap x. Pernyataan kedua mengizinkan y yang berbeda berlaku untuk x yang berbeda, tetapi tidak ada yang menghalangi kita menggunakan y yang sama yang berlaku untuk setiap x. Dengan kata lain, meskipun kedua pernyataan tidak ekuivalen secara logis, kita memiliki aturan deduksi yang sahih:

$$\begin{array}{ll} & \exists y \forall x P(x, y) \\ \hline \therefore & \forall x \exists y P(x, y) \end{array}$$

Dengan ungkapan lain, hal ini mengatakan bahwa pernyataan tunggal

$$\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$$

selalu benar; pernyataan tersebut adalah hukum logika.

1.3.5 Deduksi

Sebelumnya, kita menyatakan bahwa argumen berikut sahih:

> Jika Edith memakan sayurannya, maka ia boleh mendapat kukis. Edith memakan sayurannya. Oleh karena itu, Edith mendapat kukis.

Bagaimana kita mengetahui bahwa argumen ini sahih? Mari kita lihat bentuk pernyataan-pernyataannya. Misalkan P menyatakan "Edith memakan sayurannya" dan Q menyatakan "Edith boleh mendapat kukis." Dengan demikian, bentuk logis argumen tersebut adalah:

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & P \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

Ini adalah contoh **aturan deduksi**, yaitu bentuk argumen yang selalu sahih. Aturan ini sangat terkenal dan disebut *modus ponens*. Apakah Anda yakin bahwa ini merupakan aturan deduksi yang sahih? Jika belum, perhatikan tabel kebenaran berikut:

P	Q	$P \to Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Ini hanyalah tabel kebenaran untuk $P \to Q$, tetapi yang penting di sini adalah bahwa semua baris dalam aturan deduksi memiliki kolomnya sendiri pada tabel kebenaran. Ingat bahwa suatu argumen sahih jika kesimpulannya harus benar ketika premis-premisnya benar. Premis dalam kasus ini adalah $P \to Q$ dan P. *Baris* mana pada tabel kebenaran yang menunjukkan bahwa keduanya benar? P benar pada dua baris pertama, dan di antara keduanya, hanya baris pertama yang juga membuat $P \to Q$ benar. Dan ternyata, dalam satu-satunya kasus ini, Q juga benar. Jadi, jika $P \to Q$ dan P keduanya benar, kita melihat bahwa Q juga harus benar.

Anggaplah aturan deduksi sebagai semacam bentuk ekuivalensi logis *satu arah*. Dua pernyataan ekuivalen secara logis jika pada setiap baris tabel kebenaran ketika pernyataan pertama benar, pernyataan kedua juga benar, dan pada setiap baris ketika pernyataan kedua benar, pernyataan pertama juga benar. Suatu deduksi hanya mensyaratkan bagian pertama dari kedua bagian tersebut.

Berikut beberapa contoh lainnya.

Contoh 1.3.14

Tunjukkan bahwa berikut ini merupakan aturan deduksi yang sahih.

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & \neg P \to Q \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

Penyelesaian. Kita membuat tabel kebenaran yang memuat semua baris bentuk argumen tersebut:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \to Q$
B	B	B	S	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	B
S	S	B	B	S

(kita menyertakan kolom untuk $\neg P$ sebagai langkah bantu untuk memperoleh kolom $\neg P \to Q$).

Sekarang perhatikan semua baris yang membuat $P \to Q$ dan $\neg P \to Q$ keduanya benar. Hal ini hanya terjadi pada baris 1 dan 3. Lihat! Pada baris-baris tersebut Q juga benar, sehingga bentuk argumennya sahih (merupakan aturan deduksi yang sahih).

Contoh 1.3.15

Tentukan apakah berikut ini merupakan aturan deduksi yang sahih.

$$\begin{array}{ll} & P \to R \\ & Q \to R \\ & R \\ \hline \therefore & P \vee Q \end{array}$$

Penyelesaian. Mari kita buat tabel kebenaran yang memuat keempat pernyataan tersebut.

P	Q	R	$P \to R$	$Q \to R$	$P \vee Q$
B	B	B	B	B	B
B	B	S	S	S	B
B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	S
S	S	S	B	B	S

Perhatikan baris kedua dari bawah. Di sini ketiga premis argumen benar, tetapi kesimpulannya salah. Jadi, ini bukan aturan deduksi yang sahih.

Selagi tabel kebenaran ada di hadapan kita, perhatikan baris 1, 3, dan 5. Hanya pada baris-baris inilah semua pernyataan $P \to R$, $Q \to R$, dan $P \vee Q$ benar. Ternyata R juga benar pada baris-baris tersebut. Jadi, kita telah menemukan aturan deduksi baru yang kita ketahui *memang* sahih:

$$\begin{array}{ll} & P \to R \\ & Q \to R \\ & P \vee Q \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

Deduksi kuantor. Ada pula aturan deduksi yang dapat kita tuliskan untuk kuantor. Sebagai contoh:

$$\begin{array}{ll} & \forall x P(x) \\ \hline \therefore & \exists x P(x) \end{array}$$

Jika setiap objek merupakan objek-P, maka pasti terdapat sesuatu yang merupakan objek-P. Aturan-aturan ini tidak dapat diverifikasi dengan tabel kebenaran, dan pembahasan lengkap tentang jenis logika predikat ini berada di luar cakupan buku

ini.

1.3.6 Pertanyaan Bacaan

1. Untuk memeriksa apakah dua pernyataan ekuivalen secara logis, Anda dapat menggunakan tabel kebenaran. Jelaskan apa yang akan Anda cari dalam tabel kebenaran untuk menyimpulkan bahwa kedua pernyataan tersebut ekuivalen secara logis. Apa yang menunjukkan bahwa keduanya *tidak* ekuivalen secara logis?

2. Untuk memeriksa apakah suatu aturan deduksi *sahih*, Anda dapat menggunakan tabel kebenaran. Jelaskan apa yang akan Anda cari dalam tabel kebenaran yang telah dilengkapi untuk menyatakan bahwa aturan deduksi tersebut sahih, dan apa yang menunjukkan bahwa aturan deduksi tersebut *tidak* sahih.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang ingin Anda ketahui jawabannya.

1.3.7 Soal Latihan

1. Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$.

2. Lengkapilah tabel kebenaran untuk pernyataan $\neg Q \vee (Q \rightarrow P)$. Apa yang dapat Anda simpulkan tentang P dan Q jika diketahui bahwa pernyataan di atas salah?

3. Susunlah tabel kebenaran untuk pernyataan $Q \rightarrow (\neg P \vee R)$.

4. Tentukan apakah pernyataan $P \rightarrow (Q \vee R)$ dan $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$ ekuivalen secara logis dengan melengkapi tabel kebenaran untuk kedua pernyataan tersebut.

5. Tentukan apakah aturan deduksi berikut valid:

$$\begin{array}{ll} & P \rightarrow Q \\ & \neg Q \\ \hline \therefore & \neg P \end{array}$$

6. Tentukan apakah aturan deduksi berikut valid:

$$\begin{array}{ll} & P \rightarrow (Q \vee R) \\ & \neg(P \rightarrow Q) \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

7. Tentukan apakah aturan deduksi berikut valid:

$$\begin{array}{ll} & (P \wedge Q) \rightarrow R \\ & \neg P \vee \neg Q \\ \hline \therefore & \neg R \end{array}$$

8. Tentukan apakah aturan deduksi berikut valid:

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & P \wedge \neg Q \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

9. Manakah di antara pernyataan berikut yang merupakan *hukum logika*? Artinya, manakah yang selalu benar, apa pun semesta pembicaraannya dan apa pun makna yang Anda berikan kepada predikat-predikatnya? Pilih semua jawaban yang benar.

A. $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.

B. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

C. $\neg \forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

D. $\forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \forall x P(x, y)$.

1.3.8 Latihan Tambahan

1. Anda menjumpai dua troll yang sedang bermain Stratego®. Mereka berkata kepada Anda:

> Troll 1: Jika kami sepupu, maka kami berdua adalah penipu.
>
> Troll 2: Kami sepupu, atau kami berdua adalah penipu.

Mungkinkah kedua troll tersebut adalah kesatria? Ingatlah bahwa setiap troll adalah kesatria yang selalu berkata benar atau penipu yang selalu berbohong. Jelaskan jawaban Anda dan bagaimana tabel kebenaran dapat digunakan untuk menemukannya.

2. Selanjutnya, Anda menjumpai tiga troll yang mengenakan tanda nama. Mereka berkata:

Pat	Jika Quinn atau saya adalah kesatria, maka Ryan juga kesatria.
Quinn	Ryan adalah kesatria, dan jika Pat adalah kesatria, maka saya juga kesatria.
Ryan	Quinn adalah penipu, tetapi Pat dan saya sama-sama kesatria atau sama-sama penipu.

Buatlah tabel kebenaran yang memuat ketiga pernyataan tersebut. Kemudian gunakan tabel itu untuk menentukan jenis setiap troll.

3. Perhatikan pernyataan tentang sebuah pesta, "Jika hari ini ulang tahun Anda atau akan ada kue, maka akan ada kue."

(a) Nyatakan pernyataan di atas dengan simbol. Sebutkan dengan jelas pernyataan mana yang dilambangkan dengan P dan mana yang dilam-

bangkan dengan Q.

(b) Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan tersebut.

(c) Dengan mengasumsikan pernyataan tersebut benar, apa (jika ada) yang dapat Anda simpulkan jika diketahui bahwa akan ada kue?

(d) Dengan mengasumsikan pernyataan tersebut benar, apa (jika ada) yang dapat Anda simpulkan jika diketahui bahwa tidak akan ada kue?

(e) Misalkan Anda mengetahui bahwa pernyataan tersebut bohong. Apa yang dapat Anda simpulkan?

4. Geoff Poshingten sedang berada di restoran piza mewah dan memutuskan untuk memesan calzone. Ketika pramusaji menanyakan isian yang ia inginkan, Geoff menjawab, "Saya ingin pepperoni atau sosis. Selain itu, jika ada sosis, maka harus ada juga daging puyuh. Oh, dan jika ada pepperoni atau daging puyuh, maka harus ada juga keju ricotta."

(a) Nyatakan pesanan Geoff dengan simbol logika.

(b) Pramusaji itu tahu bahwa Geoff adalah pembohong atau orang yang selalu berkata benar (jadi, semua yang ia katakan salah atau semuanya benar). Yang manakah Geoff?

(c) Apa, jika ada, yang dapat disimpulkan oleh pramusaji mengenai bahan-bahan calzone yang diinginkan Geoff?

5. Tentukan apakah kedua pernyataan berikut ekuivalen secara logis: $\neg(P \rightarrow Q)$ dan $P \wedge \neg Q$. Jelaskan bagaimana Anda mengetahui bahwa jawaban Anda benar.

6. Sederhanakan pernyataan-pernyataan berikut (sehingga negasi hanya muncul tepat di depan variabel).

(a) $\neg(P \rightarrow \neg Q)$.

(b) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(\neg Q \wedge R)$.

(c) $\neg((P \rightarrow \neg Q) \vee \neg(R \wedge \neg R))$.

(d) Tidak benar bahwa jika Sam bukan laki-laki maka Chris adalah perempuan, dan bahwa Chris bukan perempuan.

7. Gunakan hukum De Morgan dan fakta ekuivalensi logis lain yang Anda ketahui untuk menyederhanakan pernyataan-pernyataan berikut. Tunjukkan semua langkah Anda. Pada pernyataan akhir, negasi hanya boleh muncul tepat di sebelah variabel pernyataan atau predikat (P, Q, $E(x)$, dan sebagainya), dan tidak boleh ada negasi ganda. Sebaiknya gunakan hanya konjungsi, disjungsi, dan negasi.

(a) $\neg((\neg P \wedge Q) \vee \neg(R \vee \neg S))$.

(b) $\neg((\neg P \to \neg Q) \wedge (\neg Q \to R))$ (berhati-hatilah dengan implikasinya).

(c) Untuk kedua bagian di atas, verifikasikan jawaban Anda menggunakan tabel kebenaran. Artinya, gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa bahwa pernyataan yang diberikan dan bentuk penyederhanaan yang Anda usulkan memang ekuivalen secara logis.

8. Perhatikan pernyataan, "Jika suatu bilangan merupakan bilangan segitiga atau bilangan kuadrat, maka bilangan itu bukan bilangan prima"

(a) Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan $(T \vee S) \to \neg P$.

(b) Jika Anda menganggap pernyataan tersebut *salah*, sifat apa saja yang harus dimiliki oleh suatu contoh penyangkal? Jelaskan dengan merujuk pada tabel kebenaran Anda.

(c) Jika pernyataan tersebut benar, apa yang dapat Anda simpulkan tentang bilangan 5657, yang sudah pasti merupakan bilangan prima? Sekali lagi, jelaskan menggunakan tabel kebenaran.

9. Tommy Flanagan menceritakan kepada Anda apa yang ia santap kemarin sore. Ia berkata, "Saya makan berondong jagung atau kismis. Selain itu, jika saya makan roti lapis mentimun, maka saya minum soda. Namun, saya tidak minum soda ataupun teh." Tentu saja, Anda tahu bahwa Tommy adalah pembohong terburuk di dunia dan semua yang ia katakan salah. Apa yang sebenarnya disantap Tommy?

Jelaskan alasan jawaban Anda dengan menuliskan semua pernyataan Tommy menggunakan variabel pernyataan (P, Q, R, S, T), mengambil negasinya, lalu menggunakannya untuk menyimpulkan apa yang sebenarnya disantap Tommy.

10. Dapatkah Anda merangkai implikasi? Artinya, jika $P \to Q$ dan $Q \to R$, apakah itu berarti $P \to R$? Buktikan bahwa aturan deduksi berikut valid:

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & Q \to R \\ \hline \therefore & P \to R \end{array}$$

11. Misalkan P dan Q adalah pernyataan proposisional (yang mungkin majemuk). Buktikan bahwa P dan Q ekuivalen secara logis jika dan hanya jika $P \leftrightarrow Q$ merupakan tautologi.

12. Misalkan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dan Q adalah pernyataan proposisional (yang mungkin majemuk). Misalkan pula bahwa

$$\begin{array}{ll} & P_1 \\ & P_2 \\ & \vdots \\ & P_n \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

merupakan aturan deduksi yang valid. Buktikan bahwa pernyataan

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

merupakan tautologi.

13. Perhatikan pernyataan-pernyataan di bawah ini. Nyatakan masing-masing dengan simbol menggunakan predikat $F(x, y)$ untuk "orang x dapat ditipu pada waktu y." Tentukan apakah ada pernyataan yang ekuivalen satu sama lain, atau apakah ada yang mengimplikasikan pernyataan lain, dalam konteks ini maupun secara umum.

(a) Anda dapat menipu beberapa orang sepanjang waktu.

(b) Anda dapat menipu semua orang pada suatu waktu.

(c) Anda selalu dapat menipu beberapa orang.

(d) Kadang-kadang Anda dapat menipu semua orang.

14. Misalkan $P(x)$ adalah suatu predikat sehingga pernyataan $\forall x P(x)$ benar. Apakah $\exists x P(x)$ juga benar? Dengan kata lain, apakah pernyataan $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ selalu benar? Apakah konversnya selalu benar? Asumsikan semesta pembicaraannya tidak kosong.

15. Menyederhanakan negasi akan sangat berguna ketika kita mencoba membuktikan suatu pernyataan dengan mempertimbangkan apa yang terjadi jika pernyataan itu salah. Untuk setiap pernyataan di bawah ini, tuliskan *negasi*-nya dalam bentuk sesederhana mungkin. Jangan hanya mengatakan, "Tidak benar bahwa . . . "

(a) Setiap bilangan merupakan bilangan genap atau ganjil.

(b) Ada suatu barisan yang sekaligus merupakan barisan aritmetika dan geometri.

(c) Untuk setiap bilangan n, jika n prima, maka $n + 3$ tidak prima.

16. Kita dapat menyederhanakan pernyataan dalam logika predikat dengan menggunakan aturan untuk memindahkan negasi melewati kuantor sebelum menerapkan ekuivalensi logis pada bagian proposisional di "dalamnya". Sederhanakan pernyataan-pernyataan di bawah ini (sehingga negasi hanya muncul tepat di sebelah predikat).

(a) $\neg\exists x\forall y(\neg O(x) \vee E(y))$.

(b) $\neg\forall x\neg\forall y\neg(x < y \wedge \exists z(x < z \vee y < z))$.

(c) Ada suatu bilangan n sehingga tidak ada bilangan lain yang kurang dari atau sama dengan n.

(d) Tidak benar bahwa untuk setiap bilangan n terdapat dua bilangan lain yang mengapit n.

17. Sederhanakan pernyataan-pernyataan di bawah ini hingga simbol negasi hanya muncul tepat di sebelah predikat.

(a) $\neg\forall x\forall y(x < y \vee y < x)$.

(b) $\neg(\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y))$.

1.4 Pembuktian

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

- Mengidentifikasi struktur logis serta membedakan *pembuktian langsung*, *pembuktian melalui kontraposisi*, dan *pembuktian dengan kontradiksi*.
- Mengidentifikasi kekeliruan dalam pembuktian yang salah dan menentukan apakah kekeliruan tersebut terletak pada logika atau konsep matematika.
- Menerapkan definisi untuk membuktikan pernyataan dengan menggunakan gaya pembuktian dasar.

1.4.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

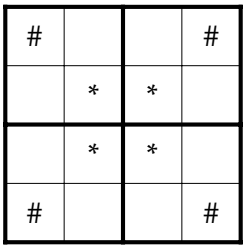
Sebuah **teka-teki sudoku mini** adalah kisi persegi berukuran 4×4 yang dibagi menjadi empat kotak 2×2. Tujuannya adalah mengisi setiap petak dengan digit 1 sampai 4 sedemikian rupa sehingga tidak ada digit yang berulang pada baris, kolom, ataupun kotak mana pun.

Berikut adalah teka-teki sudoku mini sederhana yang dapat Anda coba selesaikan.

2			1
	4		
		3	

Anda mungkin memperhatikan bahwa pada solusi teka-teki di atas, keempat sudut luarnya berbeda dan keempat petak tengahnya juga berbeda.

Tujuan pertanyaan *Selidiki!* ini adalah membuktikan bahwa hal tersebut bukan kebetulan: Misalkan keempat sudut sebuah teka-teki sudoku mini berisi bilangan yang semuanya berbeda (ditandai dengan # di bawah). Buktikan bahwa keempat petak tengahnya (ditandai dengan $*$ di bawah) juga harus berisi bilangan yang berbeda-beda.



Cobalah 1.4.1

Cobalah menempatkan bilangan ke dalam teka-teki sudoku mini yang kosong. Lihat apakah Anda dapat menemukan keadaan yang menyangkal pernyataan yang diminta untuk dibuktikan dalam kegiatan *Selidiki!*. Apa yang menghalangi Anda? Jelaskan secara singkat apakah menurut Anda pernyataan tersebut benar atau salah, beserta alasannya.

Siapa pun yang tidak percaya bahwa matematika mengandung kreativitas jelas belum pernah mencoba menulis pembuktian. Menemukan cara untuk meyakinkan dunia bahwa suatu pernyataan tertentu niscaya benar merupakan pekerjaan besar dan sering kali cukup menantang. Tidak ada jalan yang menjamin keberhasilan dalam mencari pembuktian. Sebagai contoh, pada musim panas tahun 1742, seorang matematikawan Jerman bernama Christian Goldbach mempertanyakan apakah setiap bilangan bulat genap yang lebih besar dari 2 dapat dituliskan sebagai jumlah dua bilangan prima. Berabad-abad kemudian, kita masih belum memiliki pembuktian untuk fakta yang tampaknya benar ini (komputer telah memeriksa bahwa konjektur Goldbach berlaku untuk semua bilangan yang kurang dari 4×10^{18}, tetapi belum ditemukan pembuktian bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk *semua* bilangan).

Menulis pembuktian dapat dikatakan sebagai suatu seni. Seperti seni apa pun, agar benar-benar mahir melakukannya, Anda memerlukan inspirasi sekaligus teknik dasar. Sebagaimana musisi dapat mempelajari penjarian yang tepat dan pelukis dapat mempelajari cara memegang kuas dengan benar, kita dapat mempelajari cara menyusun argumen dengan tepat.

Kita dapat memandang sebuah pembuktian melalui dua sudut pandang yang berbeda tetapi saling beririsan. Pertama, kita dapat memikirkan struktur *logis* suatu pembuktian. Di bawah ini kita akan membahas tiga gaya pembuktian yang berbeda tepat pada struktur logisnya. Kedua, kita dapat melihat *isi matematis* pembuktian tersebut. Bagaimana pembuktian itu menunjukkan pemahaman atas konsep matematika? Apakah definisi objek matematika digunakan dengan benar? Bagaimana definisi-definisi tersebut berinteraksi satu sama lain?

Ingat bahwa dalam Subbab 1.3 kita mengatakan bahwa **tautologi** adalah pernyataan yang niscaya benar, tetapi tidak memberi tahu kita sesuatu yang menarik.

Demikian pula, jika sebuah pembuktian sepenuhnya bergantung pada bentuk logis pernyataan yang dibuktikannya, pembuktian itu tidak akan memberi tahu kita sesuatu yang menarik tentang matematika. Karena itu, selain struktur logisnya, semua pembuktian yang kita bahas *harus* melibatkan perpaduan beberapa konsep matematika.

Dalam bagian ini, kita akan melihat contoh bagaimana interaksi antara struktur logis dan struktur matematis berlangsung. Kita akan memandang struktur logis sebagai *kerangka* atau *perancah* pembuktian dan melihat berbagai bentuk yang dapat dimiliki kerangka tersebut. Kemudian kita akan melihat bagaimana isi matematis pembuktian mengisi perincian kerangka itu, yakni bagaimana isi tersebut melengkapinya.

Sering kali sulit untuk bersikap cermat terhadap pembuktian ketika pernyataan yang hendak kita buktikan tampak terlalu jelas atau terlalu akrab. Meskipun kita tentu ingin membuktikan fakta sederhana tentang bilangan, misalnya bahwa jumlah dua bilangan genap adalah genap, keakraban kita dengan bilangan dapat membuat tugas ini sulit dipandang dengan sungguh-sungguh. Oleh karena itu, kita akan mulai dengan membuktikan beberapa fakta dalam konteks yang mudah-mudahan terasa baru: teka-teki sudoku mini.

Kegiatan Pratinjau

Perhatikan pernyataan berikut:

> Jika ab merupakan bilangan genap, maka a atau b genap.

Manakah di antara pembuktian berikut yang tampaknya merupakan pembuktian sahih bagi pernyataan tersebut? Catatan: Anda boleh mengasumsikan bahwa seluruh aljabar di bawah ini benar (karena memang demikian).

1. Misalkan a dan b ganjil. Artinya, $a = 2k + 1$ dan $b = 2m + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan m. Maka

$$\begin{aligned} ab &= (2k + 1)(2m + 1) \\ &= 4km + 2k + 2m + 1 \\ &= 2(2km + k + m) + 1. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, ab ganjil.

2. Asumsikan bahwa a atau b genap—misalkan a yang genap (kasus ketika b genap akan identik). Artinya, $a = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Maka

$$\begin{aligned} ab &= (2k)b \\ &= 2(kb). \end{aligned}$$

Dengan demikian, ab genap.

3. Misalkan ab genap, tetapi a dan b keduanya ganjil. Artinya, $ab = 2n$, $a = 2k + 1$,

dan $b = 2j + 1$ untuk suatu bilangan bulat n, k, dan j. Maka

$$\begin{aligned} 2n &= (2k+1)(2j+1) \\ 2n &= 4kj + 2k + 2j + 1 \\ n &= 2kj + k + j + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Namun, karena $2kj + k + j$ merupakan bilangan bulat, persamaan ini menyatakan bahwa bilangan bulat n sama dengan bilangan yang bukan bulat, yang mustahil.

4. Misalkan ab merupakan bilangan genap, yaitu $ab = 2n$, dan a merupakan bilangan ganjil, yaitu $a = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} ab &= (2k+1)b \\ 2n &= 2kb + b \\ 2n - 2kb &= b \\ 2(n - kb) &= b. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, b pasti genap.

1.4.2 Pembuktian Langsung

Gaya pembuktian yang paling sederhana adalah **pembuktian langsung**. Sering kali, yang diperlukan untuk membuktikan sesuatu hanyalah penjelasan sistematis tentang makna setiap hal yang terlibat. Anda menelaah definisi, menjelaskan dan *menguraikan* maknanya dengan cermat, hingga terlihat bahwa kesimpulannya benar.

Untuk menggambarkan pentingnya definisi dalam pembuktian, mari kita berikan beberapa definisi yang cermat tentang teka-teki sudoku mini.

Definisi 1.4.2 Definisi Sudoku Mini.

Sebuah **teka-teki sudoku mini** adalah kisi persegi 4×4 yang terisi sebagian dan dibagi menjadi empat kotak 2×2. Setiap petak dapat kosong atau berisi digit 1 sampai 4.

Kita mengatakan bahwa sebuah teka-teki sudoku mini **valid** apabila tidak ada digit 1 sampai 4 yang muncul lebih dari sekali pada baris, kolom, ataupun kotak mana pun.

Sebuah **solusi** teka-teki sudoku mini adalah teka-teki valid tanpa petak kosong, dengan setiap petak yang semula tidak kosong tetap tidak berubah.

Kita mengatakan bahwa sebuah teka-teki sudoku mini **dapat diselesaikan secara unik** jika tepat terdapat satu solusi.

Pertama, mari kita buktikan fakta yang berguna dan "jelas" tentang setiap teka-teki sudoku mini yang valid.

Proposisi 1.4.3

Dalam setiap solusi teka-teki sudoku mini, masing-masing digit 1 sampai 4 muncul tepat sekali pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap kotak, sehingga secara keseluruhan muncul empat kali.

Itu jelas, kata Anda! Bukankah tepat demikian arti teka-teki yang valid? Ya, teka-teki lengkap yang valid, yaitu yang kita maksud dengan solusi, bukan? Baiklah, tidak persis, karena valid berarti tidak ada digit yang berulang... bukankah itu hal yang sama?

Ya! Tepat sekali! Menjelaskan hal ini merupakan pembuktian langsung.

Bukti. Misalkan Anda memiliki sebuah solusi teka-teki sudoku mini. Artinya, Anda memiliki kisi 4×4 yang valid dan setiap petaknya diisi dengan digit 1 sampai 4.[a] Karena teka-teki tersebut *valid*, tidak ada digit yang berulang pada baris, kolom, ataupun kotak mana pun[b]. Karena sebuah baris memuat empat bilangan yang tidak berulang dan hanya ada empat digit yang mungkin, setiap digit tersebut harus muncul tepat sekali. Hal ini berlaku untuk setiap baris, setiap kolom, dan setiap kotak.

Untuk setiap digit, karena digit tersebut muncul tepat sekali dalam empat baris yang berbeda, digit itu muncul tepat empat kali. Dengan demikian, pembuktian selesai.

[a] Definisi **solusi**
[b] Definisi **valid**

Catatan 1.4.4 Selain sekadar menjelaskan definisi, pembuktian tersebut memuat satu gagasan matematis penting: Jika empat bilangan berbeda dipilih dari suatu himpunan yang terdiri atas empat bilangan, maka keempat bilangan itu semuanya terpilih. Anda mungkin ingin menjelaskan pula mengapa hal ini benar, atau cukup mengatakan bahwa ini merupakan contoh prinsip sarang merpati (yang akan segera kita jelaskan). Seberapa banyak yang perlu Anda jelaskan bergantung pada siapa pembaca pembuktian Anda. Sedikit sikap waspada ketika menulis pembuktian adalah hal yang baik.

Memang, dalam kebanyakan konteks, kita bahkan tidak perlu menuliskan pembuktian di atas secara lengkap. Mungkin cukup dikatakan, "Jelas bahwa hal ini mengikuti definisi." Namun, saat ini kita sedang belajar menulis pembuktian, sehingga bersikap sangat terperinci dapat berguna agar kita dapat berfokus pada struktur pembuktian dan pentingnya menerapkan definisi.

Mari kita buktikan sesuatu tentang sebuah teka-teki sudoku tertentu.

Contoh 1.4.5

Buktikan bahwa untuk setiap solusi teka-teki sudoku mini di bawah ini, jika solusi tersebut memiliki angka 2 pada petak kiri atas (r1c1), maka solusi itu akan memuat angka 2 pada petak kanan bawah (r4c4).

	1	3	
			1
			3

Penyelesaian. Kita tidak tahu apakah teka-teki tersebut dapat diselesaikan secara unik (sebenarnya tidak), meskipun perhatikan bahwa saat ini teka-teki itu valid. Yang ingin kita buktikan adalah bahwa *jika* angka 2 berada pada petak kiri atas dalam suatu solusi tertentu, *maka* solusi tersebut memuat angka 2 pada petak kanan bawah.

Bukti. Misalkan S adalah sebuah solusi teka-teki tersebut, dan andaikan S memuat angka 2 pada petak kiri atas. Karena S adalah teka-teki yang valid, tidak ada digit yang berulang pada baris, kolom, ataupun kotak mana pun. Perhatikan dahulu baris teratas. Karena baris tersebut sudah memuat 1, 2, dan 3, petak kosong yang tersisa (r1c4) harus berisi 4.

Sekarang perhatikan kolom 4 (kolom paling kanan). Karena sekarang kita tahu bahwa petak kanan atas berisi 4, kolom ini sudah memuat 1, 3, dan 4. Jadi, petak kosong terakhir (r4c4) harus berisi 2.

Dengan demikian, S memuat angka 2 pada petak kanan bawah, sebagaimana yang perlu kita buktikan. ■

Perhatikan bentuk umum argumen di atas. Kita berusaha membuktikan suatu implikasi $P \to Q$: Jika terdapat angka 2 di r1c1, maka terdapat angka 2 di r4c4. Kita mulai dengan mengandaikan bahwa P benar. Dari sana, kita menyimpulkan sesuatu, lalu dari sesuatu tersebut kita menyimpulkan Q. Persis seperti inilah bentuk pembuktian langsung atas implikasi $P \to Q$ (dapat pula terdapat lebih banyak langkah di antara P dan Q).

> Andaikan P. Jelaskan, jelaskan, . . . , jelaskan. Oleh karena itu, Q.

Satu pertimbangan tambahan yang perlu kita buat adalah bahwa kita sering membuktikan pernyataan umum dan universal, yakni pernyataan berbentuk $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Untuk menangani kuantor tersebut, kita menetapkan satu *instans sembarang* dari x. Di atas, kita mengatakan, "Misalkan S adalah sebuah solusi teka-teki tersebut." Karena kita tidak membuat asumsi tambahan tentang S selain bahwa P benar untuknya, kita mengatakan bahwa S adalah solusi *sembarang*.

Jika kita ingin membuktikan bahwa semua persegi adalah persegi panjang, pertama-tama kita menyadari bahwa ini sama dengan mengatakan, "Untuk setiap

bangun, jika bangun tersebut adalah persegi, maka bangun itu adalah persegi panjang." Dalam simbol, $\forall x(S(x) \to R(x))$. Kita akan mengandaikan bahwa $P(x)$ benar dan menyimpulkan $Q(x)$. x yang mana yang kita gunakan? Suatu anggota sembarang, agar pembuktian kita dapat diterapkan pada *semua* kemungkinan x.

Contoh 1.4.6

Buktikan bahwa untuk setiap teka-teki sudoku mini dengan tiga petak kosong, jika teka-teki tersebut memiliki solusi, maka teka-teki itu dapat diselesaikan secara unik.

Penyelesaian. Apakah ini jelas? Jika sebuah teka-teki memiliki solusi, maka teka-teki itu dapat diselesaikan secara unik, bukan? Sama sekali tidak! Perhatikan kembali Definisi Sudoku Mini: Hanya karena sebuah teka-teki memiliki solusi, tidak berarti teka-teki itu memiliki tepat satu solusi (yaitu, dapat diselesaikan secara unik). Namun, sekalipun kita tidak menganggap hal ini memerlukan pembuktian, mari kita kembali bersikap waspada dan memanfaatkannya sebagai alasan untuk berfokus pada struktur logis pembuktian.

Perhatikan bahwa kita membuktikan klaim tersebut benar, apa pun teka-teki sudoku mini yang menjadi titik awal kita. Kita mungkin memulai dengan teka-teki ini:

3		4	2
2	4	3	1
1			4
4	2	1	3

Jelas hanya ada satu cara untuk melengkapi teka-teki tersebut: Baris teratas hanya memiliki satu petak kosong sehingga hanya satu digit yang dapat ditempatkan di sana, lalu kolom 2 dan 3 masing-masing hanya memiliki satu petak kosong sehingga keduanya dapat diisi secara unik.

Menelaah satu contoh sering kali membantu ketika menyusun pembuktian, tetapi membuktikan pernyataan umum hanya dengan sebuah contoh ***TIDAK PERNAH*** merupakan pembuktian yang benar.

Walaupun terdapat *hanya* sekitar 152,58 miliar teka-teki sudoku mini (dan sebagian besar tidak valid, lebih sedikit lagi yang memiliki solusi, dan bahkan lebih sedikit lagi yang memiliki tepat satu petak kosong), kita tentu tidak ingin memeriksa semua teka-teki yang mungkin. Sebagai gantinya, kita tetapkan sebuah teka-teki sudoku mini valid yang sembarang. Kita andaikan teka-teki itu memiliki sebuah solusi dan tepat tiga petak kosong. Dari sini, kita buktikan bahwa hanya ada satu solusi yang mungkin.

Bukti. Misalkan P adalah sebuah teka-teki sudoku mini yang sembarang.

Andaikan P memiliki tepat tiga petak kosong dan S adalah sebuah solusi.

Karena P sembarang, kita tidak mengetahui susunan ketiga petak kosong itu. Ketiganya dapat berada pada baris yang berbeda, dua di antaranya dapat berada pada baris yang sama, atau ketiganya dapat berada pada baris yang sama.

Jika semua petak kosong berada pada baris yang berbeda, maka setiap baris memiliki tepat satu petak kosong. Tiga petak lainnya diisi dengan tiga digit yang berbeda (karena teka-teki itu valid), sehingga hanya ada satu pilihan untuk mengisi petak kosong. Bilangan ini harus sama dengan bilangan yang digunakan dalam solusi S.

Sekarang pertimbangkan kasus ketika dua petak kosong berada pada baris yang sama dan petak ketiga berada pada baris yang berbeda. Baris yang memuat petak kosong ketiga memiliki tiga digit berbeda, sehingga hanya ada satu pilihan untuk petak terakhir, dan isinya harus sama dengan S. Setelah petak ini diisi, dua petak kosong lainnya pasti berada pada dua kolom berbeda yang masing-masing memiliki tiga digit terisi. Pada setiap kolom ini, ketiga digit yang telah terisi berbeda, sehingga hanya ada satu pilihan untuk petak kosongnya. Jadi, sekali lagi, setiap solusi harus tepat sama dengan S.

Terakhir, jika ketiga petak kosong berada pada baris yang sama, semuanya berada pada kolom yang berbeda. Jadi, dengan menggunakan argumen yang sama seperti ketika petak-petak kosong berada pada baris yang berbeda, tetapi kali ini menggunakan kolom, kita melihat bahwa S adalah satu-satunya solusi.

Kita telah mempertimbangkan semua kasus yang mungkin, dan dalam setiap kasus, S adalah satu-satunya solusi, sehingga P dapat diselesaikan secara unik. ■

Tentu saja, pembuktian langsung juga dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan dalam matematika.

Contoh 1.4.7

Buktikan: Untuk semua bilangan bulat n, jika n genap, maka n^2 genap.

Penyelesaian. Format pembuktiannya adalah sebagai berikut: Misalkan n adalah bilangan bulat sembarang. Andaikan n genap. Jelaskan, jelaskan, jelaskan. Oleh karena itu, n^2 genap.

Untuk mengisi perinciannya, kita menjelaskan arti n genap, lalu melihat apa akibatnya bagi n^2. *Definisi* yang relevan di sini adalah, "Suatu bilangan bulat n disebut **genap** jika terdapat bilangan bulat k sedemikian rupa sehingga $n = 2k$." Berikut adalah pembuktian lengkapnya.

Bukti. Misalkan n adalah bilangan bulat sembarang. Andaikan n genap. Maka $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Sekarang $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Karena $2k^2$ adalah bilangan bulat, n^2 genap. ■

Contoh 1.4.8

Buktikan: Untuk semua bilangan bulat a, b, dan c, jika b merupakan kelipatan a dan c merupakan kelipatan b, maka c merupakan kelipatan a.

Penyelesaian. Sekalipun kita tidak ingat persis arti "merupakan kelipatan dari", kita dapat menyusun pembuktian langsung untuk pernyataan ini. Bentuknya kira-kira seperti ini: Misalkan a, b, dan c adalah bilangan bulat sembarang. Andaikan b merupakan kelipatan a dan c merupakan kelipatan b. Dan seterusnya. Oleh karena itu, c merupakan kelipatan a.

Bagaimana kita menghubungkan langkah-langkahnya? Kita nyatakan arti sebenarnya dari hipotesis kita dan mengapa hal itu memberikan arti sebenarnya dari kesimpulan. Di sinilah kita memerlukan definisi b **merupakan kelipatan** a: Artinya, $b = ka$ untuk suatu bilangan bulat k. Apa yang ingin kita capai? Bahwa $c = la$ untuk suatu bilangan bulat l. Berikut pembuktian lengkapnya.

Bukti. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan bulat. Andaikan b merupakan kelipatan a dan c merupakan kelipatan b. Jadi, terdapat bilangan bulat k dan j sedemikian rupa sehingga $b = ka$ dan $c = jb$. Dengan menggabungkan keduanya (melalui substitusi), kita memperoleh

$$c = j(ka) = (jk)a.$$

Namun, jk adalah bilangan bulat, sehingga persamaan ini menyatakan bahwa c merupakan kelipatan a. ■

1.4.3 Pembuktian melalui Kontraposisi

Ingat bahwa suatu implikasi $P \to Q$ ekuivalen secara logis dengan kontraposisinya, $\neg Q \to \neg P$. Ada banyak contoh pernyataan yang sulit dibuktikan secara langsung, tetapi kontraposisinya dapat dengan mudah dibuktikan menggunakan pembuktian langsung. Itulah tepatnya yang dilakukan **pembuktian melalui kontraposisi**. Metode ini memberikan pembuktian langsung atas kontraposisi suatu implikasi. Hal tersebut memadai karena kontraposisi ekuivalen secara logis dengan implikasi semula.

Kerangka pembuktian $P \to Q$ melalui kontraposisi akan selalu berbentuk kurang lebih seperti berikut:

Andaikan $\neg Q$. Jelaskan, jelaskan, ... jelaskan. Oleh karena itu, $\neg P$.

Seperti sebelumnya, jika terdapat variabel dan kuantor, kita menetapkannya sebagai anggota sembarang dari semesta pembicaraan kita.

Contoh 1.4.9

Buktikan bahwa jika sebuah teka-teki sudoku mini dapat diselesaikan secara unik, maka teka-teki tersebut valid.

Penyelesaian. Ingat, sebuah teka-teki valid apabila tidak ada baris, kolom, atau kotak yang memuat digit berulang. Sebuah teka-teki dapat diselesaikan secara unik jika terdapat tepat satu solusi, dengan solusi berupa teka-teki valid tanpa petak kosong (yang tidak mengubah petak mana pun yang telah diisi sebelumnya).

Jika kita mencoba pembuktian langsung, kita akan memulai dengan teka-teki sembarang dan mengandaikan bahwa teka-teki itu dapat diselesaikan secara unik. Kemudian kita dapat "memperoleh" solusinya, tetapi harus menalar mundur ke keadaan awal teka-teki. Hal ini tampak sulit. Sering kali, ketika sebuah pembuktian tampak memerlukan penguraian sesuatu, mencoba kontraposisinya lebih mudah. Itulah yang akan kita lakukan.

Bukti. Misalkan P adalah sebuah teka-teki sudoku mini sembarang dan andaikan teka-teki itu *tidak* valid. Artinya, pada setidaknya satu baris, satu kolom, atau satu kotak, terdapat suatu digit yang muncul lebih dari sekali.

Sekarang misalkan kita telah mengisi petak-petak kosong tanpa mengubah petak mana pun yang sebelumnya sudah terisi. Baris, kolom, atau kotak awal yang memuat digit ganda akan tetap memuat pengulangan tersebut, sehingga teka-teki lengkap yang dihasilkan tidak valid. Dengan demikian, tidak ada solusi untuk P, sehingga P tidak dapat diselesaikan secara unik. ■

Kita telah membuktikan bahwa jika sebuah teka-teki sudoku mini tidak valid, maka teka-teki itu tidak dapat diselesaikan secara unik. Ini merupakan kontraposisi dari pernyataan yang ingin kita buktikan, sehingga berfungsi sebagai pembuktian pernyataan semula.

Berikut beberapa contoh lain yang lebih bernuansa matematika.

Contoh 1.4.10

Apakah pernyataan "Untuk semua bilangan bulat n, jika n^2 genap, maka n genap" benar?

Penyelesaian. Ini adalah konvers dari pernyataan yang kita buktikan dengan pembuktian langsung dalam Contoh 1.4.7 di atas. Setelah mencoba beberapa contoh, pernyataan ini tampaknya benar. Jadi, mari kita buktikan.

Pembuktian langsung atas pernyataan ini mengharuskan kita menetapkan n sembarang dan mengandaikan bahwa n^2 genap. Namun, sama sekali tidak jelas bagaimana hal tersebut memungkinkan kita menyimpulkan sesuatu tentang n. Fakta bahwa $n^2 = 2k$ saja tidak menunjukkan bagaimana kita dapat menuliskan n sebagai kelipatan 2.

Cobalah pendekatan lain: Tuliskan kontraposisi pernyataan tersebut. Kita

memperoleh: untuk semua bilangan bulat n, jika n ganjil, maka n^2 ganjil. Bentuk ini tampak jauh lebih menjanjikan.

Kita memerlukan definisi bilangan ganjil. Suatu bilangan bulat n disebut **ganjil** apabila $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k. Pembuktian kita akan berbentuk kira-kira seperti berikut:

Misalkan n adalah bilangan bulat sembarang. Andaikan n tidak genap. Artinya, ... Dengan kata lain, ... Namun, ini sama dengan mengatakan .... Oleh karena itu, n^2 tidak genap.

Sekarang kita lengkapi perinciannya.

Bukti. Kita akan membuktikan kontraposisinya. Misalkan n adalah bilangan bulat sembarang. Andaikan n tidak genap, sehingga bilangan tersebut ganjil. Maka $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k. Sekarang $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Karena $2k^2+2k$ adalah bilangan bulat, kita melihat bahwa n^2 ganjil dan karenanya tidak genap. ■

Contoh 1.4.11

Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat a dan b, jika $a + b$ ganjil, maka a ganjil atau b ganjil.

Penyelesaian. Masalah ketika mencoba pembuktian langsung adalah bahwa akan sulit memisahkan a dan b hanya dari mengetahui sesuatu tentang $a + b$. Sebaliknya, jika kita mengetahui sesuatu tentang a dan b secara terpisah, menggabungkannya mungkin memberi kita informasi tentang $a + b$. Kontraposisi pernyataan yang ingin kita buktikan adalah: untuk semua bilangan bulat a dan b, jika a dan b genap, maka $a + b$ genap. Dengan demikian, pembuktian kita akan memiliki format berikut:

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat. Andaikan a dan b keduanya genap. Dan seterusnya. Oleh karena itu, $a + b$ genap.

Berikut pembuktian lengkapnya.

Bukti. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat. Andaikan a dan b genap. Maka $a = 2k$ dan $b = 2l$ untuk suatu bilangan bulat k dan l. Sekarang $a + b = 2k + 2l = 2(k + l)$. Karena $k + l$ adalah bilangan bulat, kita melihat bahwa $a + b$ genap, sehingga pembuktian selesai. ■

Perhatikan bahwa asumsi kita bahwa a dan b genap merupakan negasi dari pernyataan a ganjil atau b ganjil. Di sini kita menggunakan hukum De Morgan.

Pembuktian langsung dan pembuktian melalui kontraposisi dapat digunakan ketika membuktikan *implikasi*. Ingat bahwa beberapa pernyataan yang tidak ditulis secara eksplisit sebagai implikasi dapat dirumuskan ulang menjadi implikasi.

Contoh 1.4.12

Pertimbangkan pernyataan, "Untuk setiap bilangan prima p, berlaku $p = 2$ atau p ganjil." Kita dapat merumuskannya kembali sebagai, "Untuk setiap bilangan prima p, jika $p \neq 2$, maka p ganjil." Sekarang cobalah membuktikannya.

Gunakan definisi bilangan prima berikut: Suatu bilangan bulat $p > 1$ disebut **prima** apabila memiliki tepat dua faktor, yaitu 1 dan p.

Penyelesaian.

Bukti. Misalkan p adalah bilangan prima sembarang. Andaikan p tidak ganjil. Jadi, p habis dibagi 2. Karena p prima, bilangan tersebut harus memiliki tepat dua pembagi, dan karena 2 merupakan pembaginya, p hanya dapat dibagi oleh 1 dan 2. Oleh karena itu, $p = 2$. Dengan demikian, pembuktian selesai (melalui kontraposisi). ■

1.4.4 Pembuktian dengan Kontradiksi

Mari mundur sejenak dan pertimbangkan apa artinya jika kesimpulan suatu argumen salah. Ada dua alasan mengapa hal ini dapat terjadi. Logika dalam argumen tersebut keliru, atau setidaknya satu asumsi pasti salah. **Pembuktian dengan kontradiksi** memanfaatkan kemungkinan kedua ini. Kita memulai dengan satu asumsi dan menyusun pembuktian yang *valid* menuju kesimpulan yang salah; satu-satunya kemungkinan adalah bahwa asumsi tersebut salah. Kesimpulan yang salah itu disebut "kontradiksi", yang berarti pernyataan yang niscaya salah (secara teknis, pernyataan berbentuk $P \wedge \neg P$).

Bentuk umum pembuktian dengan kontradiksi untuk membuktikan pernyataan P adalah

> Andaikan $\neg P$ (bahwa P tidak benar). Ini berarti bahwa..., yang memberi tahu kita..., sehingga kita dapat mengatakan... Namun, hal itu merupakan kontradiksi, sehingga P sebenarnya harus benar.

Perhatikan bahwa jika gaya argumen ini kita pandang sebagai pembuktian langsung atas sesuatu, maka ini merupakan pembuktian langsung atas

$$\neg P \rightarrow \text{ kontradiksi.}$$

Jadi, kita memiliki pembuktian yang valid atas implikasi ini. Bagaimana mungkin suatu implikasi yang benar memiliki kesimpulan yang salah? Ingat kembali tabel kebenaran implikasi (Gambar 1.2.2). Satu-satunya baris ketika implikasi bernilai benar tetapi kesimpulannya salah adalah baris 4, dan pada baris ini hipotesisnya juga salah. Jadi, $\neg P$ salah, yang berarti P benar.

Setelah Anda mulai menulis pembuktian dengan kontradiksi, metode ini akan terasa sangat alami. Mari kita lihat caranya melalui sebuah pembuktian sudoku.

Contoh 1.4.13

Buktikan bahwa setiap solusi teka-teki sudoku mini di bawah ini harus memuat angka 3 di sudut kanan atas (r1c4).

	2		
	3		
3			
			1

Penyelesaian. Ada beberapa cara untuk membuktikan hal ini, sebagaimana sering terjadi pada pembuktian dengan kontradiksi. Walaupun kita selalu memulai dengan asumsi awal yang sama (lawan dari yang ingin kita buktikan), letak ditemukannya kontradiksi dapat berbeda-beda.

Bukti. Misalkan S adalah sebuah solusi teka-teki tersebut, tetapi andaikan S *tidak* memuat angka 3 di sudut kanan atas. Maka baris teratas harus memuat angka 3 di tempat lain. Angka itu tidak dapat berada di kolom 1 karena kolom tersebut sudah memuat angka 3. Angka itu tidak dapat berada di kolom 2 karena petak tersebut sudah terisi (dengan angka 2). Angka itu juga tidak dapat berada di kolom 3 karena jika demikian, tidak akan ada tempat untuk menaruh angka 3 pada baris terbawah. Jadi, baris teratas tidak akan memuat angka 3, bertentangan dengan fakta bahwa S adalah sebuah solusi.

Oleh karena itu, S harus memuat angka 3 di sudut kanan atas. ■

Contoh 1.4.14

Buktikan bahwa tidak ada solusi untuk teka-teki sudoku di bawah ini.

4			
	1		
			4

Penyelesaian. Perhatikan bentuk logis pernyataan ini:

$$\neg\exists S(S \text{ adalah suatu solusi }).$$

Dengan menggunakan aturan negasi kuantor, bentuk ini sama dengan

$$\forall S(S \text{ bukan suatu solusi}).$$

Jika kita membuktikannya secara langsung, kita perlu mempertimbangkan semua solusi yang mungkin dan menunjukkan bahwa semuanya tidak valid. Hal itu tampak cukup menantang.

Sebaliknya, jika kita mencoba pembuktian dengan kontradiksi, kita dapat mengandaikan negasi pernyataan yang diminta untuk dibuktikan. Artinya, kita dapat mengandaikan bahwa *terdapat* sebuah solusi. Itu adalah satu solusi yang dapat kita gunakan untuk bernalar. Jauh lebih mudah ditangani.

Bukti. Andaikan, demi memperoleh kontradiksi, bahwa memang *terdapat* sebuah solusi teka-teki tersebut. Solusi ini harus memiliki angka 4 pada kotak kiri bawah. Namun, satu-satunya petak yang dapat memuat angka 4 berada di baris 4 atau kolom 1 (atau keduanya). Dalam kedua kemungkinan tersebut, hal ini bertentangan dengan fakta bahwa sudah terdapat angka 4 di kolom 1 dan baris 4. ■

Berikut tiga contoh pembuktian dengan kontradiksi tentang bilangan:

Contoh 1.4.15

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ irasional.

Penyelesaian.

Bukti. Andaikan tidak demikian. Maka $\sqrt{2}$ sama dengan pecahan $\frac{a}{b}$. Tanpa mengurangi keumuman, andaikan $\frac{a}{b}$ sudah dalam bentuk paling sederhana (jika tidak, sederhanakan pecahan tersebut). Jadi,

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2.$$

Dengan demikian, a^2 genap, sehingga a genap. Jadi, $a = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k, dan $a^2 = 4k^2$. Kemudian kita memperoleh,

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2k^2.$$

Dengan demikian, b^2 genap, sehingga b genap. Karena a juga genap, kita melihat bahwa $\frac{a}{b}$ tidak berada dalam bentuk paling sederhana, suatu kontradiksi. Dengan demikian, $\sqrt{2}$ irasional. ■

Contoh 1.4.16

Buktikan: Tidak ada bilangan bulat x dan y sedemikian rupa sehingga $x^2 = 4y + 2$.

Penyelesaian.

Bukti. Kita menggunakan pembuktian dengan kontradiksi. Jadi, andaikan memang *terdapat* bilangan bulat x dan y sedemikian rupa sehingga $x^2 = 4y + 2 = 2(2y + 1)$. Maka x^2 genap. Kita telah melihat bahwa hal ini mengakibatkan x genap. Jadi, $x = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Maka $x^2 = 4k^2$. Selanjutnya, hal ini memberikan $2k^2 = (2y + 1)$. Namun, $2k^2$ genap dan $2y + 1$ ganjil, sehingga keduanya tidak mungkin sama. Dengan demikian, kita memperoleh kontradiksi, sehingga tidak mungkin terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian rupa sehingga $x^2 = 4y + 2$. ■

Contoh 1.4.17

Prinsip Sarang Merpati: Jika lebih dari n merpati terbang memasuki n kandang, maka setidaknya satu kandang akan memuat sedikitnya dua merpati. Buktikan pernyataan ini!

Penyelesaian.

Bukti. Andaikan, berlawanan dengan ketentuan, bahwa setiap kandang memuat paling banyak satu merpati. Maka paling banyak terdapat n merpati. Namun, kita mengandaikan bahwa terdapat lebih dari n merpati, sehingga hal ini mustahil. Dengan demikian, pasti ada sebuah kandang yang memuat lebih dari satu merpati. ■

Walaupun kita merumuskan pembuktian ini sebagai pembuktian dengan kontradiksi, kita juga dapat menggunakan pembuktian melalui kontraposisi karena kontradiksi kita hanyalah negasi dari hipotesis. Kadang-kadang hal ini terjadi; dalam kasus demikian, Anda dapat menggunakan salah satu gaya pembuktian. Namun, ada pula contoh ketika kontradiksi muncul "jauh" dari pernyataan semula.

1.4.5 Ringkasan Gaya Pembuktian

Kita telah membahas tiga gaya pembuktian: pembuktian langsung, pembuktian melalui kontraposisi, dan pembuktian dengan kontradiksi. Menentukan gaya pembuktian yang akan digunakan untuk suatu masalah dapat menjadi tantangan, dan tidak ada aturan yang selalu dapat memberi tahu kita apa yang harus dilakukan. Sering kali terdapat beberapa cara untuk melanjutkan suatu pembuktian, dan inilah salah satu alasan matematika begitu menarik.

Titik awal yang baik ketika menulis pembuktian adalah mempertimbangkan asumsi awal untuk setiap gaya dan kesimpulan yang hendak dicapai. Pembuktian agak menyerupai permainan labirin pada menu anak-anak. Ada *MULAI* dan

KELUAR, dan tujuan Anda adalah menemukan jalan dari satu titik ke titik lainnya. Kadang-kadang, memulai dari kedua sisi dan berharap bertemu di tengah dapat membantu.

Awal dan Akhir Pembuktian.

Untuk membuktikan implikasi $P \to Q$:

Langsung	Awal: Andaikan P. Akhir: Oleh karena itu, Q.
Kontraposisi	Awal: Andaikan $\neg Q$. Akhir: Oleh karena itu, $\neg P$.
Kontradiksi	Awal: Andaikan $\neg(P \to Q)$. Akhir: ...yang merupakan suatu kontradiksi.

Anda dapat menggunakan pembuktian dengan kontradiksi sekalipun tidak sedang mencoba membuktikan suatu implikasi. Namun, jika pernyataannya merupakan implikasi, mengandaikan $\neg(P \to Q)$ sangatlah ampuh. Ingat, satu-satunya cara suatu implikasi bernilai salah adalah ketika P benar dan Q salah. Jadi, sebenarnya kita mengandaikan $P \wedge \neg Q$. Aha! P adalah yang kita andaikan dalam pembuktian langsung. $\neg Q$ adalah yang kita andaikan dalam pembuktian melalui kontraposisi. Jadi, *pembuktian dengan kontradiksi seperti melakukan kedua pembuktian lainnya secara bersamaan, lalu bertemu di tengah!*

Untuk menggambarkan hal ini, mari kita buktikan fakta dari kegiatan *Selidiki!*. Kita akan membuktikan bahwa jika sudut-sudut sebuah teka-teki sudoku mini berisi bilangan yang semuanya berbeda (ditandai dengan a sampai d di bawah), maka keempat petak tengahnya (ditandai dengan $*$ di bawah) juga harus berisi bilangan yang berbeda-beda (dalam setiap solusi).

a			b
	$*$	$*$	
	$*$	$*$	
c			d

Kita akan memberikan tiga pembuktian: pertama pembuktian langsung, kemudian pembuktian melalui kontraposisi, dan terakhir pembuktian dengan kontradiksi.

Bukti. Misalkan P adalah sebuah teka-teki sudoku dengan bilangan yang semuanya berbeda di sudut-sudutnya: a di kiri atas, b di kanan atas, c di kiri bawah, dan d di kanan bawah. Misalkan S adalah sembarang solusi teka-teki tersebut.

Dalam S, digit apa pun yang dilambangkan oleh a harus muncul di baris 2.

Karena a sudah berada di kotak kiri atas, digit itu tidak dapat muncul di kolom 1 atau 2, sehingga harus muncul di kolom 3 atau 4. Jika berada di kolom 3, maka a muncul di salah satu petak tengah. Jika tidak, digit itu berada di kolom 4. Dalam kasus terakhir ini, kita menanyakan tempat a muncul di baris 3: Digit itu tidak dapat berada di kolom 1 atau 4, sehingga harus berada di kolom 2 atau 3, dan dengan demikian berada di salah satu petak tengah.

Argumen yang sama kini dapat diterapkan pada masing-masing dari tiga petak luar lainnya. Dengan demikian, dalam setiap solusi teka-teki tersebut, keempat petak tengah harus memuat digit a sampai d, yang semuanya berbeda.

Sekarang kita akan membuktikan pernyataan yang sama melalui kontraposisi.

Bukti. Misalkan P adalah sebuah teka-teki sudoku mini dengan bilangan pada sudut-sudutnya. Misalkan S adalah sembarang solusi teka-teki tersebut. Andaikan keempat petak tengah dalam S tidak memuat bilangan yang semuanya berbeda. Maka pasti ada suatu bilangan yang sama, misalkan n, pada dua petak tengah.

Karena n tidak dapat muncul dua kali dalam satu baris, n harus berada pada dua petak tengah yang saling berhadapan secara diagonal: di r2c2 dan r3c3, atau di r2c3 dan r3c2. Dalam kedua kasus tersebut, di manakah n dapat berada pada baris 1 dan 4? Digit itu tidak dapat berada di kolom 2 atau 3, sehingga harus berada di kolom 1 dan 4. Artinya, n akan berada pada sudut luar yang saling berhadapan, sehingga digit pada keempat sudut tidak semuanya berbeda.

Terakhir, kita akan membuktikan pernyataan yang sama dengan kontradiksi.

Bukti. Misalkan P adalah sebuah teka-teki sudoku mini dan andaikan keempat sudut luarnya semuanya berbeda, tetapi dalam suatu solusi S, keempat petak tengahnya tidak semuanya berbeda.

Andaikan a, digit di sudut kiri atas, muncul dua kali dalam keempat petak tengah. Satu-satunya cara hal ini dapat terjadi adalah jika a muncul di r3c2 dan r2c3, seperti ditunjukkan di bawah.

a			b
	*	a	
	a	*	
c			d

Namun sekarang, di mana kemunculan keempat a dapat ditempatkan dalam solusi? Digit itu harus berada di r4c4, bertentangan dengan fakta bahwa keempat sudut semuanya berbeda. Argumen yang serupa menghasilkan kontradiksi untuk setiap kemungkinan digit sudut luar lainnya yang berulang di bagian tengah. Dengan demikian, keempat petak tengah harus memuat bilangan yang semuanya berbeda.

1.4.6 Pertanyaan Bacaan

1. Manakah di antara berikut ini yang merupakan baris pertama terbaik untuk suatu *pembuktian langsung* jika Anda ingin membuktikan pernyataan, "Untuk semua himpunan A yang beranggotakan bilangan satu digit, jika $|A| = 6$, maka A memuat suatu bilangan genap."

A. Andaikan terdapat suatu himpunan A yang beranggotakan bilangan satu digit dengan $|A| = 6$, tetapi hanya memuat bilangan ganjil.

B. Tetapkan suatu himpunan sembarang A yang beranggotakan bilangan satu digit, dan andaikan $|A| = 6$.

C. Andaikan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit dengan $|A| \neq 6$.

D. Misalkan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit dan memuat suatu bilangan genap.

E. Misalkan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit, dan andaikan A tidak memuat bilangan genap apa pun.

2. Manakah di antara berikut ini yang merupakan baris pertama terbaik untuk suatu *pembuktian melalui kontraposisi* jika Anda ingin membuktikan pernyataan, "Untuk semua himpunan A yang beranggotakan bilangan satu digit, jika $|A| = 6$, maka A memuat suatu bilangan genap."

A. Andaikan terdapat suatu himpunan A yang beranggotakan bilangan satu digit dengan $|A| = 6$, tetapi hanya memuat bilangan ganjil.

B. Tetapkan suatu himpunan sembarang A yang beranggotakan bilangan satu digit, dan andaikan $|A| = 6$.

C. Andaikan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit dengan $|A| \neq 6$.

D. Misalkan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit dan memuat suatu bilangan genap.

E. Misalkan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit, dan andaikan A tidak memuat bilangan genap apa pun.

3. Manakah di antara berikut ini yang merupakan baris pertama terbaik untuk suatu *pembuktian dengan kontradiksi* jika Anda ingin membuktikan pernyataan, "Untuk semua himpunan A yang beranggotakan bilangan satu digit, jika $|A| = 6$, maka A memuat suatu bilangan genap."

A. Andaikan terdapat suatu himpunan A yang beranggotakan bilangan satu digit dengan $|A| = 6$, tetapi hanya memuat bilangan ganjil.

B. Tetapkan suatu himpunan sembarang A yang beranggotakan bilangan satu digit, dan andaikan $|A| = 6$.

C. Andaikan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit dengan $|A| \neq 6$.

D. Misalkan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit dan memuat suatu bilangan genap.

E. Misalkan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bilangan satu digit, dan andaikan A tidak memuat bilangan genap apa pun.

4. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu.

1.4.7 Soal Latihan

1. Susunlah beberapa pernyataan di bawah ini untuk membentuk pembuktian yang benar bagi pernyataan berikut: "Untuk setiap bilangan bulat n, jika n genap, maka $7n$ genap."

- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan $7n$ genap.
- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan $7n$ ganjil.
- Karena 7 ganjil dan hasil kali dua bilangan ganjil adalah ganjil,

- Karena bilangan genap yang dibagi 7 pasti ganjil,
- n pasti genap.
- $7n$ pasti ganjil.
- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan n genap.
- Karena hasil kali sembarang bilangan dengan bilangan genap adalah genap,
- $7n$ pasti genap.

2. Susunlah beberapa pernyataan di bawah ini untuk membentuk pembuktian yang benar bagi pernyataan berikut: "Untuk setiap bilangan bulat n, jika $7n$ genap, maka n genap."

- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan n genap.
- Karena 7 ganjil dan hasil kali bilangan ganjil dengan bilangan genap adalah genap,
- $7n$ pasti genap.
- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan $7n$ genap.
- Karena bilangan genap yang dibagi 7 pasti genap,
- n pasti genap.
- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan n ganjil.
- Karena 7 ganjil dan hasil kali dua bilangan ganjil adalah ganjil,
- $7n$ pasti ganjil.

3. Perhatikan pernyataan berikut: "Untuk setiap bilangan bulat a dan b, jika $a + b$ ganjil, maka a atau b ganjil".

Berikan pembuktian yang sah bagi pernyataan tersebut dengan menggunakan *pembuktian melalui kontraposisi*. Susunlah beberapa pernyataan di bawah ini untuk melengkapi pembuktiannya.

- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan $a + b$ ganjil.
- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan bahwa jika $a + b$ ganjil, maka a atau b ganjil.
- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan keduanya genap.
- Jumlah dua bilangan bulat genap pasti juga genap.
- Oleh karena itu, $a + b$ genap.

- Misalkan a dan b bilangan bulat dan asumsikan $a + b$ ganjil, tetapi a dan b keduanya genap.
- Jumlah dua bilangan bulat ganjil pasti genap.
- Namun, ini berarti $a + b$ genap sekaligus ganjil, suatu kontradiksi.

4. Perhatikan kembali pernyataan berikut: "Untuk setiap bilangan bulat a dan b, jika $a + b$ ganjil, maka a atau b ganjil."

Kali ini, berikan pembuktian yang sah bagi pernyataan tersebut dengan menggunakan *pembuktian melalui kontradiksi* dan beberapa pernyataan di bawah ini.

- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan $a + b$ ganjil.
- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan bahwa jika $a + b$ ganjil, maka a atau b ganjil.
- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan keduanya genap.
- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan $a + b$ ganjil, tetapi a dan b keduanya genap.
- Oleh karena itu, $a + b$ genap.
- Jumlah dua bilangan bulat genap pasti juga genap.
- Jumlah dua bilangan bulat ganjil pasti genap.
- Namun, ini berarti $a + b$ genap sekaligus ganjil, suatu kontradiksi.

5. Di bawah ini terdapat tiga pernyataan beserta salah satu kemungkinan baris pertama pembuktian untuk pernyataan tersebut. Dalam setiap kasus, tentukan apakah baris pertama itu merupakan awal pembuktian langsung, pembuktian melalui kontraposisi, atau pembuktian dengan kontradiksi.

(a) ***Pernyataan:*** Untuk setiap bilangan bulat n, bilangan $7n - 1$ habis dibagi 6.

Baris pertama: Andaikan ada suatu bilangan bulat n yang membuat $7n - 1$ tidak habis dibagi 6.

(b) ***Pernyataan:*** Untuk setiap bilangan bulat n, jika n prima, maka n soliter

Baris pertama: Misalkan n bilangan bulat, dan asumsikan n tidak soliter.

(c) ***Pernyataan:*** Jika suatu bangun merupakan segi lima, maka jumlah sudut dalamnya adalah 480 derajat.

Baris pertama: Perhatikan sembarang bangun, dan asumsikan bangun tersebut merupakan segi lima.

6. Tentukan baris pertama pembuktian dengan setiap metode untuk pernyataan berikut: "Jika fungsi $f : A \to B$ merupakan bijeksi, maka $|A| = |B|$."

Asumsikan $f : A \to B$ merupakan bijeksi	Pembuktian langsung
Asumsikan $f : A \to B$ merupakan bijeksi dan $\|A\| \neq \|B\|$	Pembuktian melalui kontraposisi
Asumsikan $\|A\| \neq \|B\|$	Pembuktian melalui kontradiksi

1.4.8 Latihan Tambahan

1. Untuk suatu predikat $P(x)$, Anda mungkin menduga bahwa pernyataan $\forall x P(x)$ atau $\exists x P(x)$ bernilai benar atau salah. Bagaimana Anda dapat menentukan apakah dugaan Anda benar dalam setiap kasus? Ada empat kemungkinan tindakan: Anda dapat memberikan contoh suatu elemen n dalam semesta pembicaraan yang membuat $P(n)$ benar atau yang membuat $P(n)$ salah, atau Anda dapat menunjukkan bahwa apa pun n yang dipilih, $P(n)$ selalu benar atau selalu salah.

(a) Apa yang perlu Anda lakukan untuk membuktikan bahwa $\forall x P(x)$ benar?

(b) Apa yang perlu Anda lakukan untuk membuktikan bahwa $\forall x P(x)$ salah?

(c) Apa yang perlu Anda lakukan untuk membuktikan bahwa $\exists x P(x)$ benar?

(d) Apa yang perlu Anda lakukan untuk membuktikan bahwa $\exists x P(x)$ salah?

2. Perhatikan pernyataan berikut: "Untuk semua bilangan bulat a dan b, jika $a + b$ genap, maka a dan b genap."

(a) Tuliskan kontraposisi pernyataan tersebut.

(b) Tuliskan konvers pernyataan tersebut.

(c) Tuliskan negasi pernyataan tersebut.

(d) Apakah pernyataan semula benar atau salah? Buktikan jawaban Anda.

(e) Apakah kontraposisi dari pernyataan semula benar atau salah? Buktikan jawaban Anda.

(f) Apakah konvers dari pernyataan semula benar atau salah? Buktikan jawaban Anda.

(g) Apakah negasi dari pernyataan semula benar atau salah? Buktikan jawaban Anda.

3. Untuk setiap pernyataan di bawah ini, tentukan metode pembuktian yang sebaiknya digunakan. Kemudian jelaskan bagaimana pembuktiannya dimulai dan diakhiri. Anda mendapat nilai bonus jika dapat melengkapi bagian tengahnya.

(a) Tidak ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga x merupakan bilangan prima yang lebih besar dari 5 dan $x = 6y + 3$.

(b) Untuk semua bilangan bulat n, jika n merupakan kelipatan 3, maka n dapat ditulis sebagai jumlah bilangan bulat berurutan.

(c) Untuk semua bilangan bulat a dan b, jika $a^2 + b^2$ ganjil, maka a atau b ganjil.

4. Perhatikan pernyataan berikut: "Untuk semua bilangan bulat n, jika n genap, maka $8n$ genap."

(a) Buktikan pernyataan tersebut. Jenis pembuktian apa yang Anda gunakan?

(b) Apakah konversnya benar? Buktikan atau berikan contoh penyangkal.

5. Permainan TENZI menggunakan 40 dadu bersisi enam (masing-masing bernomor 1 sampai 6). Misalkan Anda melempar ke-40 dadu tersebut.

(a) Buktikan bahwa sedikitnya tujuh dadu akan menunjukkan angka yang sama.

(b) Berapa banyak dadu yang harus Anda lempar agar dijamin terdapat empat dadu yang semuanya menunjukkan angka yang sama atau semuanya menunjukkan angka berbeda? Buktikan jawaban Anda.

6. Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat n, n genap jika dan hanya jika $3n$ genap. Artinya, buktikan kedua implikasi berikut: Jika n genap, maka $3n$ genap, dan jika $3n$ genap, maka n genap.

7. Buktikan bahwa $\sqrt{3}$ merupakan bilangan irasional.

8. Perhatikan pernyataan berikut: "Untuk semua bilangan bulat a dan b, jika a genap dan b merupakan kelipatan 3, maka ab merupakan kelipatan 6."

(a) Buktikan pernyataan tersebut. Jenis pembuktian apa yang Anda gunakan?

(b) Nyatakan konversnya. Apakah konvers tersebut benar? Buktikan atau berikan contoh penyangkal.

9. Buktikan pernyataan berikut: "Untuk semua bilangan bulat n, jika $5n$ ganjil, maka n ganjil." Nyatakan dengan jelas metode pembuktian yang Anda

gunakan.

10. Buktikan pernyataan berikut: "Untuk semua bilangan bulat a, b, dan c, jika $a^2 + b^2 = c^2$, maka a atau b genap."

11. Misalkan Anda ingin membuktikan implikasi berikut:

> Untuk semua bilangan asli n, jika n prima, maka n soliter.

Tuliskan bagian awal dan akhir argumen jika Anda membuktikan pernyataan tersebut:

(a) Secara langsung

(b) Melalui kontraposisi

(c) Dengan kontradiksi

Anda tidak perlu menuliskan bagian tengah pembuktian (karena Anda tidak mengetahui arti soliter). Namun, pastikan Anda memberikan beberapa baris pertama dan terakhir agar struktur logis pembuktian yang Anda gunakan terlihat jelas.

12. Misalkan Anda memiliki koleksi prangko langka bernilai 5 sen dan 8 sen. Anda harus segera mengirim surat dan, karena tidak memiliki prangko lain, memutuskan menggunakan sebagian koleksi tersebut. Pertanyaannya, berapa nilai biaya kirim yang dapat Anda susun?

(a) Buktikan bahwa jika Anda menggunakan prangko dari kedua jenis masing-masing dalam jumlah genap, nilai biaya kirim yang diperoleh pasti genap.

(b) Misalkan Anda memperoleh nilai biaya kirim yang genap. Buktikan bahwa sedikitnya salah satu jenis prangko digunakan dalam jumlah genap.

(c) Misalkan Anda memperoleh biaya kirim tepat 72 sen. Buktikan bahwa sedikitnya 6 prangko dari salah satu jenis telah digunakan.

13. Buktikan bahwa $x = y$ jika dan hanya jika $xy = \dfrac{(x+y)^2}{4}$. Perhatikan bahwa Anda perlu membuktikan dua "arah", yaitu bagian "jika" dan bagian "hanya jika".

14. Buktikan bahwa $\log(7)$ merupakan bilangan irasional.

15. Buktikan bahwa persamaan $x^2 = 4y + 3$ tidak memiliki solusi bilangan bulat.

16. Buktikan bahwa setiap bilangan prima yang lebih besar dari 3 bernilai satu lebih besar atau satu lebih kecil daripada suatu kelipatan 6.

17. "Teman" Anda menunjukkan sebuah "pembuktian" yang ia tulis untuk menunjukkan bahwa $1 = 3$. Berikut pembuktiannya:

Bukti. Saya mengklaim bahwa $1 = 3$. Tentu saja kita boleh melakukan operasi apa pun pada satu ruas persamaan asalkan melakukan operasi yang sama pada ruas lainnya. Jadi, kurangi kedua ruas dengan 2. Kita memperoleh $-1 = 1$. Sekarang kuadratkan kedua ruas untuk memperoleh $1 = 1$. Kita semua sepakat bahwa persamaan ini benar.

Apa yang sebenarnya terjadi? Apakah argumen teman Anda sah? Apakah argumen tersebut merupakan pembuktian bagi klaim $1 = 3$? Jelaskan dengan cermat berdasarkan pengetahuan kita tentang logika.

18. Satu set kartu remi standar berisi 52 kartu yang terdiri atas 4 jenis (hati, wajik, sekop, dan keriting), masing-masing dengan 13 nilai berbeda (As, 2, 3, ..., 10, J, Q, K). Jika Anda mengambil sejumlah kartu secara acak, Anda mungkin memperoleh atau tidak memperoleh sepasang kartu (dua kartu dengan nilai yang sama) ataupun tiga kartu dari jenis yang sama. Namun, jika Anda mengambil cukup banyak kartu, keberadaan susunan tersebut dapat dijamin. Untuk setiap kondisi berikut, tentukan jumlah minimum kartu yang perlu diambil agar kartu-kartu yang diminta pasti diperoleh. Buktikan jawaban Anda.

(a) Tiga kartu bernilai sama (misalnya, tiga kartu bernilai 7).

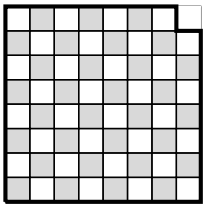
(b) Lima kartu berjenis sama (misalnya, lima kartu hati).

(c) Tiga kartu yang semuanya berjenis sama atau semuanya berjenis berbeda.

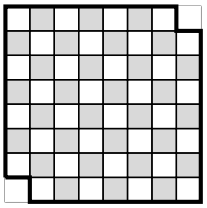
19. Misalkan Anda menghadiri sebuah pesta bersama 19 teman terdekat (jadi, termasuk Anda, terdapat 20 orang di pesta tersebut). Jelaskan mengapa sedikitnya dua orang di pesta itu pasti memiliki jumlah teman yang sama di antara para tamu. Asumsikan bahwa hubungan pertemanan selalu timbal balik.

20. Teman Anda memberikan daftar 115 episode Doctor Who terbaik menurutnya (diurutkan dari yang terbaik). Ternyata Anda telah menonton 60 episode di antaranya. Buktikan bahwa sedikitnya ada dua episode yang telah Anda tonton dan posisinya dalam daftar teman Anda berselisih tepat empat.

21. Misalkan Anda memiliki papan catur berukuran $n \times n$, tetapi anjing Anda telah memakan salah satu petak sudutnya. Anda memiliki keping domino yang masing-masing menutupi tepat dua petak papan. Dapatkah Anda menutupi petak-petak yang tersisa dengan domino yang tidak saling tumpang tindih? Syarat apa yang harus dipenuhi oleh n? Berikan syarat perlu dan cukup (artinya, tentukan secara tepat nilai n mana yang dapat digunakan dan mana yang tidak). Buktikan jawaban Anda.



22. Bagaimana jika dua petak sudut yang saling berhadapan hilang dari papan catur $n \times n$ Anda? Buktikan bahwa berapa pun nilai n, Anda tidak akan dapat menutupi petak-petak yang tersisa dengan domino yang tidak saling tumpang tindih.



1.5 Bukti tentang Struktur Diskret

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

- Membaca dan memahami definisi yang berkaitan dengan struktur diskret agar Anda dapat menerapkan definisi tersebut dengan benar.
- Menulis bukti tentang struktur diskret.

1.5.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Misalkan ada 15 orang di sebuah pesta. Sebagian besar dari mereka sudah saling mengenal, tetapi beberapa orang tetap memutuskan untuk berjabat tangan. Mungkinkah setiap orang di pesta itu berjabat tangan dengan tepat tiga orang lainnya?

Sejauh ini kita telah melihat bagaimana bentuk logis suatu pernyataan dapat membantu kita menyusun kerangka bukti. Namun, hal ini hanya membawa kita sampai pada batas tertentu: Untuk melengkapi kerangka bukti tersebut, kita perlu memahami objek dan struktur matematis yang dibahas dalam bukti. Sebagian pemahaman ini dapat diperoleh dengan membaca definisi secara cermat. Meskipun demikian, bekerja dengan objek dan struktur juga menumbuhkan pemahaman serta intuisi yang tidak selalu berwujud konkret; keduanya dapat memunculkan momen "aha!" yang memberi petunjuk tentang cara melanjutkan suatu bukti.

Omong-omong... Mengapa kita menulis bukti? Selain berlatih menjadi penalar yang lebih baik, mendalami bukti yang cermat tentang struktur diskret merupakan cara untuk mempelajari struktur itu sendiri dengan lebih baik. Struktur diskret menjadi wahana untuk menjelajahi matematika dan membantu kita membangun intuisi tentang struktur matematis. Jadi, kita mempelajari struktur agar dapat menulis bukti tentangnya, dan kita menulis bukti tentang struktur agar dapat memahaminya. Keduanya saling menguatkan!

Alasan lain untuk mengalihkan perhatian kita kepada bukti tentang struktur diskret adalah bahwa hal ini memperlihatkan salah satu ciri penting matematika: abstraksi. Selama ini kita membuktikan fakta tertentu tentang masalah tertentu. Kita

mungkin mulai melihat kemiripan di antara bukti beberapa pernyataan. Kemiripan tersebut dapat muncul karena struktur matematis yang mendasari masalah-masalah itu, meskipun tidak dinyatakan secara terang-terangan. Jika kita membuktikan fakta umum tentang struktur tersebut, kita dapat menerapkan "teorema" itu pada banyak masalah yang berbeda.

Beberapa struktur diskret cocok ditangani dengan gaya bukti tertentu, dan beberapa teknik pembuktian "baku" dapat diterapkan pada struktur tertentu. Kita akan melihat beberapa di antaranya di sini, tetapi terutama kita akan menggunakan kesempatan ini untuk mengingat kembali sejumlah definisi dan sifat dasar struktur diskret, lalu memanfaatkan bukti tentangnya agar kita semakin memahami struktur tersebut.

Aktivitas Pratinjau

Dalam aktivitas pratinjau ini, kita akan menjelajahi beberapa sifat dasar himpunan dan fungsi. Selanjutnya dalam bagian ini, kita akan menulis bukti tentang gagasan-gagasan tersebut.

1. Ingatlah bahwa himpunan hanyalah kumpulan elemen. Berikut dua definisi tentang himpunan:

a. Suatu himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B, ditulis $A \subseteq B$, jika setiap elemen A juga merupakan elemen B.

b. Untuk himpunan A dan B, gabungan A dan B, ditulis $A \cup B$, adalah himpunan yang memuat setiap elemen yang terdapat dalam A, dalam B, atau dalam keduanya.

Mari kita buat beberapa contoh.

(a) Misalkan $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Berikan contoh himpunan A yang memiliki 3 elemen dan merupakan himpunan bagian dari B.

Berapakah $A \cup B$ untuk himpunan A yang Anda berikan sebagai contoh?

(b) Berikan contoh dua himpunan berbeda A dan B sedemikian sehingga $A \cup B = B$.

Untuk contoh yang Anda berikan, apakah $A \subseteq B$?

(c) Carilah contoh, jika ada, berupa himpunan A dan B sedemikian sehingga $A \cup B \neq B$.

Untuk contoh yang Anda berikan, apakah $A \subseteq B$?

2. Manakah di antara pernyataan berikut yang selalu benar?

A. Untuk sembarang himpunan A dan B, $A \cup B \subseteq B$.

B. Untuk sembarang himpunan A dan B, $B \subseteq A \cup B$.

C. Untuk sembarang himpunan A dan B, jika $A \subseteq B$, maka $A \cup B \subseteq B$.

D. Untuk sembarang himpunan A dan B, jika $A \cup B = B$, maka $A \subseteq B$.

3. Untuk sembarang fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dan sembarang himpunan $A \subseteq \mathbb{N}$, kita dapat mendefinisikan citra A oleh f sebagai himpunan semua keluaran f ketika masukannya merupakan elemen A. Kita menuliskannya sebagai $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

Untuk tugas-tugas berikut, mari kita telaah fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 3x + 8$.

(a) Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$. Tentukan $f(A)$ dan $f(B)$. Kemudian tentukan $f(A) \cup f(B)$.

(b) Sekarang tentukan $A \cup B$ dan $f(A \cup B)$.

(c) Berikan contoh, jika ada, berupa dua himpunan berbeda A dan B sedemikian sehingga $A \subseteq B$ dan $f(A) \subseteq f(B)$.

Berikan contoh, jika ada, berupa dua himpunan berbeda A dan B sedemikian sehingga $A \subseteq B$, tetapi $f(A) \not\subseteq f(B)$.

1.5.2 Bukti tentang Himpunan

Ingatlah bahwa himpunan adalah kumpulan elemen yang tidak berurutan. Kita dapat mendeskripsikan suatu himpunan dengan mendaftarkan elemen-elemennya atau dengan menyatakan suatu sifat yang dipenuhi oleh semua elemen dalam himpunan tersebut. Sebagai contoh,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

atau

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}.$$

Himpunan kedua di sini adalah himpunan bilangan asli $(0, 1, 2, \ldots)$ yang kurang dari 10. Perhatikan bahwa setiap elemen A juga merupakan elemen B. Definisi berikut menangkap gagasan tersebut.

Definisi 1.5.1

Suatu himpunan A merupakan **himpunan bagian** dari himpunan B, ditulis $A \subseteq B$, jika setiap elemen A juga merupakan elemen B.

Himpunan B kadang-kadang disebut **superhimpunan** dari A.

Kita mengatakan bahwa A merupakan **himpunan bagian sejati** dari B, ditulis $A \subset B$, jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$. Dengan kata lain, setiap elemen A merupakan elemen B, dan terdapat setidaknya satu elemen B yang *bukan* elemen A.

Contoh 1.5.2

Misalkan $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\}$ dan $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 10\}$. Apakah $B \subseteq A$? Apakah B merupakan himpunan bagian *sejati* dari A?

Penyelesaian. Kita sedang menanyakan apakah setiap bilangan asli yang kuadratnya kurang dari 10 juga merupakan bilangan asli yang kurang dari 5. Kita dapat langsung menuliskan elemen-elemen himpunan tersebut: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3\}$ (karena $3^2 = 9$ dan $4^2 = 16$). Jadi, $B \subseteq A$. Akan tetapi, $B \neq A$, sehingga sebenarnya $B \subset A$.

Himpunan-himpunan dalam contoh di atas berukuran kecil sehingga elemen-elemennya cukup mudah dituliskan. Namun, kita juga dapat membuktikan hubungan himpunan bagian ketika menuliskan semua elemen tidak praktis atau bahkan tidak mungkin dilakukan (misalnya karena himpunannya tak hingga). Mari kita cermati bagaimana kita dapat menalar contoh di atas.

Kita mengklaim bahwa setiap elemen B juga merupakan elemen A. Dengan kata lain: Untuk semua bilangan n, *jika* n merupakan elemen B, *maka* n juga merupakan elemen A. Setelah mengenalinya sebagai pernyataan bersyarat, kita dapat memberikan bukti langsung, bukti dengan kontraposisi, atau bukti dengan kontradiksi. Dalam hal ini, bukti langsung sangat memadai. Mari kita coba:

Bukti. Misalkan n merupakan elemen himpunan B. Maka, $n^2 < 10$ berdasarkan definisi B. Karena $4^2 = 16$, harus berlaku $n < 4$. Berdasarkan definisi A dan fakta bahwa $4 < 5$, kita memperoleh $n \in A$.

Jelasnya, bukti ini *jauh* lebih panjang daripada yang biasanya kita perlukan untuk contoh tersebut, tetapi bentuknya memberi wawasan. Membuktikan bahwa suatu himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan lain sesungguhnya sama dengan membuktikan sebuah implikasi!

Sebagai contoh penerapan definisi "himpunan bagian" dalam konteks yang lebih umum, mari kita buktikan sebuah fakta dasar tentang himpunan bagian.

Proposisi 1.5.3

Untuk sembarang himpunan A, B, dan C, jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$.

Bukti. Kita akan memberikan bukti langsung. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan, serta andaikan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$. Kita akan membuktikan bahwa $A \subseteq C$.

Misalkan x merupakan elemen A. Karena $A \subseteq B$, kita mengetahui bahwa $x \in B$. Karena $B \subseteq C$, kita mengetahui bahwa $x \in C$. Oleh karena itu, $A \subseteq C$.

Sekarang mari kita buktikan sebuah fakta tentang bilangan: Setiap kelipatan 9100 juga merupakan kelipatan 13. Kita dapat memfaktorkan 9100, tetapi ada cara yang lebih mudah. Himpunan kelipatan 9100 merupakan himpunan bagian dari himpunan kelipatan 91. Selanjutnya, himpunan kelipatan 91 merupakan himpunan bagian dari himpunan kelipatan 13. Sekarang terapkan proposisi di atas.

Bukti pada Proposisi 1.5.3 kadang-kadang disebut bukti dengan **penelusuran elemen**. Berdasarkan definisi himpunan bagian, $A \subseteq B$ berarti bahwa setiap elemen A merupakan elemen B, atau secara ekuivalen, untuk semua x, jika x merupakan elemen A, maka x merupakan elemen B. Salah satu cara membuktikannya adalah dengan "menelusuri" elemen x dari A ke B.

Contoh 1.5.4

Buktikan bahwa jika $A \subseteq B$, maka $A \cup B \subseteq B$. Ingatlah bahwa $A \cup B$ merupakan **gabungan** himpunan A dan B, serta memuat semua elemen yang terdapat dalam A, dalam B, atau dalam keduanya.

Penyelesaian. Kita akan menulis bukti langsung. Jadi, kita akan mengasumsikan bahwa $A \subseteq B$ dan membuktikan bahwa $A \cup B \subseteq B$. Kesimpulan yang ingin kita peroleh merupakan pernyataan tentang himpunan bagian, sehingga mari kita gunakan bukti dengan penelusuran elemen.

Bukti. Misalkan A dan B adalah himpunan dan andaikan $A \subseteq B$. Selanjutnya, misalkan x merupakan elemen $A \cup B$. Ini berarti bahwa x merupakan elemen A, atau x merupakan elemen B, atau elemen keduanya.[3]

Tinjau kedua kasus. Jika x merupakan elemen A, maka karena $A \subseteq B$, kita mengetahui bahwa x merupakan elemen B. Di sisi lain, jika x bukan elemen A, maka x harus merupakan elemen B (karena x berada dalam $A \cup B$). Dalam kedua kasus tersebut, x merupakan elemen B. Oleh karena itu, $A \cup B \subseteq B$. ■

Sebenarnya kita dapat membuktikan pernyataan yang lebih kuat: $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cup B = B$. Anda diminta membuktikannya dalam latihan.

1.5.3 Bukti tentang Fungsi

Fungsi $f : A \to B$ adalah aturan yang memasangkan setiap elemen himpunan A (domain) dengan tepat satu elemen himpunan B (kodomain). Aturannya dapat berupa apa saja: Tidak harus ada rumus atau alasan tertentu; kita hanya perlu memasangkan elemen-elemen A dengan elemen-elemen B. Sebagai contoh, misalkan A adalah himpunan mahasiswa yang mengikuti suatu mata kuliah Matematika Diskret dan B adalah himpunan bulan dalam setahun. Sekarang definisikan fungsi $f : A \to B$ sebagai aturan yang memasangkan setiap mahasiswa dengan bulan kelahirannya. Karena setiap mahasiswa dipasangkan dengan satu bulan, dan tidak lebih dari satu bulan, aturan ini merupakan fungsi.

Berikut adalah definisi salah satu jenis fungsi tertentu.

Definisi 1.5.5

Fungsi $f : A \to B$ bersifat **injektif** (atau **satu-satu**) jika setiap elemen B merupakan citra dari paling banyak satu elemen A. Dengan kata lain, tidak

[3] Berdasarkan definisi **gabungan**.

ada elemen B yang menjadi *keluaran* bagi lebih dari satu *masukan* dari A.

Dalam contoh berikut, kita menggunakan *notasi dua baris* untuk mendeskripsikan fungsi. Baris atas memuat masukan, sedangkan baris bawah mencantumkan keluaran yang bersesuaian. Jadi, $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ dapat didefinisikan sebagai

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

yang berarti bahwa $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, dan $f(4) = d$.

Contoh 1.5.6

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{2,4,6,8\}$. Tinjau fungsi $f : A \to B$ dan $g : A \to B$ yang didefinisikan oleh

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Manakah di antara fungsi-fungsi ini yang bersifat injektif?

Penyelesaian. Fungsi f bersifat injektif: Setiap elemen B merupakan citra dari paling banyak satu elemen A. Fungsi g tidak bersifat injektif: Elemen 4 dalam B merupakan citra dari 1 dan 3 dalam A.

Tinjau kembali fungsi yang memetakan mahasiswa ke bulan kelahirannya. Mungkinkah fungsi ini bersifat injektif? Atau, dengan kata lain, apakah harus ada dua mahasiswa dalam mata kuliah tersebut yang lahir pada bulan yang sama (yang berarti bahwa fungsi itu *tidak* injektif)? Jawabannya tampaknya bergantung pada banyaknya mahasiswa di kelas.

Namun, mari kita berhenti sejenak dan memikirkan fakta yang lebih umum tentang fungsi dalam situasi ini. Mari kita buktikan fakta berikut. Ingatlah bahwa $|A|$ menyatakan **kardinalitas** (ukuran) himpunan A, yaitu banyaknya elemen dalam A.

Proposisi 1.5.7

Misalkan $f : A \to B$ adalah fungsi dengan A dan B keduanya merupakan himpunan berhingga. Jika $|A| > |B|$, maka f tidak *injektif.*

Bukti. Kita akan memberikan bukti melalui kontraposisi: Jika f injektif, maka $|A| \leq |B|$. Misalkan $|B| = n$. Karena f injektif, setiap elemen B harus menjadi keluaran bagi *paling banyak* satu elemen A. Dengan demikian, terdapat paling banyak n elemen A yang dipetakan ke B oleh f. Namun, definisi fungsi mengharuskan setiap elemen domain dipetakan ke tepat satu elemen kodomain,

sehingga terdapat paling banyak n elemen dalam A.

Apakah bukti ini mengingatkan Anda pada bukti-bukti kita yang menyerupai prinsip sarang merpati? Seharusnya demikian, karena inilah salah satu perumusan cermat prinsip sarang merpati. Kita dapat saja membuktikan fakta tentang mahasiswa yang lahir pada bulan yang sama, tetapi sekarang kita cukup menerapkan proposisi di atas. Ketika suatu teorema atau proposisi diterapkan untuk membuktikan hasil lain secara langsung, hasil yang terakhir itu disebut **korolari**.

Akibat 1.5.8

Misalkan suatu kelas memiliki 25 mahasiswa. Maka, setidaknya dua mahasiswa lahir pada bulan yang sama.

Bukti. Tinjau fungsi yang memetakan setiap mahasiswa ke bulan kelahirannya. Karena domainnya memiliki 25 elemen dan kodomainnya memiliki 12 elemen, fungsi tersebut tidak injektif berdasarkan Proposisi 1.5.7. Oleh karena itu, setidaknya dua mahasiswa lahir pada bulan yang sama.

Masukan fungsi selalu berasal dari suatu *himpunan* (disebut **domain**), dan keluarannya juga berada dalam suatu himpunan (disebut **kodomain**). Hal ini secara alami mengarahkan kita pada berbagai fakta tentang interaksi antara himpunan dan fungsi.

Definisi 1.5.9

Diberikan fungsi $f : X \to Y$ dan himpunan $A \subseteq X$, kita mendefinisikan **citra** A **oleh** f sebagai himpunan $f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\}$. Artinya, $f(A)$ adalah himpunan semua keluaran fungsi untuk masukan dalam A.

Contoh 1.5.10

Misalkan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ didefinisikan oleh $f(n) = 2n$. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan $f(A)$.

Penyelesaian. Hitung nilai setiap elemen A menggunakan f.

$$f(1) = 2; \qquad f(2) = 4; \qquad f(3) = 6.$$

Kita menginginkan himpunan keluaran tersebut. Jadi, $f(A) = \{2, 4, 6\}$.

Sekarang mari kita buktikan sesuatu.

Proposisi 1.5.11

Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi, dan misalkan A serta B merupakan himpunan bagian dari X. Jika $A \subseteq B$, maka $f(A) \subseteq f(B)$.

Bukti. Misalkan f, A, dan B seperti dalam proposisi. Andaikan bahwa $A \subseteq B$. Sekarang tinjau suatu elemen $y \in f(A)$. Berdasarkan definisi, ini berarti terdapat suatu $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = y$. Karena $a \in A$ dan $A \subseteq B$, kita memperoleh $a \in B$. Dengan demikian, berdasarkan definisi,

$$y = f(a) \in f(B).$$

Karena y merupakan elemen sembarang dari $f(A)$, kita telah membuktikan bahwa $f(A) \subseteq f(B)$.

Perhatikan bahwa bukti di atas kembali merupakan bukti dengan penelusuran elemen. Hal ini masuk akal begitu Anda mengingat bahwa $f(A)$ dan $f(B)$ hanyalah nama himpunan. Untuk membuktikan bahwa suatu himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan lain, kita menelusuri elemen dari himpunan bagian ke superhimpunannya.

1.5.4 Bukti tentang Relasi

Suatu **relasi** pada himpunan A adalah himpunan pasangan terurut dari elemen-elemen A. Kita dapat memandang relasi sebagai cara mendeskripsikan suatu jenis hubungan di antara elemen-elemen A. Sebagai contoh, kita dapat memiliki relasi pada himpunan orang di sebuah pesta yang mendeskripsikan siapa berteman dengan siapa. Kita juga dapat memiliki relasi pada himpunan bilangan asli yang mendeskripsikan pasangan bilangan mana saja yang dihubungkan oleh relasi $x < y$.

Relasi meresapi seluruh matematika, sering kali tanpa kita sadari. Setiap kali kita membuat pernyataan tentang dua elemen suatu himpunan, secara implisit kita sedang mendefinisikan relasi. Pernyataan tersebut benar apabila pasangannya berada dalam relasi. Sebagai contoh, pernyataan "3 kurang dari 5" benar karena pasangan $(3, 5)$ berada dalam relasi $<$. Bahkan, dengan menggunakan bahasa yang kita kembangkan dalam subbagian Kuantor dan Predikat, kita dapat mengatakan bahwa relasi hanyalah predikat yang variabel-variabelnya berasal dari himpunan yang sama.

Relasi sering memiliki simbol khusus seperti "$=$", "$\leq$", atau "$\perp$". Ketika membicarakan relasi secara umum, kita akan menggunakan $\sim$ dan menulis $x \sim y$, atau menggunakan huruf kapital seperti R dan menulis $R(x, y)$, xRy, atau bahkan $(x, y) \in R$ (semuanya memiliki arti yang sama).

Ketika mempelajari relasi, kita berusaha mengenali sifat-sifat yang mungkin dimiliki suatu relasi. Berikut adalah contoh sifat yang sangat umum.

Definisi 1.5.12

Relasi R pada himpunan A bersifat **transitif** jika untuk semua $x, y, z \in A$, apabila xRy dan yRz, maka xRz.

Contoh 1.5.13

Tinjau relasi $\sim$ pada himpunan mahasiswa dalam mata kuliah Matematika Diskret Anda yang berlaku bagi dua mahasiswa jika mereka mengikuti mata kuliah lain yang sama. Apakah relasi ini bersifat transitif?

Penyelesaian. Tidak selalu (meskipun relasi ini dapat bersifat transitif untuk himpunan mahasiswa tertentu). Sebagai contoh, misalkan Alice mengikuti mata kuliah lain bersama Bruce, katakanlah Pengantar Pemrograman. Carlos tidak mengikuti Pengantar Pemrograman, tetapi ia dan Bruce sama-sama mengikuti Kimia Organik. Dengan demikian, Alice$\sim$Bruce dan Bruce$\sim$Carlos, tetapi belum tentu Alice$\sim$Carlos (karena Alice tidak harus mengikuti Kimia Organik bersama Carlos).

Untuk membuktikan bahwa suatu relasi *tidak* transitif, kita cukup menemukan contoh penyangkal, yaitu tiga elemen a, b, dan c sedemikian sehingga $a \sim b$ dan $b \sim c$, tetapi $a \not\sim c$ (ingat, satu-satunya cara suatu implikasi bernilai salah adalah ketika premisnya benar dan kesimpulannya salah).

Membuktikan bahwa suatu relasi bersifat transitif barangkali sedikit lebih menarik.

Contoh 1.5.14

Tinjau himpunan semua mahasiswa dalam kelas Matematika Diskret Anda, lalu definisikan relasi $\sim$ yang berlaku bagi mahasiswa a dan b (sehingga $a \sim b$ benar) jika a lebih tinggi daripada b. Buktikan bahwa relasi ini bersifat transitif.

Penyelesaian. Definisi transitif berbentuk implikasi, sehingga kita dapat mencoba bukti langsung.

Bukti. Misalkan a, b, dan c adalah sembarang mahasiswa dalam mata kuliah Matematika Diskret Anda. Andaikan $a \sim b$ dan $b \sim c$. Artinya, a lebih tinggi daripada b, dan b lebih tinggi daripada c. Oleh karena itu, a tentu lebih tinggi daripada c, dengan b sebagai pembanding perantara, sehingga $a \sim c$ juga benar. Jadi, $\sim$ bersifat transitif pada himpunan ini. ■

1.5.5 Bukti tentang Graf

Kita akan menggunakan seluruh Bab 2 untuk mempelajari bukti tentang graf karena bidang matematika ini begitu kaya. Sebagai pratinjau, berikut adalah contoh bagaimana bukti tentang graf dapat disusun.

Suatu **graf** terdiri atas himpunan V yang berisi **simpul** dan himpunan E yang berisi **sisi**. Sisi-sisinya merupakan himpunan bagian beranggota dua dari himpunan simpul, dan kita dapat memandangnya sebagai representasi hubungan antarsimpul. Perhatikan bahwa ini merupakan definisi abstrak graf dengan menggunakan himpunan. Namun, kita sering menggambar graf dengan titik sebagai simpul dan garis

yang menghubungkan titik-titik tersebut sebagai sisi karena gambar semacam itu membantu kita melihat apa yang terjadi.

Karena graf merepresentasikan suatu jenis hubungan antarelemen (simpul), kita dapat menggunakan graf untuk merepresentasikan banyak masalah dunia nyata. Sebagai contoh, simpul-simpul suatu graf dapat merepresentasikan orang-orang di sebuah pesta. Setiap sisi dapat merepresentasikan jabat tangan antara dua orang. Jadi, ketika kita bertanya apakah 15 orang di sebuah pesta mungkin masing-masing berjabat tangan dengan tepat 3 orang lain, sebenarnya kita sedang bertanya apakah ada graf dengan 15 simpul yang setiap simpulnya termasuk dalam 3 sisi. ("Termasuk dalam"?? Ya, karena suatu sisi merupakan himpunan bagian beranggota dua dari himpunan simpul. Jadi, jika suatu sisi "menyentuh" atau "keluar dari" suatu simpul, artinya simpul tersebut termasuk dalam himpunan bagian beranggota dua itu.)

Berikut adalah definisi yang berkaitan dengan gagasan tersebut.

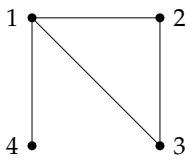
Definisi 1.5.15

Misalkan v adalah simpul dalam graf G. **Derajat** v, ditulis $d(v)$, adalah banyaknya sisi yang memuat v, yaitu banyaknya sisi yang **berinsiden** dengan v.

Contoh 1.5.16

Tinjau graf G dengan himpunan simpul $V = \{1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan sisi $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. Berapakah derajat setiap simpul dalam G?

Penyelesaian. Menggambarkan graf tersebut mungkin akan membantu:



Kita memperoleh $d(1) = 3$, $d(2) = 2$, $d(3) = 2$, dan $d(4) = 1$. Anda dapat melihatnya dengan menghitung banyaknya sisi yang berinsiden dengan setiap simpul, atau dengan menghitung banyaknya sisi (himpunan bagian) yang memuat setiap simpul.

Jadi, mungkinkah 15 orang masing-masing berjabat tangan dengan tepat tiga orang dalam kelompoknya? Dengan kata lain, adakah graf dengan 15 simpul yang semuanya berderajat 3? Jawabannya tidak!

Salah satu cara melihatnya adalah dengan menanyakan berapa banyak sisi yang akan dimiliki graf semacam itu. Setiap simpul berinsiden dengan tiga sisi, sehingga dengan menghitung insidensi kita memperoleh $15 \cdot 3 = 45$. Namun, setiap sisi berinsiden dengan dua simpul, sehingga setiap sisi telah kita hitung dua kali. Jadi, banyaknya sisi pada graf tersebut seharusnya $45/2 = 22.5$. Akan tetapi, banyaknya sisi dalam graf harus berupa bilangan bulat, sehingga graf semacam itu tidak ada.

Hal ini menunjukkan bahwa kita dapat menyatakan sesuatu yang lebih umum. Proposisi berikut merupakan konsekuensi sederhana dari Lemma Jabat Tangan 2.1.8, yang akan kita buktikan dalam Subbab 2.1. Di sini kita memberikan bukti lengkap untuk perumusan khusus berikut.

Proposisi 1.5.17

Dalam sembarang graf, banyaknya simpul berderajat ganjil harus genap.

Bukti. Kita akan membuktikannya dengan kontradiksi. Misalkan terdapat graf dengan banyaknya simpul berderajat ganjil yang ganjil. Tinjau jumlah derajat semua simpul. Jumlah derajat simpul-simpul berderajat ganjil akan bernilai ganjil (karena jumlah dari sebanyak ganjil bilangan ganjil adalah ganjil). Jumlah derajat simpul-simpul berderajat genap akan bernilai genap (setiap jumlah bilangan genap pasti genap). Jumlah bilangan ganjil dan bilangan genap adalah ganjil. Dengan demikian, jumlah semua derajat akan bernilai ganjil.

Namun, banyaknya sisi dalam graf sama dengan setengah jumlah derajat (berdasarkan Lema 2.1.8, atau cukup karena setiap sisi menyumbang satu pada perhitungan derajat masing-masing dari dua simpul). Karena banyaknya sisi merupakan bilangan bulat, kita melihat bahwa jumlah derajat harus genap. Hal ini bertentangan dengan hasil yang kita peroleh dalam paragraf sebelumnya.

Oleh karena itu, dalam sembarang graf, banyaknya simpul berderajat ganjil harus genap.

1.5.6 Pertanyaan Bacaan

1. Manakah di antara pilihan berikut yang merupakan definisi fungsi $f : A \to B$ yang bersifat injektif?

A. Setiap elemen B merupakan citra dari paling banyak satu elemen A.

B. Domain A merupakan himpunan yang lebih besar daripada kodomain B.

C. Setiap elemen A dipetakan ke paling banyak satu elemen B.

D. Kodomain B tidak lebih kecil daripada domain A.

2. Kapan Anda paling mungkin menggunakan penelusuran elemen sebagai bagian dari suatu bukti?

A. Ketika membuktikan bahwa suatu himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan lain.

B. Ketika membuktikan bahwa suatu fungsi bersifat injektif.

C. Ketika membuktikan bahwa suatu relasi bersifat transitif.

D. Ketika membuktikan bahwa suatu graf memiliki banyak sisi yang ganjil.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu lebih lanjut.

1.5.7 Soal Latihan

1. Diberikan himpunan A dan B, **irisan** A dan B, ditulis $A \cap B$, adalah himpunan semua elemen yang terdapat dalam A dan B sekaligus.

Misalkan Anda ingin membuktikan bahwa jika $A \cap B = B$, maka $B \subseteq A$.

Manakah yang merupakan awal yang baik bagi bukti ini jika Anda menggunakan bukti langsung?

A. Misalkan a merupakan elemen $A \cap B$.

B. Misalkan b merupakan elemen B.

C. Misalkan a merupakan elemen A.

D. Misalkan terdapat elemen b dalam B yang tidak terdapat dalam A.

2. Misalkan Anda ingin membuktikan bahwa untuk semua himpunan A dan B, berlaku $A \cap B \subseteq A$. Manakah di antara pilihan berikut yang merupakan awal yang baik bagi bukti dengan kontradiksi?

A. Misalkan terdapat elemen a dalam A yang tidak terdapat dalam $A \cap B$.

B. Misalkan terdapat elemen a dalam $A \cap B$ yang tidak terdapat dalam A.

C. Misalkan a merupakan elemen A.

D. Misalkan a merupakan elemen $A \cap B$.

3. Susunlah beberapa pernyataan di bawah ini sehingga membentuk bukti yang benar bagi pernyataan berikut: "Untuk sebarang himpunan A dan B, jika $B \subseteq A \cap B$, maka $B \subseteq A$."

- Oleh karena itu, $B \subseteq A \cap B$
- Karena $A \cap B$ memuat semua elemen yang terdapat dalam A dan B sekaligus, b merupakan elemen A.
- Maka, b merupakan elemen $A \cap B$ karena $B \subseteq A \cap B$.
- Misalkan b merupakan elemen $A \cap B$.
- Andaikan $B \subseteq A$.
- Andaikan $B \subseteq A \cap B$, dan misalkan b merupakan elemen B.
- Maka, b merupakan elemen B karena $B \subseteq A \cap B$.
- Oleh karena itu, $B \subseteq A$.

- Andaikan $A \subseteq B$.

4. Buktikan bahwa untuk sebarang himpunan A dan B, berlaku $(A \cap B) \cup A = A$

Susunlah pernyataan-pernyataan di bawah ini sehingga membentuk bukti yang benar.

- Jadi, khususnya, x merupakan elemen A.
- Kedua, kita akan membuktikan bahwa $A \subseteq (A \cap B) \cup A$.
- Misalkan x merupakan elemen $(A \cap B) \cup A$.
- Oleh karena itu, $A \subseteq (A \cap B) \cup A$.
- Pertama, kita akan membuktikan bahwa $(A \cap B) \cup A \subseteq A$.
- Oleh karena itu, $(A \cap B) \cup A \subseteq A$.
- Karena $(A \cap B) \cup A \subseteq A$ dan $A \subseteq (A \cap B) \cup A$, kita memperoleh $(A \cap B) \cup A = A$.
- Maka, x merupakan elemen $(A \cap B) \cup A$ karena x terdapat dalam A atau dalam himpunan yang lain.
- Maka, x merupakan elemen $A \cap B$, atau x merupakan elemen A.
- Misalkan x merupakan elemen A.

5. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi dan $B \subseteq Y$ merupakan himpunan bagian dari kodomain. Definisikan **citra invers** B oleh f sebagai himpunan $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Artinya, himpunan ini memuat semua elemen domain yang dipetakan ke elemen-elemen dalam B.

Buktikan bahwa untuk himpunan-himpunan bagian kodomain yang memenuhi $B_1 \subseteq B_2$, berlaku $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

Susunlah beberapa pernyataan di bawah ini sehingga membentuk bukti yang benar.

- Jadi, $B_1 \subseteq B_2$.
- Ini berarti bahwa $f(a)$ merupakan elemen B_1.
- Oleh karena itu, b merupakan elemen B_2.
- Oleh karena itu, $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.
- Andaikan $B_1 \subseteq B_2$.
- Karena $B_1 \subseteq B_2$, $f(a)$ merupakan elemen B_2.
- Dengan demikian, a merupakan elemen $f^{-1}(B_2)$.
- Misalkan b merupakan elemen B_1.
- Misalkan a merupakan elemen $f^{-1}(B_1)$.

1.5.8 Latihan Tambahan

1. Buktikan bahwa untuk sebarang dua himpunan A dan B, $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cup B = B$.

2. **Irisan** himpunan A dan B, dilambangkan dengan $A \cap B$, adalah himpunan semua elemen yang terdapat dalam A dan B sekaligus.

Buktikan bahwa untuk sebarang dua himpunan A dan B, $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cap B = A$.

3. Buktikan bahwa untuk sebarang himpunan A, B, dan C, jika $A \cup B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$.

4. Buktikan bahwa untuk sebarang himpunan A, B, dan C, jika $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$, maka $A \cup B \subseteq C$.

5. **Selisih** himpunan A dan B, ditulis $A \setminus B$, adalah himpunan semua elemen yang terdapat dalam A, tetapi tidak terdapat dalam B.

Himpunan kosong, ditulis $\emptyset$, adalah himpunan yang tidak memuat elemen apa pun.

Buktikan bahwa jika $A \setminus B = A$, maka $A \cap B = \emptyset$.

6. Buktikan bahwa jika $A \setminus B = B \setminus A$, maka $A = B$.

7. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi, dan misalkan A serta B merupakan himpunan bagian dari X.

(a) Buktikan bahwa $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(b) Carilah contoh suatu fungsi dan dua himpunan A serta B sedemikian sehingga $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

8. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi, dan misalkan A serta B merupakan himpunan bagian dari X.

(a) Buktikan bahwa $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

(b) Buktikan bahwa $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

(c) Apa yang dapat Anda simpulkan dari kedua bukti di atas?

9. Diberikan fungsi $f : X \to Y$ dan himpunan $B \subseteq Y$, kita mendefinisikan **citra invers** B oleh f sebagai himpunan $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Artinya, himpunan ini memuat semua elemen domain yang dipetakan ke elemen-elemen dalam B.

(a) Untuk $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh $f(n) = n^2$, tentukan masing-masing himpunan berikut.

(a) $f^{-1}(\{1, 4, 9\})$
(b) $f^{-1}(\{2, 3, 5, 7\})$
(c) $f^{-1}(\{1, 2, \ldots, 10\})$

(b) Buktikan bahwa untuk sebarang himpunan $C \subseteq X$, berlaku $C \subseteq f^{-1}(f(C))$.

(c) Berikan contoh fungsi f dan himpunan C sedemikian sehingga $C \neq f^{-1}(f(C))$.

(d) Buktikan bahwa untuk sebarang himpunan $D \subseteq Y$, berlaku $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$.

(e) Berikan contoh fungsi f dan himpunan D sedemikian sehingga $f(f^{-1}(D)) \neq D$.

10. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi, dan misalkan A serta B merupakan himpunan bagian dari Y. Buktikan bahwa $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

11. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi, dan misalkan A serta B merupakan himpunan bagian dari Y. Buktikan bahwa $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

12. Untuk setiap relasi di bawah ini, tentukan apakah relasi tersebut bersifat transitif. Jika ya, buktikan. Jika tidak, berikan contoh penyangkal.

(a) Relasi "|" (membagi) pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $a|b$ jika b merupakan kelipatan a.

(b) Relasi "$\leq$" (kurang dari atau sama dengan) pada $\mathbb{R}$.

(c) Relasi "$\perp$" (tegak lurus terhadap) pada himpunan garis di bidang.

(d) Relasi "$\sim$" (sebangun dengan) pada himpunan segitiga di bidang (dua segitiga sebangun jika sudut-sudutnya sama, tetapi ukurannya tidak harus sama).

1.6 Ringkasan Bab

Kita telah mempelajari logika baik sebagai subdisiplin matematika tersendiri maupun sebagai sarana yang membantu kita memahami dan menulis pembuktian dengan lebih baik. Kita telah melihat bahwa pernyataan matematis memiliki bentuk logis tertentu, dan menganalisis bentuk tersebut dapat membantu kita memahami pernyataannya.

Pada tingkat yang paling dasar, suatu pernyataan dapat menggabungkan pernyataan-pernyataan yang lebih sederhana dengan menggunakan *penghubung logis*. Kita sering menggunakan variabel dan melakukan *kuantifikasi* atas variabel-variabel tersebut. Pokok kajian logika adalah cara menentukan benar atau salahnya suatu pernyataan berdasarkan penghubung dan kuantor ini. Dari sini, kita dapat menentukan apakah dua pernyataan ekuivalen secara logis atau apakah satu atau beberapa pernyataan mengimplikasikan pernyataan lain secara logis.

Ketika menulis pembuktian (dalam bidang matematika apa pun), tujuan kita adalah menjelaskan mengapa suatu pernyataan matematis benar. Karena itu, sangatlah penting agar argumen kita benar-benar mengimplikasikan kebenaran pernyataan tersebut. Untuk memastikannya, pertama-tama kita harus mengetahui apa makna kebenaran pernyataan itu, serta memastikan bahwa pernyataan-pernyataan yang membentuk pembuktian mengimplikasikan kesimpulannya dengan benar. Pemahaman logika yang kukuh diperlukan untuk memeriksa apakah suatu pembuktian benar.

Namun, terdapat alasan lain mengapa pemahaman logika dapat membantu. Memahami struktur logis suatu pernyataan sering memberi petunjuk tentang cara menulis pembuktiannya.

Hal ini bukan berarti bahwa menulis pembuktian selalu mudah. Perhatikan kembali *konjektur Goldbach*:

> Setiap bilangan genap yang lebih besar dari 2 dapat ditulis sebagai jumlah dua bilangan prima.

Kita tidak akan mencoba membuktikan pernyataan tersebut di sini, tetapi setidaknya kita dapat menggambarkan bentuk pembuktian yang mungkin, berdasarkan bentuk logis pernyataannya. Kita dapat menulis ulang pernyataan itu untuk menonjolkan kuantor dan penghubungnya:

> Untuk setiap bilangan bulat n, jika n genap dan lebih besar dari 2, maka terdapat bilangan bulat p dan q sedemikian sehingga p dan q merupakan bilangan prima, dan $n = p + q$.

Seperti apa bentuk pembuktian langsungnya? Karena pernyataan tersebut diawali dengan kuantor universal, kita akan memulai dengan "Misalkan n suatu bilangan bulat sembarang." Bagian selebihnya dari pernyataan itu merupakan implikasi. Dalam pembuktian langsung, kita mengasumsikan bagian "jika", sehingga baris berikutnya berbunyi, "Asumsikan n lebih besar dari 2 dan genap." Saya tidak tahu apa yang harus dilakukan selanjutnya, tetapi pada akhirnya kita perlu menemukan

dua bilangan prima p dan q (yang bergantung pada n) dan menjelaskan bagaimana kita mengetahui bahwa $n = p + q$.

Atau mungkin kita mencoba pembuktian dengan kontradiksi. Untuk melakukannya, pertama-tama kita mengasumsikan negasi dari pernyataan yang ingin dibuktikan. Apakah negasinya? Berdasarkan apa yang telah kita pelajari, kita seharusnya dapat melihat bahwa negasinya adalah,

> Terdapat bilangan bulat n sedemikian sehingga n genap dan lebih besar dari 2, tetapi untuk setiap bilangan bulat p dan q, p atau q bukan bilangan prima, atau $n \neq p + q$.

Mungkinkah pernyataan ini benar? Pembuktian dengan kontradiksi akan dimulai dengan mengasumsikan bahwa pernyataan ini benar dan pada akhirnya memperoleh suatu kontradiksi, sehingga membuktikan bahwa asumsi kebenaran kita keliru. Jika Anda dapat menemukan kontradiksi semacam itu, Anda telah membuktikan salah satu masalah terbuka paling terkenal dalam matematika. Semoga berhasil.

Tinjauan Bab

1. Lengkapilah tabel kebenaran untuk pernyataan $\neg P \to (Q \wedge R)$.

2. Misalkan Anda mengetahui bahwa pernyataan "jika Peter tidak tinggi, maka Quincy gemuk dan Robert kurus" bernilai salah. Jika Anda mengetahui bahwa Quincy memang gemuk, apakah ada sesuatu yang dapat Anda simpulkan tentang Peter dan Robert? Jelaskan (Anda dapat merujuk Pertanyaan 1.6.1).

3. Apakah pernyataan $P \to (Q \vee R)$ dan $(P \to Q) \vee (P \to R)$ ekuivalen secara logis? Jelaskan jawaban Anda.

4. Apakah berikut ini merupakan aturan deduksi yang sahih? Jelaskan.

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \to R \\ \hline \therefore \quad P \to (Q \wedge R). \end{array}$$

5. Tulislah negasi, konvers, dan kontraposisi dari setiap pernyataan berikut.

(a) Jika listrik padam, maka makanan akan rusak.

(b) Jika pintu tertutup, maka lampu padam.

(c) $\forall x(x < 1 \to x^2 < 1)$.

(d) Untuk setiap bilangan asli n, jika n prima, maka n soliter.

(e) Untuk setiap fungsi f, jika f dapat didiferensialkan, maka f kontinu.

(f) Untuk setiap bilangan bulat a dan b, jika $a \cdot b$ genap, maka a dan b keduanya genap.

(g) Untuk setiap bilangan bulat x dan setiap bilangan bulat y, terdapat bilangan bulat n sedemikian sehingga jika $x > 0$, maka $nx > y$.

(h) Untuk setiap bilangan real x dan y, jika $xy = 0$, maka $x = 0$ atau $y = 0$.

(i) Untuk setiap mahasiswa dalam Matematika 228, jika mahasiswa tersebut tidak memahami implikasi, maka ia akan gagal dalam ujian.

6. Perhatikan pernyataan berikut: "Untuk setiap bilangan bulat n, jika n genap dan $n \leq 7$, maka n negatif atau $n \in \{0, 2, 4, 6\}$."

(a) Apakah pernyataan tersebut benar? Jelaskan alasannya.

(b) Tulislah negasi pernyataan tersebut. Apakah negasinya benar? Jelaskan.

(c) Nyatakan kontraposisi pernyataan tersebut. Apakah kontraposisinya benar? Jelaskan.

(d) Nyatakan konvers pernyataan tersebut. Apakah konversnya benar? Jelaskan.

7. Perhatikan pernyataan berikut: $\forall x(\forall y(x + y = y) \rightarrow \forall z(x \cdot z = 0))$.

(a) Jelaskan makna pernyataan tersebut dengan kata-kata. Apakah pernyataan ini benar? Pastikan Anda menyatakan semesta pembicaraan yang digunakan.

(b) Tulislah konvers pernyataan tersebut, baik dengan kata-kata maupun simbol. Apakah konversnya benar?

(c) Tulislah kontraposisi pernyataan tersebut, baik dengan kata-kata maupun simbol. Apakah kontraposisinya benar?

(d) Tulislah negasi pernyataan tersebut, baik dengan kata-kata maupun simbol. Apakah negasinya benar?

8. Sederhanakan bentuk-bentuk berikut.

(a) $\neg(\neg(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(\neg R \vee \neg(P \rightarrow R)))$.

(b) $\neg\exists x\neg\forall y\neg\exists z(z = x + y \rightarrow \exists w(x - y = w))$.

9. Perhatikan pernyataan berikut: "Untuk setiap bilangan bulat n, jika n ganjil, maka $7n$ ganjil."

(a) Buktikan pernyataan tersebut. Jenis pembuktian apa yang Anda gunakan?

(b) Buktikan konversnya. Jenis pembuktian apa yang Anda gunakan?

10. Misalkan Anda memecahkan celengan lalu mengambil segenggam 22 keping uang logam (uang logam AS: penny bernilai 1 sen, nickel bernilai 5 sen, dime bernilai 10 sen, dan quarter bernilai 25 sen).

(a) Buktikan bahwa Anda pasti memiliki sedikitnya 6 keping dengan denominasi yang sama.

(b) Misalkan Anda memiliki keping 1 sen dalam jumlah ganjil. Buktikan bahwa sedikitnya salah satu jenis uang logam lainnya juga pasti berjumlah ganjil.

(c) Berapa banyak keping yang perlu Anda ambil agar dapat dipastikan bahwa Anda memiliki empat keping yang semuanya sama atau empat keping yang semuanya berbeda? Buktikan jawaban Anda.

11. Anda menjumpai empat troll yang sedang bermain bridge. Mereka menyatakan:

Troll 1: Semua troll di sini melihat sedikitnya satu penipu.

Troll 2: Saya melihat sedikitnya satu troll yang hanya melihat para penipu.

Troll 3: Beberapa troll takut kepada kambing.

Troll 4: Semua troll takut kepada kambing.

Apakah ada troll yang tidak takut kepada kambing? Ingat bahwa setiap troll merupakan kesatria (yang selalu berkata benar) atau penipu (yang selalu berbohong).

Bab 2

Teori Graf

Teori graf baru menjadi cabang matematika dalam waktu yang relatif singkat; buku pertama tentang teori graf diterbitkan kurang dari 100 tahun yang lalu. Meskipun masalah pertama yang berkaitan dengan apa yang kini kita sebut teori graf berasal dari tahun 1735, kemunculan komputerlah yang memperlihatkan kegunaan sesungguhnya dari bidang ini. Teori graf memiliki keindahan yang sederhana sekaligus kedalaman yang mengejutkan. Banyak bidang utama teori graf dapat dipahami hampir tanpa prasyarat matematika, tetapi penelitian baru di bidang ini tetap menghasilkan ratusan artikel ilmiah yang ditelaah sejawat setiap tahun.

Dalam bab ini, kita akan menjelajahi beberapa cara menggunakan graf dan sifat-sifatnya untuk menyelesaikan masalah yang muncul dalam ilmu komputer, matematika, dan hampir setiap cabang ilmu terapan lainnya.

2.1 Masalah dan Definisi

Tujuan Pembelajaran

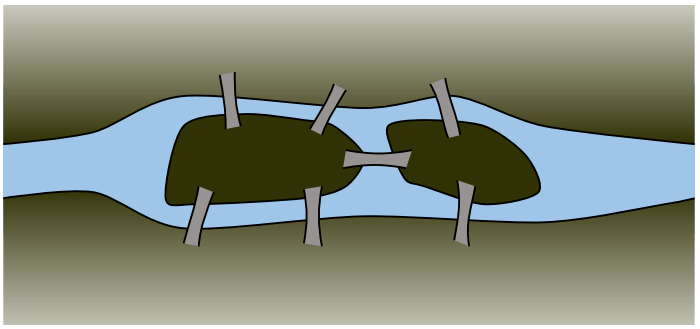
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menggunakan bahasa teori graf untuk mendeskripsikan sifat-sifat graf.
2. Menggunakan berbagai representasi graf.
3. Menerapkan Lema Jabat Tangan untuk menjawab pertanyaan tentang graf dan masalah yang direpresentasikannya.

2.1.1 Pratinjau Bagian

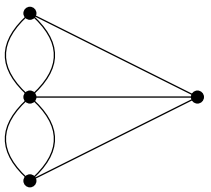
Selidiki!

Pada masa Euler, di kota Königsberg, Prusia, terdapat sebuah sungai dengan dua pulau. Pulau-pulau tersebut terhubung dengan tepian sungai melalui tujuh jembatan (seperti terlihat di bawah). Jembatan-jembatan itu sangat indah, dan pada hari libur, warga kota menghabiskan waktu dengan berjalan melintasinya. Seiring berjalannya waktu, muncul sebuah pertanyaan: Dapatkah direncanakan suatu perjalanan yang melintasi setiap jembatan tepat satu kali? Euler berhasil menjawab pertanyaan ini. Dapatkah Anda?



Teori graf merupakan bidang matematika yang relatif baru, yang pertama kali dipelajari oleh matematikawan sangat terkenal Leonhard Euler pada tahun 1735. Sejak saat itu, teori graf berkembang menjadi alat yang ampuh dan digunakan di hampir setiap cabang ilmu pengetahuan, serta kini menjadi bidang penelitian matematika yang aktif.

Masalah di atas, yang dikenal sebagai *Tujuh Jembatan Königsberg*, merupakan masalah yang mula-mula mengilhami teori graf. Perhatikan suatu masalah yang "berbeda": Di bawah ini terdapat gambar empat titik yang dihubungkan oleh beberapa garis. Dapatkah setiap garis ditelusuri tepat satu kali (tanpa mengangkat pensil, dengan mulai dan berakhir pada sebuah titik)?



Terdapat hubungan yang jelas antara kedua masalah ini. Setiap lintasan pada gambar titik dan garis berpadanan tepat dengan suatu lintasan melalui jembatan-jembatan Königsberg.

Gambar seperti gambar titik dan garis ini disebut **graf** (meskipun secara teknis, gambar di atas adalah sebuah **multigraf**). Graf tersusun atas sekumpulan titik yang

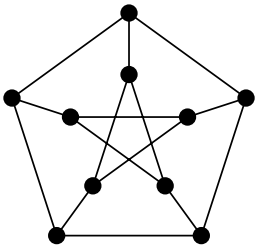
disebut **simpul** dan garis yang menghubungkan titik-titik tersebut, yang disebut **sisi**. Ketika dua simpul dihubungkan oleh sebuah sisi, kita mengatakan bahwa keduanya **bertetangga**. Keuntungan mengamati graf alih-alih gambar sungai, pulau, dan jembatan adalah bahwa sekarang kita memiliki objek matematis untuk dipelajari. Kita telah menyaring bagian-bagian yang "penting" dari gambar jembatan bagi masalah tersebut. Tidak menjadi persoalan seberapa besar pulau-pulaunya, dari bahan apa jembatan-jembatannya dibuat, apakah sungainya berisi buaya, dan sebagainya. Yang penting hanyalah daratan mana yang terhubung dengan daratan lainnya, dan berapa kali. Inilah wawasan penting Euler.

Kita akan kembali membahas pencarian lintasan dalam graf pada Subbab 2.4. Pada bagian ini, kita akan mengeksplorasi berbagai cara graf dapat digunakan untuk merepresentasikan, atau *memodelkan*, masalah dunia nyata. Dalam prosesnya, kita akan memperkenalkan beberapa definisi, istilah, dan notasi dasar yang akan digunakan pada bagian-bagian selanjutnya dalam bab ini.

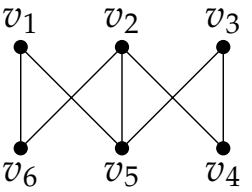
Aktivitas Pratinjau

Untuk memahami graf dan jenis pertanyaan yang ingin kita ajukan mengenainya, mari kita pelajari empat contoh graf.

G_1:



G_2:



G_3:

simpul	bertetangga dengan
a	b, c
b	a, f
c	a, d, e
d	c, e, f
e	c, d
f	b, d

G_4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graf G_3 disajikan sebagai **daftar ketetanggaan**, yaitu setiap simpul diberi daftar simpul-simpul lain yang bertetangga dengannya. Graf G_4 disajikan sebagai **matriks ketetanggaan**, yaitu baris dan kolom berpadanan dengan simpul-simpul, dan entrinya bernilai 1 jika kedua simpul bertetangga dan 0 jika tidak. Sebelum menjawab pertanyaan-pertanyaan di bawah, mungkin akan membantu jika Anda menggambar representasi yang lebih lazim dari graf-graf ini.

1. Pertama, mari kita hitung banyaknya simpul dan sisi pada setiap graf.

2. Banyaknya sisi yang bersisian dengan suatu simpul tertentu (yaitu, banyaknya sisi yang "keluar dari" simpul tersebut) disebut derajat simpul itu. Daftar derajat semua simpul dalam urutan tak-menaik disebut barisan derajat graf. Tentukan barisan derajat untuk setiap graf.

3. Kita sering memperhatikan lintasan di antara simpul-simpul dalam graf. Suatu graf disebut terhubung jika terdapat lintasan di antara setiap pasangan simpul. Kadang-kadang terdapat lintasan yang berawal di suatu simpul dan akhirnya kembali ke simpul itu sendiri; lintasan demikian disebut siklus.

(a) Graf mana saja yang terhubung?

(b) Graf mana saja yang memuat siklus?

(c) Graf yang terhubung dan tidak memuat siklus disebut pohon. Untuk setiap graf, berapa banyak sisi yang harus dihapus agar graf tersebut menjadi pohon? (Jika graf itu sudah merupakan pohon, jawabannya adalah 0.)

4. Graf mana saja yang dapat digambar sedemikian rupa sehingga tidak ada sisi yang berpotongan?

5. Misalkan setiap simpul suatu graf kita warnai sedemikian rupa sehingga simpul-simpul yang bertetangga selalu memiliki warna berbeda. Banyaknya warna paling sedikit yang diperlukan disebut bilangan kromatik graf tersebut. Tentukan bilangan kromatik untuk setiap graf.

Catatan: Jika graf-graf tersebut merepresentasikan hubungan pertemanan antarorang, bilangan kromatik akan memberi tahu kita banyaknya kelompok minimum yang diperlukan apabila kita ingin membagi semua orang ke dalam kelompok-kelompok yang anggotanya belum saling berteman.

2.1.2 Apa Itu Graf?

Sebelum mulai mempelajari graf, kita perlu menyepakati apa yang dimaksud dengan graf. Meskipun kita hampir selalu membayangkan graf sebagai gambar (titik-titik yang dihubungkan oleh garis), gambaran ini cukup ambigu. Haruskah garis-garisnya lurus? Apakah panjang garis atau besar titik berpengaruh? Dapatkah ada dua garis yang menghubungkan pasangan titik yang sama? Dapatkah satu garis menghubungkan tiga titik?

Cara kita menghindari ambiguitas dalam matematika adalah dengan memberikan *definisi* yang konkret dan cermat. Merumuskan definisi yang baik tidaklah mudah, tetapi sangat penting. Definisi merupakan titik awal yang disepakati dan menjadi landasan bagi semua kebenaran dalam matematika. Adakah graf tanpa sisi? Kita harus melihat definisinya untuk mengetahui apakah hal ini mungkin.

Kita menginginkan definisi yang tepat dan tidak ambigu, tetapi definisi itu juga harus selaras dengan intuisi kita tentang objek yang dipelajari. Definisi tersebut harus berguna: Kita *dapat saja* mendefinisikan graf sebagai mamalia berkaki

enam, tetapi definisi itu tidak akan membantu kita menyelesaikan masalah tentang jembatan. Sebagai gantinya, berikut adalah definisi graf yang kini menjadi standar.

Definisi 2.1.1 Graf.

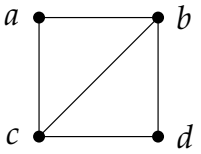
Sebuah **graf** adalah pasangan terurut $G = (V, E)$ yang terdiri atas himpunan tak kosong V (disebut himpunan **simpul**) dan himpunan E (disebut himpunan **sisi**) yang anggotanya merupakan subhimpunan dua unsur dari V.

Aneh. Definisi tersebut sama sekali tidak menyebut titik atau garis. Berdasarkan definisi itu, sebuah graf dapat berupa

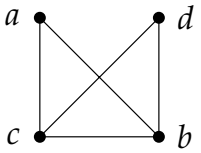
$$(\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}).$$

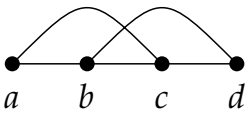
Di sini kita memiliki graf dengan empat simpul (huruf-huruf a, b, c, d) dan lima sisi (pasangan-pasangan $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$)).

Mengamati himpunan dan himpunan yang beranggotakan himpunan dua unsur sulit dipahami. Karena itu, kita sering menggambar representasi himpunan-himpunan tersebut. Kita menempatkan satu titik untuk setiap simpul dan menghubungkan dua titik dengan garis tepat ketika kedua simpul itu merupakan salah satu subhimpunan dua unsur dalam himpunan sisi kita. Jadi, salah satu cara menggambar graf yang dideskripsikan di atas adalah sebagai berikut:



Namun, kita juga dapat menggambar graf tersebut dengan cara berbeda. Misalnya, salah satu dari dua gambar berikut:





Kita perlu berhati-hati mengenai arti dua graf yang "sama." Sebenarnya, berdasarkan definisi kita, hal ini mudah: Apakah himpunan simpulnya sama? Apakah himpunan sisinya sama? Kita mengetahui arti kesamaan dua himpunan, dan graf tidak lain adalah pasangan dari dua jenis himpunan khusus.

Contoh 2.1.2

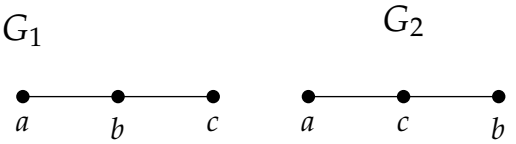
Apakah graf-graf di bawah ini sama?

$$G_1 = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}\}); \qquad G_2 = (\{a, b, c\}, \{\{a, c\}, \{c, b\}\}).$$

Penyelesaian. Tidak. Di sini himpunan simpul kedua graf sama, yang

merupakan awal yang baik. Selain itu, kedua graf memiliki dua sisi. Pada graf pertama, kita memiliki sisi $\{a, b\}$ dan $\{b, c\}$, sedangkan pada graf kedua kita memiliki sisi $\{a, c\}$ dan $\{c, b\}$. Tentu saja, $\{b, c\} = \{c, b\}$, jadi itu bukan masalahnya. Masalahnya adalah $\{a, b\} \neq \{a, c\}$. Karena himpunan sisi kedua graf tidak sama (sebagai himpunan), graf-graf tersebut tidak sama (sebagai graf).

Meskipun dua graf tidak *sama*, keduanya mungkin *pada dasarnya* sama. Graf-graf pada contoh sebelumnya dapat digambar seperti berikut:



Graf-graf yang pada dasarnya sama (tetapi mungkin tidak setara) disebut **isomorfik**. Kita akan memberikan definisi tepat bagi istilah ini setelah sebuah contoh singkat:

Contoh 2.1.3

Perhatikan graf-graf berikut:

$G_1 = (V_1, E_1)$ dengan $V_1 = \{a, b, c\}$ dan $E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$;

$G_2 = (V_2, E_2)$ dengan $V_2 = \{u, v, w\}$ dan $E_2 = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}\}$.

Apakah graf-graf ini sama?

Penyelesaian. Kedua graf tersebut TIDAK sama. Cukup perhatikan bahwa $V_1 \neq V_2$ karena $a \in V_1$, tetapi $a \notin V_2$. Namun, kedua graf tersebut terdiri atas tiga simpul dengan sisi yang menghubungkan setiap pasangan simpul. Kita dapat menggambarnya sebagai berikut:



Jelas bahwa kita ingin mengatakan kedua graf ini pada dasarnya sama; jadi meskipun tidak setara, keduanya *isomorfik*. Kita dapat mengganti nama simpul-simpul pada satu graf dan memperoleh graf kedua sebagai hasilnya.

Secara intuitif, graf-graf disebut **isomorfik** jika pada dasarnya sama, atau lebih tepatnya, jika keduanya sama kecuali nama simpul-simpulnya. Untuk merumuskan

konsep penggantian nama simpul secara tepat, kita memberikan definisi berikut:

Definisi 2.1.4

Sebuah **isomorfisme** antara dua graf G_1 dan G_2 adalah bijeksi $f : V_1 \to V_2$ antara simpul-simpul kedua graf sedemikian sehingga $\{a, b\}$ merupakan sisi di G_1 jika dan hanya jika $\{f(a), f(b)\}$ merupakan sisi di G_2.

Dua graf disebut **isomorfik** jika terdapat isomorfisme di antara keduanya. Dalam hal ini kita menulis $G_1 \cong G_2$.

Isomorfisme tidak lain adalah fungsi yang mengganti nama simpul-simpul. Fungsi tersebut harus berupa bijeksi agar setiap simpul memperoleh nama baru. Simpul-simpul yang baru dinamai ini harus dihubungkan oleh sisi tepat ketika simpul-simpul tersebut dihubungkan oleh sisi saat menggunakan nama lamanya.

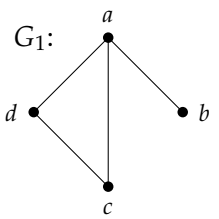
Contoh 2.1.5

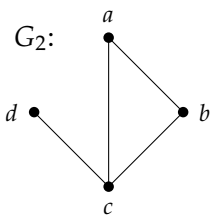
Tentukan apakah graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ sama atau isomorfik.
$V_1 = \{a, b, c, d\}$, $E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$
$V_2 = \{a, b, c, d\}$, $E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

Penyelesaian. Kedua graf TIDAK sama, karena $\{a, d\} \in E_1$, tetapi $\{a, d\} \notin E_2$. Namun, karena kedua graf memuat banyak simpul dan sisi yang sama, keduanya *mungkin* isomorfik (hal ini belum cukup dalam kebanyakan kasus, tetapi merupakan awal yang baik).

Kita dapat mencoba membangun sebuah isomorfisme. Misalkan kita menetapkan $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, dan $f(d) = a$. Fungsi ini jelas merupakan bijeksi, tetapi untuk memastikan bahwa fungsi tersebut merupakan isomorfisme, kita harus memastikan bahwa fungsi itu *mempertahankan relasi sisi*. Di G_1, simpul a dan b dihubungkan oleh sebuah sisi. Di G_2, $f(a) = b$ dan $f(b) = c$ dihubungkan oleh sebuah sisi. Sejauh ini baik, tetapi kita harus memeriksa tiga sisi lainnya. Sisi $\{a, c\}$ di G_1 berpadanan dengan $\{f(a), f(c)\} = \{b, d\}$, tetapi di sini timbul masalah. Tidak ada sisi antara b dan d di G_2. Jadi, f BUKAN isomorfisme.

Namun, harapan belum hilang. Hanya karena f bukan isomorfisme, bukan berarti sama sekali tidak ada isomorfisme. Kita dapat mencoba lagi. Pada tahap ini, menggambar graf-graf tersebut mungkin membantu untuk melihat bagaimana keduanya seharusnya dipadankan.





Sebagai alternatif, perhatikan bahwa di G_1, simpul a bertetangga dengan setiap simpul lainnya. Di G_2, juga terdapat simpul dengan sifat ini, yaitu c. Jadi, bangun bijeksi $g : V_1 \to V_2$ dengan terlebih dahulu mendefinisikan $g(a) = c$. Selanjutnya, ke mana b harus dipetakan? Di G_1, simpul b hanya bertetangga dengan simpul a. Tepat ada satu simpul seperti ini di G_2, yaitu d. Jadi tetapkan $g(b) = d$. Untuk dua simpul terakhir, dalam contoh ini kita bebas memilih: tetapkan $g(c) = b$ dan $g(d) = a$ (menukar keduanya juga tidak menjadi masalah).

Kita perlu memeriksa bahwa fungsi ini benar-benar merupakan isomorfisme. Fungsi ini jelas bijektif. Kita harus memastikan bahwa sisi-sisinya dipertahankan. Empat sisi di G_1 adalah

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}.$$

Di bawah isomorfisme yang diusulkan, sisi-sisi tersebut menjadi

$$\{g(a), g(b)\}, \{g(a), g(c)\}, \{g(a), g(d)\}, \{g(c), g(d)\}$$

$$\{c, d\}, \{c, b\}, \{c, a\}, \{b, a\},$$

yang tepat merupakan sisi-sisi di G_2. Jadi, g adalah isomorfisme, sehingga $G_1 \cong G_2$

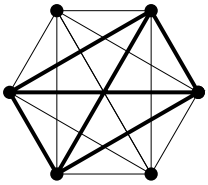
Kadang-kadang kita akan membahas graf dengan nama khusus (seperti K_n atau *graf Petersen*) atau mungkin menggambar graf tanpa label. Dalam hal ini, sebenarnya kita merujuk pada *semua* graf yang isomorfik dengan setiap salinan graf khusus tersebut. Kumpulan graf yang isomorfik sering disebut **kelas isomorfisme**.[1]

Ada hubungan lain di antara graf yang kita perhatikan, selain kesamaan dan sifat isomorfik. Sebagai contoh, bandingkan pasangan graf berikut:



Kedua graf ini jelas tidak isomorfik, tetapi perhatikan bahwa graf di kanan tampak seperti bagian dari graf di kiri, khususnya jika kita menggambarnya seperti berikut:

[1]Hal ini serupa dengan geometri, di mana kita mungkin memiliki lebih dari satu salinan suatu segitiga tertentu. Dalam geometri, alih-alih *isomorfik*, kita mengatakan *kongruen*.



Kita ingin mengatakan bahwa graf yang lebih kecil merupakan *subgraf* dari graf yang lebih besar.

Kita perlu memberikan definisi yang cermat mengenai hal ini. Sebenarnya, terdapat dua pengertian yang masuk akal tentang makna subgraf.

Definisi 2.1.6 Subgraf.

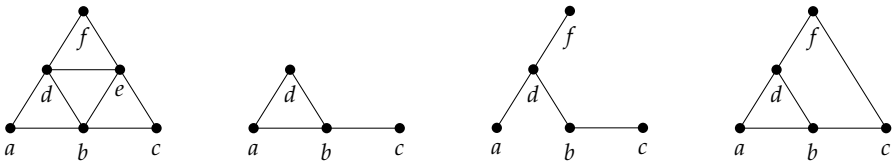
Kita mengatakan bahwa $G' = (V', E')$ merupakan **subgraf** dari $G = (V, E)$, dan menulis $G' \subseteq G$, jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$.

Kita mengatakan bahwa $G' = (V', E')$ merupakan **subgraf terinduksi** dari $G = (V, E)$ jika $V' \subseteq V$ dan setiap sisi di E yang simpul-simpulnya masih berada di V' juga merupakan sisi di E'.

Perhatikan bahwa setiap subgraf terinduksi juga merupakan subgraf biasa, tetapi kebalikannya tidak selalu berlaku. Bayangkan subgraf sebagai hasil penghapusan beberapa simpul dan sisi dari graf yang lebih besar. Agar subgraf tersebut merupakan subgraf terinduksi, kita masih dapat menghapus simpul, tetapi sekarang kita hanya menghapus sisi-sisi yang memuat simpul yang dihapus.

Contoh 2.1.7

Perhatikan graf-graf berikut:



Di sini G_2 dan G_3 merupakan subgraf dari G_1. Namun, hanya G_2 yang merupakan subgraf *terinduksi*. Setiap sisi di G_1 yang menghubungkan simpul-simpul dalam G_2 juga merupakan sisi di G_2. Di G_3, sisi $\{a, b\}$ berada di E_1, tetapi tidak di E_3, meskipun simpul a dan b berada di V_3.

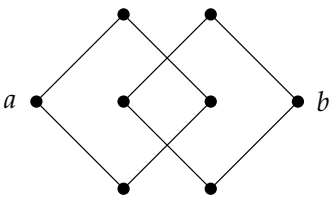
Graf G_4 BUKAN subgraf dari G_1, meskipun tampaknya kita hanya menghapus simpul e. Alasannya, di E_4 terdapat sisi $\{c, f\}$, tetapi sisi ini bukan anggota E_1, sehingga syarat $E_4 \subseteq E_1$ tidak terpenuhi.

Kembali ke beberapa definisi dasar teori graf. Perhatikan bahwa semua graf yang telah kita gambar di atas memiliki sifat bahwa tidak ada pasangan simpul yang

dihubungkan lebih dari satu kali, dan tidak ada simpul yang terhubung dengan dirinya sendiri. Graf seperti ini kadang-kadang disebut **sederhana**, meskipun kita cukup menyebutnya *graf*. Hal ini karena definisi graf kita menyatakan bahwa sisi-sisi membentuk suatu himpunan subhimpunan dua unsur dari himpunan simpul. Ingat bahwa tidak masuk akal mengatakan suatu himpunan memuat sebuah unsur lebih dari satu kali. Jadi, tidak ada pasangan simpul yang dapat dihubungkan oleh sisi lebih dari satu kali. Selain itu, karena setiap sisi harus berupa himpunan yang memuat dua simpul, satu simpul tidak dapat dihubungkan dengan dirinya sendiri oleh sebuah sisi.

Meskipun demikian, ada kalanya kita ingin mempertimbangkan sisi rangkap (atau lebih) dan gelang berupa satu sisi. Sebagai contoh, "graf" yang kita gambar untuk masalah Jembatan Königsberg memiliki sisi rangkap karena memang ada dua jembatan yang menghubungkan suatu pulau tertentu dengan tepi sungai terdekat. Objek-objek ini kita sebut **multigraf**. Nama ini tepat: *Multihimpunan* adalah himpunan yang memperbolehkan satu unsur dicantumkan beberapa kali.

Graf-graf di atas juga **terhubung**: Anda dapat berpindah dari satu simpul ke simpul lainnya dengan mengikuti suatu lintasan sisi. Graf yang tidak terhubung dapat dianggap sebagai dua graf terpisah yang digambar berdekatan. Sebagai contoh, graf berikut TIDAK terhubung karena tidak ada lintasan dari a ke b:



Simpul-simpul dalam suatu graf tidak selalu memiliki sisi di antaranya. Jika kita menambahkan semua sisi yang mungkin, graf yang dihasilkan disebut **lengkap**. Artinya, suatu graf lengkap jika setiap pasangan simpul dihubungkan oleh sebuah sisi. Karena suatu graf sepenuhnya ditentukan oleh simpul mana yang bertetangga dengan simpul lainnya, hanya ada satu graf lengkap dengan banyak simpul tertentu. Kita memberi graf-graf tersebut nama khusus: K_n adalah graf lengkap dengan n simpul.

Setiap simpul di K_n bertetangga dengan $n-1$ simpul lainnya. Kita menyebut banyaknya sisi yang memancar dari suatu simpul sebagai **derajat** simpul tersebut. Jadi, setiap simpul di K_n berderajat $n-1$. Berapa banyak sisi yang dimiliki K_n? Orang mungkin menduga jawabannya $n(n-1)$, karena kita menghitung $n-1$ sisi sebanyak n kali (satu kali untuk setiap simpul). Namun, setiap sisi bersisian dengan 2 simpul, sehingga kita menghitung setiap sisi tepat dua kali. Jadi, terdapat $n(n-1)/2$ sisi di K_n. Sebagai alternatif, kita dapat mengatakan terdapat $\binom{n}{2}$ sisi, karena untuk menggambar sebuah sisi kita harus memilih 2 dari n simpul.

Secara umum, jika kita mengetahui derajat semua simpul dalam suatu graf, kita dapat menentukan banyaknya sisi. Jumlah derajat semua simpul akan selalu sama dengan *dua kali* banyaknya sisi, karena setiap sisi menambah derajat dua simpul. Perhatikan bahwa hal ini berarti jumlah derajat semua simpul dalam setiap graf

harus genap!

Ini adalah contoh pertama kita tentang hasil umum yang berlaku bagi semua graf. Hasil ini tampak sederhana, tetapi kita akan menggunakannya untuk membuktikan berbagai pernyataan lain. Jadi, mari kita beri nama dan nyatakan hasil tersebut secara formal.

Lema 2.1.8 Lema Jabat Tangan.

Dalam setiap graf, jumlah derajat simpul-simpul dalam graf selalu sama dengan dua kali banyaknya sisi.

Lema jabat tangan[2] kadang-kadang disebut *rumus jumlah derajat*, dan dapat ditulis secara simbolis sebagai

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2e.$$

Di sini kita menggunakan notasi $d(v)$ untuk derajat simpul v.

Salah satu kegunaan lema ini adalah menentukan banyaknya sisi dalam suatu graf. Untuk melakukannya, Anda harus diberi **barisan derajat** graf tersebut (atau dapat menentukannya dari informasi lain). Barisan ini memuat derajat setiap simpul dalam graf, dan umumnya ditulis dalam urutan tak-menaik.

Contoh 2.1.9

Berapa banyak simpul dan sisi yang harus dimiliki suatu graf jika barisan derajatnya adalah

$$(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)?$$

Penyelesaian. Banyaknya simpul mudah ditentukan. Nilainya sama dengan banyaknya derajat dalam barisan, yaitu 7. Untuk menentukan banyaknya sisi, kita menghitung jumlah derajat

$$4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 20,$$

sehingga banyaknya sisi adalah setengah dari nilai tersebut, yaitu 10.

Lema jabat tangan juga memberi tahu kita apa yang tidak mungkin.

Contoh 2.1.10

Dalam suatu seminar matematika baru-baru ini, 9 matematikawan saling menyapa dengan berjabat tangan. Mungkinkah setiap matematikawan berjabat tangan dengan tepat 7 orang dalam seminar tersebut?

[2]Sebuah *lema* adalah pernyataan matematis yang penting terutama karena digunakan untuk menetapkan hasil-hasil lain.

Penyelesaian. Tampaknya hal ini mungkin. Setiap matematikawan memilih satu orang yang tidak diajak berjabat tangan. Namun, hal ini tidak dapat terjadi. Kita sedang menanyakan apakah suatu graf dengan 9 simpul dapat memiliki setiap simpul berderajat 7. Jika graf semacam itu ada, jumlah derajat simpul-simpulnya adalah $9 \cdot 7 = 63$. Nilai ini seharusnya dua kali banyaknya sisi (jabat tangan), sehingga graf tersebut memiliki 31.5 sisi. Hal itu mustahil. Jadi, setidaknya satu (bahkan sejumlah ganjil) matematikawan pasti berjabat tangan dengan *orang dalam jumlah genap* dalam seminar tersebut.

Kita dapat menggeneralisasi contoh sebelumnya untuk memperoleh proposisi berikut.[3]

Proposisi 2.1.11

Dalam setiap graf, banyaknya simpul yang berderajat ganjil harus genap.

Bukti. Misalkan terdapat graf dengan banyak simpul berderajat ganjil yang ganjil. Maka jumlah derajat dalam graf tersebut akan ganjil, yang mustahil menurut lema jabat tangan.

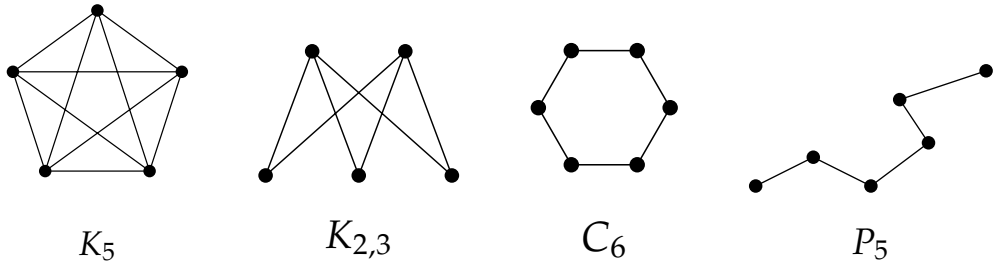
Kita akan membahas penerapan lebih lanjut dari lema jabat tangan dalam latihan.

Satu definisi terakhir: Kita mengatakan suatu graf **bipartit** jika simpul-simpulnya dapat dibagi menjadi dua himpunan, A dan B, dengan tidak ada dua simpul di A yang bertetangga dan tidak ada dua simpul di B yang bertetangga. Simpul-simpul di A dapat bertetangga dengan sebagian atau seluruh simpul di B. Jika setiap simpul di A bertetangga dengan seluruh simpul di B, graf tersebut merupakan **graf bipartit lengkap** dan diberi nama khusus: $K_{m,n}$, dengan $|A| = m$ dan $|B| = n$.

Graf Bernama. Beberapa graf digunakan lebih sering daripada graf lainnya dan diberi nama khusus.

K_n	Graf lengkap dengan n simpul.
$K_{m,n}$	Graf bipartit lengkap dengan himpunan yang masing-masing memiliki m dan n simpul.
C_n	Siklus pada n simpul, yakni satu putaran besar.
P_n	Lintasan pada $n + 1$ simpul (jadi memiliki n sisi), yakni satu lintasan panjang.

[3]Sebuah **proposisi** adalah pernyataan umum dalam matematika, serupa dengan teorema, meskipun umumnya dianggap kurang penting.



K_5 $K_{2,3}$ C_6 P_5

Definisi Teori Graf. Ada banyak definisi yang perlu diingat dalam teori graf. Berikut adalah glosarium istilah yang telah kita gunakan dan akan segera kita jumpai.

Graf	Kumpulan **simpul**, yang sebagian di antaranya dihubungkan oleh **sisi**. Lebih tepatnya, pasangan himpunan V dan E, dengan V sebagai himpunan simpul dan E sebagai himpunan subhimpunan dua unsur dari V.
Bertetangga	Dua simpul **bertetangga** jika keduanya dihubungkan oleh sebuah sisi. Dua sisi **bertetangga** jika keduanya berbagi sebuah simpul.
Graf bipartit	Graf yang simpul-simpulnya dapat dibagi menjadi dua himpunan saling lepas sedemikian sehingga tidak ada sisi di antara dua simpul dalam himpunan yang sama.
Graf bipartit lengkap	Graf bipartit yang setiap simpul dalam himpunan pertama bertetangga dengan setiap simpul dalam himpunan kedua.
Graf lengkap	Graf yang setiap pasangan simpulnya bertetangga.
Terhubung	Suatu graf disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari setiap simpul ke setiap simpul lainnya.
Bilangan kromatik	Banyaknya warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan simpul yang tepat pada graf.
Siklus	Lintasan (lihat di bawah) yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama, tetapi tidak memuat simpul berulang lainnya.
Derajat simpul	Banyaknya sisi yang bersisian dengan sebuah simpul.
Jejak Euler	Perjalanan yang menggunakan setiap sisi tepat satu kali.
Sirkuit Euler	Jejak Euler yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.
Multigraf	Sebuah **multigraf** serupa dengan graf, tetapi dapat memuat beberapa sisi di antara dua simpul serta gelang satu sisi (yaitu sisi dari suatu simpul ke dirinya sendiri).

Lintasan Sebuah **lintasan** adalah perjalanan yang tidak mengulangi simpul (atau sisi) apa pun, kecuali mungkin simpul pertama dan terakhir. Jika suatu lintasan berawal dan berakhir pada simpul yang sama, lintasan itu disebut **siklus**.

Planar Graf yang dapat digambar (pada bidang) tanpa ada sisi yang berpotongan.

Subgraf Kita mengatakan bahwa H merupakan **subgraf** dari G jika setiap simpul dan sisi H juga merupakan simpul atau sisi G. Kita mengatakan H merupakan subgraf **terinduksi** dari G jika setiap simpul H merupakan simpul G dan setiap pasangan simpul di H bertetangga di H jika dan hanya jika keduanya bertetangga di G .

Pohon Graf terhubung tanpa siklus. (Jika kita menghilangkan syarat bahwa graf harus terhubung, graf tersebut disebut **hutan**.) Simpul-simpul dalam pohon yang berderajat 1 disebut **daun**.

Pewarnaan simpul Pemberian warna kepada setiap simpul suatu graf. Pewarnaan simpul disebut **tepat** jika simpul-simpul yang bertetangga selalu diberi warna berbeda.

Perjalanan Barisan simpul sedemikian sehingga simpul-simpul yang berurutan (dalam barisan) bertetangga (dalam graf). Perjalanan yang tidak mengulangi sisi disebut **jejak**, dan jejak yang tidak mengulangi simpul (kecuali mungkin simpul pertama dan terakhir) disebut **lintasan**.

2.1.3 Pertanyaan Bacaan

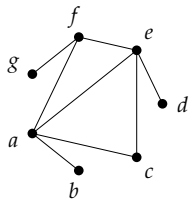
1. Adakah lebih dari satu graf dengan lima simpul dan enam sisi? Jelaskan apa sebenarnya arti pertanyaan ini dan bagaimana Anda akan menjawabnya.

2. Jika suatu graf memiliki 10 simpul yang masing-masing berderajat 4, berapa banyak sisi yang dimilikinya?

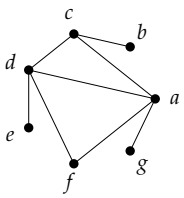
3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu lebih lanjut.

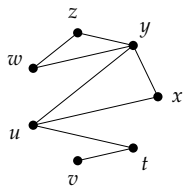
2.1.4 Soal Latihan

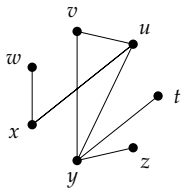
1. Perhatikan graf G di bawah ini.



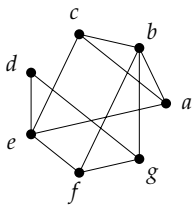
Manakah di antara graf-graf berikut yang isomorfik dengan G? Pilih semua jawaban yang berlaku.

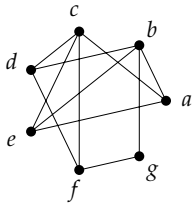
(a) 

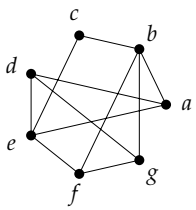
(b) 

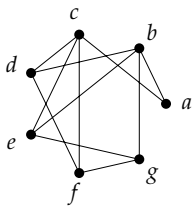
(c) 

2. Manakah di antara graf-graf berikut yang saling isomorfik?

(a) 

(c) 

(b) 

(d) 

3. Graf G_1 memiliki 8 simpul yang semuanya berderajat 6. Berapa banyak sisi yang dimiliki G_1?

Graf G_2 memiliki 7 simpul yang semuanya berderajat k, serta 7 sisi. Berapakah k?

Semua simpul pada graf G_3 berderajat 4, dan graf tersebut memiliki 16 sisi. Berapa banyak simpul yang dimiliki G_3?

4. Misalkan suatu graf memiliki barisan derajat $(8, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 3)$. Berapa banyak sisi yang harus dimiliki graf tersebut?

5.

(a) Berapakah nilai n terbesar sedemikian sehingga P_n merupakan subgraf dari K_5?

(b) Berapakah nilai n terbesar sedemikian sehingga C_n merupakan subgraf dari K_5?

(c) Berapakah nilai n terbesar sedemikian sehingga P_n merupakan subgraf *terinduksi* dari K_5?

(d) Berapakah nilai n terbesar sedemikian sehingga C_n merupakan subgraf *terinduksi* dari K_5?

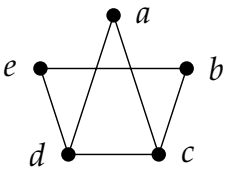
2.1.5 Latihan Tambahan

1. Jika 10 orang masing-masing berjabat tangan dengan setiap orang lainnya, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? Apa kaitan pertanyaan ini dengan teori graf?

2. Dalam sekelompok 5 orang, mungkinkah setiap orang berteman dengan tepat 2 orang lain dalam kelompok tersebut? Bagaimana jika tepat 3 orang?

3. Mungkinkah dua graf yang *berbeda* (tidak isomorfik) memiliki jumlah simpul dan jumlah sisi yang sama? Bagaimana jika derajat simpul-simpul pada kedua graf juga sama (misalnya, kedua graf memiliki simpul-simpul berderajat 1, 2, 2, 3, dan 4)? Gambarkan dua graf semacam itu atau jelaskan mengapa tidak mungkin.

4. Apakah kedua graf di bawah ini sama? Apakah keduanya isomorfik? Jika isomorfik, berikan isomorfismenya. Jika tidak, jelaskan.
Graf 1: $V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}\}$.
Graf 2:



5. Perhatikan kedua graf berikut:

$$
\begin{aligned}
G_1 \quad & V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\} \\
& E_1 = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \\
& \quad \{b, f\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}\}. \\
G_2 \quad & V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \\
& E_2 = \{\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_7\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \\
& \quad \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_7\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}\}.
\end{aligned}
$$

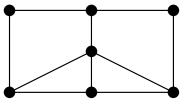
(a) Misalkan $f : G_1 \to G_2$ adalah fungsi yang memetakan simpul-simpul graf 1 ke simpul-simpul graf 2. Fungsi tersebut diberikan oleh tabel berikut:

x	a	b	c	d	e	f	g
$f(x)$	v_4	v_5	v_1	v_6	v_2	v_3	v_7

Apakah f mendefinisikan suatu isomorfisme antara graf 1 dan graf 2?

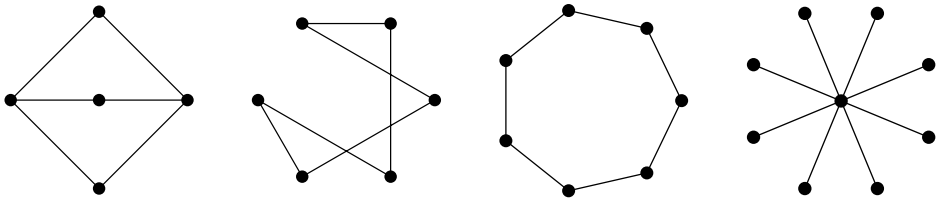
(b) Definisikan fungsi baru g (dengan $g \neq f$) yang mendefinisikan suatu isomorfisme antara graf 1 dan graf 2.

(c) Apakah graf yang digambarkan di bawah ini isomorfik dengan graf 1 dan graf 2? Jelaskan.



6. Berapa jumlah sisi terbesar yang mungkin pada graf dengan 10 simpul? Berapa jumlah sisi terbesar yang mungkin pada graf *bipartit* dengan 10 simpul? Berapa jumlah sisi terbesar yang mungkin pada *pohon* dengan 10 simpul?

7. Manakah di antara graf di bawah ini yang bipartit? Jelaskan alasan jawaban Anda.



8. Untuk nilai $n \geq 3$ manakah graf C_n bipartit?

9. Untuk setiap kasus berikut, berikan dua graf tak berlabel yang *berbeda* dengan sifat-sifat yang diberikan, atau jelaskan mengapa hal tersebut mustahil.

(a) Dua pohon berbeda dengan jumlah simpul dan jumlah sisi yang sama. Pohon adalah graf terhubung yang tidak memiliki siklus.

(b) Dua graf berbeda dengan 8 simpul yang semuanya berderajat 2.

(c) Dua graf berbeda dengan 5 simpul yang semuanya berderajat 4.

(d) Dua graf berbeda dengan 5 simpul yang semuanya berderajat 3.

10. Tentukan apakah pernyataan-pernyataan tentang subgraf di bawah ini benar atau salah. Untuk pernyataan yang benar, jelaskan alasannya secara singkat (1 atau 2 kalimat). Untuk setiap pernyataan yang salah, berikan contoh penyangkal.

(a) Setiap subgraf dari graf lengkap juga lengkap.

(b) Setiap subgraf *terinduksi* dari graf lengkap juga lengkap.

(c) Setiap subgraf dari graf bipartit juga bipartit.

(d) Setiap subgraf dari pohon juga merupakan pohon.

11. Kita sering mendefinisikan konsep-konsep teori graf menggunakan teori himpunan. Sebagai contoh, untuk graf $G = (V, E)$ dan simpul $v \in V$, kita mendefinisikan

$$N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}.$$

Kita mendefinisikan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Tujuan soal ini adalah memahami makna semua definisi tersebut.

(a) Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E yang diberikan oleh

$$V = \{a, b, c, d, e, f\},\ E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}.$$

Tentukan $N(a)$, $N[a]$, $N(c)$, dan $N[c]$.

(b) Berapakah nilai terbesar dan terkecil yang mungkin bagi $|N(v)|$ dan $|N[v]|$ (ukuran himpunan-himpunan tersebut) untuk graf pada bagian (a)? Jelaskan.

(c) Berikan contoh graf $G = (V, E)$ (kemungkinan berbeda dari graf di atas) yang memenuhi $N[v] = V$ untuk suatu simpul $v \in V$. Adakah graf yang memenuhi $N[v] = V$ untuk *setiap* $v \in V$? Jelaskan.

(d) Berikan contoh graf $G = (V, E)$ yang memenuhi $N(v) = \emptyset$ untuk suatu $v \in V$. Adakah contoh graf semacam itu yang juga memenuhi $N[u] = V$ untuk suatu simpul lain $u \in V$? Jelaskan.

(e) Jelaskan dengan kata-kata makna umum $N(v)$ dan $N[v]$.

12. Graf merupakan salah satu cara untuk merepresentasikan relasi di antara elemen-elemen suatu himpunan: sisi di antara simpul x dan y menunjukkan bahwa x berelasi dengan y (yang dapat ditulis sebagai $x \sim y$). Namun, tidak semua jenis relasi dapat direpresentasikan oleh graf. Untuk setiap relasi yang dijelaskan di bawah ini, gambarkan grafnya atau jelaskan mengapa relasi tersebut tidak dapat direpresentasikan oleh graf.

(a) Himpunan $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ dan relasi $x \sim y$ ketika $x - y$ merupakan kelipatan 3 yang tidak nol.

(b) Himpunan $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ dan relasi $x \sim y$ ketika y merupakan kelipatan x.

(c) Himpunan $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ dan relasi $x \sim y$ ketika $0 < |x - y| < 3$.

13. Perhatikan graf-graf dengan n simpul. Ingatlah bahwa graf tidak harus *terhubung*.

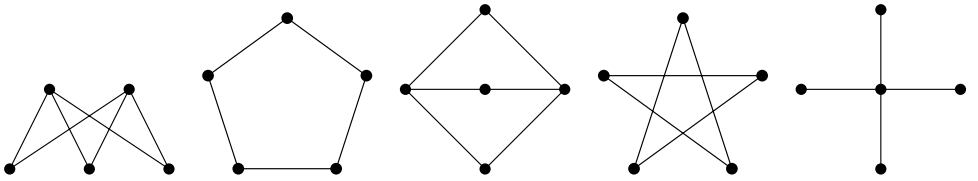
(a) Berapa banyak sisi yang harus dimiliki graf untuk menjamin bahwa sedikitnya satu simpul berderajat dua atau lebih? Buktikan jawaban Anda.

(b) Berapa banyak sisi yang harus dimiliki graf untuk menjamin bahwa semua simpul berderajat dua atau lebih? Buktikan jawaban Anda.

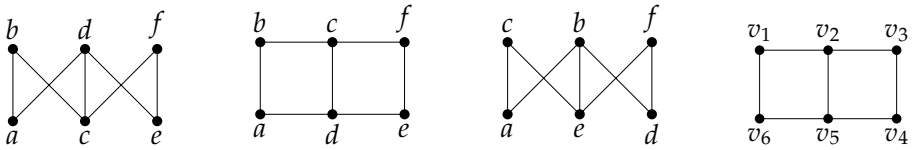
14. Buktikan bahwa setiap graf dengan sedikitnya dua simpul pasti memiliki dua simpul dengan derajat yang sama.

15. Misalkan G adalah graf terhubung dengan $n > 1$ simpul dan $n-1$ sisi. Buktikan bahwa G memiliki simpul berderajat 1.

16. Manakah (jika ada) di antara graf-graf di bawah ini yang sama?



Graf-graf di atas tidak berlabel. Biasanya kita memandang graf sebagai objek yang memiliki himpunan simpul tertentu. Manakah (jika ada) di antara graf-graf di bawah ini yang sama?



Sebenarnya, semua graf di atas hanyalah *gambar* graf. Graf sesungguhnya merupakan objek matematika abstrak yang terdiri atas dua himpunan V dan E, dengan E sebagai himpunan yang elemen-elemennya merupakan himpunan bagian beranggota 2 dari V. Apakah graf-graf di bawah ini sama atau berbeda?

Graf 1: $V = \{a, b, c, d, e\}$,
$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$.

Graf 2: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
$E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.

2.2 Pohon

Tujuan Pembelajaran

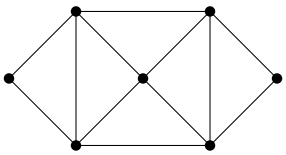
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Membuktikan fakta-fakta dasar tentang pohon.
2. Menggunakan teorema tentang pohon untuk menyelesaikan masalah.
3. Mengidentifikasi dan membangun pohon merentang.

2.2.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Perhatikan graf yang digambar di bawah ini.



1. Temukan subgraf dengan jumlah sisi paling sedikit yang tetap terhubung dan memuat semua simpul.
2. Temukan subgraf dengan jumlah sisi paling banyak yang tidak memuat siklus.
3. Apa yang Anda perhatikan mengenai jumlah sisi pada contoh-contoh di atas? Apakah hal ini hanya kebetulan?

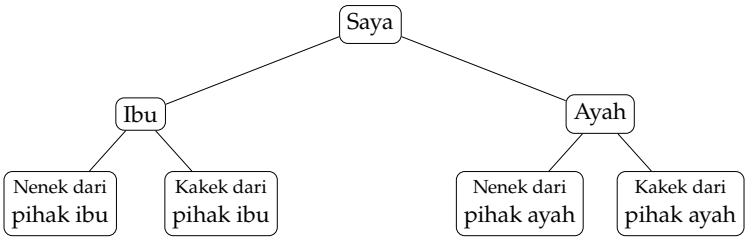
Salah satu pendekatan yang sangat berguna dan lazim dalam mempelajari teori graf adalah membatasi perhatian pada jenis graf tertentu. Sebagai contoh, Anda dapat mencoba memahami secara mendalam hanya graf lengkap atau hanya graf bipartit, alih-alih mencoba memahami semua graf sekaligus. Itulah yang akan kita lakukan sekarang, dengan mempelajari *pohon*. Pada akhir bagian ini, semoga kita memahami kelas graf ini dengan lebih baik dan mengetahui mengapa pohon cukup penting untuk dibahas dalam bagian tersendiri.

Definisi 2.2.1 Pohon dan Hutan.

Pohon adalah graf terhubung yang tidak memuat siklus.[4]

Hutan adalah graf yang tidak memuat siklus. Perhatikan bahwa hutan yang terhubung merupakan pohon.

Apakah definisi di atas sesuai dengan intuisi Anda mengenai graf yang layak disebut pohon? Cobalah memikirkan beberapa contoh pohon dan pastikan semuanya memenuhi definisi tersebut. Perlu diingat bahwa meskipun pohon yang kita pelajari dalam teori graf berkaitan dengan pohon yang mungkin Anda jumpai dalam bidang lain, kesesuaiannya tidak selalu tepat. Sebagai contoh, dalam antropologi, Anda mungkin mempelajari silsilah keluarga seperti berikut,



Sejauh ini tidak ada masalah, tetapi walaupun kakek dan nenek Anda (mungkin) tidak memiliki hubungan darah, jika ditelusuri cukup jauh ke masa lampau, kemungkinan besar mereka memiliki *suatu* leluhur bersama. Jika pohon tersebut ditelusuri dari Anda menuju leluhur bersama itu, lalu turun melalui kakek atau nenek Anda yang lain, akan terbentuk siklus sehingga graf tersebut bukan lagi pohon.

Anda mungkin juga pernah menjumpai sesuatu yang disebut *pohon keputusan* (misalnya algoritma untuk menentukan apakah suatu deret konvergen atau divergen). Pohon semacam ini pun terkadang memuat siklus, karena keputusan pada satu simpul dapat membawa Anda kembali ke langkah sebelumnya.

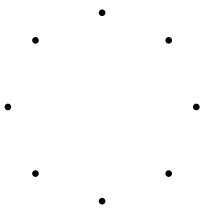
Kedua contoh pohon di atas juga memiliki ciri lain yang patut disebutkan: simpul-simpul pada pohon memiliki urutan yang jelas. Definisi pohon tidak mencakup struktur tambahan ini, tetapi kita dapat memberlakukannya dengan meninjau **pohon berakar**, yaitu pohon dengan satu simpul yang ditetapkan sebagai *akar*. Kita akan membahas pohon semacam ini secara lebih terperinci nanti dalam bagian ini.

Dalam bagian ini, kita akan menyelidiki beberapa sifat dasar pohon, yang menjadi pengantar yang sangat baik untuk menulis pembuktian tentang graf. Kita juga akan meninjau jenis pohon khusus yang disebut **pohon merentang**, yaitu pohon yang memuat semua simpul suatu graf terhubung. Terakhir, kita akan meninjau pohon berakar secara singkat.

[4]Definisi ini kadang dinyatakan sebagai "pohon adalah graf terhubung yang asiklik;" kata "asiklik" hanyalah istilah lain untuk "tidak memuat siklus."

Kegiatan Pratinjau

1. Ambillah selembar kertas dan gambarlah 8 simpul yang tersusun melingkar.



Kita akan menambahkan sisi-sisi pada graf ini sesuai beberapa persyaratan.

(a) Pertama, tambahkan sesedikit mungkin sisi agar graf yang dihasilkan terhubung. Artinya, harus terdapat lintasan di antara setiap pasangan simpul (tentu saja sebuah lintasan dapat menggunakan lebih dari satu sisi).

Berapa banyak sisi pada graf yang Anda gambar?

(b) Apakah graf yang Anda peroleh merupakan pohon?

(c) Sekarang mulailah kembali dengan graf kosong. Kali ini, tambahkan sebanyak mungkin sisi dengan syarat graf yang dihasilkan tidak memuat siklus.

Berapa banyak sisi pada graf yang Anda gambar?

(d) Apakah graf yang Anda peroleh merupakan pohon?

2.2.2 Sifat-Sifat Pohon

Kita ingin benar-benar memahami pohon. Artinya, kita perlu menemukan sifat-sifat pohon: apa yang membuatnya khusus dan hal khusus apa yang dimilikinya.

Pohon adalah graf terhubung tanpa siklus. Adakah hal lain yang dapat kita katakan? Akan berguna jika terdapat syarat lain yang ekuivalen bagi suatu graf untuk menjadi pohon. Dengan kata lain, kita ingin mengetahui apakah ada sifat teoretis graf yang dimiliki semua pohon, dan mungkin bahkan *hanya* dimiliki pohon.

Untuk memperoleh gambaran tentang hal-hal yang dapat kita nyatakan, kita akan meninjau tiga *proposisi* tentang pohon. Proposisi-proposisi ini juga menggambarkan teknik pembuktian penting yang berlaku bagi graf secara umum, tetapi kebetulan sedikit lebih mudah diterapkan pada pohon.

Proposisi pertama memberikan definisi alternatif bagi pohon. Artinya, proposisi ini memberikan syarat perlu dan cukup agar suatu graf merupakan pohon.

Proposisi 2.2.2

Graf T merupakan pohon jika dan hanya jika terdapat lintasan tunggal di antara setiap pasangan simpul berbeda pada T.

Bukti. Ini merupakan pernyataan "jika dan hanya jika", sehingga kita harus membuktikan dua implikasi. Kita mulai dengan membuktikan bahwa jika T merupakan pohon, maka terdapat lintasan tunggal di antara setiap pasangan simpul berbeda.

Asumsikan T merupakan pohon, dan misalkan u serta v merupakan simpul yang berbeda (jika T hanya memiliki satu simpul, kesimpulannya terpenuhi secara otomatis). Untuk menunjukkan bahwa terdapat lintasan tunggal di antara u dan v, kita harus menunjukkan dua hal: terdapat suatu lintasan, dan tidak terdapat lebih dari satu lintasan. Hal pertama berlaku secara langsung; karena T merupakan pohon, pohon tersebut terhubung, sehingga terdapat lintasan di antara setiap pasangan simpul.

Untuk menunjukkan bahwa lintasan tersebut tunggal, andaikan terdapat dua lintasan di antara u dan v, lalu kita peroleh kontradiksi. Kedua lintasan mungkin berawal dengan cara yang sama, tetapi karena keduanya berbeda, terdapat simpul pertama u' yang setelahnya kedua lintasan berpisah. Namun, karena kedua lintasan berakhir di v, terdapat simpul pertama setelah u' yang kembali dimiliki keduanya; sebut simpul itu v'. Sekarang tinjau kedua lintasan dari u' ke v'. Jika digabungkan, keduanya membentuk siklus, yang bertentangan dengan asumsi bahwa T merupakan pohon.

Sekarang kita meninjau konversnya: Jika terdapat lintasan tunggal di antara setiap pasangan simpul berbeda pada T, maka T merupakan pohon. Jadi, asumsikan hipotesis berikut: Terdapat lintasan tunggal di antara setiap pasangan simpul berbeda pada T. Untuk membuktikan bahwa T merupakan pohon, kita harus menunjukkan bahwa pohon tersebut terhubung dan tidak memuat siklus.

Bagian pertama mudah: T terhubung karena terdapat lintasan di antara setiap pasangan simpul. Untuk menunjukkan bahwa T tidak memiliki siklus, demi memperoleh kontradiksi kita asumsikan bahwa graf tersebut memiliki suatu siklus. Misalkan u dan v merupakan dua simpul berbeda pada suatu siklus dari T. Karena kita dapat berpindah dari u ke v dengan mengikuti siklus searah atau berlawanan arah jarum jam, terdapat dua lintasan dari u ke v, yang bertentangan dengan asumsi kita.

Kita telah membuktikan kedua arah, sehingga pembuktian selesai.

Bacalah pembuktian di atas dengan sangat cermat. Perhatikan bahwa kedua arahnya memiliki dua bagian: keberadaan lintasan dan ketunggalan lintasan (yang berkaitan dengan tidak adanya siklus). Dalam kasus ini, kedua bagian tersebut benar-benar terpisah. Bahkan, jika kita hanya meninjau graf tanpa siklus (hutan), kita tetap dapat menjalankan bagian pembuktian yang membahas ketunggalan lintasan di antara simpul-simpul, meskipun lintasan di antara simpul-simpul tersebut mungkin *tidak ada*.

Pengamatan ini memungkinkan kita menyatakan *korolari* berikut.[5]

[5]Korolari merupakan jenis pernyataan yang dapat dibuktikan, seperti proposisi atau teorema, tetapi mengikuti secara langsung dari pernyataan lain yang telah ditetapkan atau dari pembuktiannya.

Akibat 2.2.3

Graf F merupakan hutan jika dan hanya jika terdapat paling banyak satu lintasan di antara setiap pasangan simpul pada F.

Kita tidak memberikan pembuktian korolari ini (bagaimanapun juga, korolari tersebut seharusnya mengikuti langsung dari proposisi), tetapi sebagai latihan, Anda diminta memberikan pembuktian yang cermat dalam bagian latihan. Ketika melakukannya, cobalah menggunakan pembuktian melalui kontraposisi alih-alih pembuktian dengan kontradiksi.

Proposisi kedua memberi tahu kita bahwa semua pohon memiliki **daun**: simpul berderajat satu.

Proposisi 2.2.4

Setiap pohon dengan sedikitnya dua simpul memiliki sedikitnya dua simpul berderajat satu.

Bukti. Kita memberikan pembuktian dengan kontradiksi. Misalkan T merupakan pohon dengan sedikitnya dua simpul, dan andaikan, bertentangan dengan pernyataan yang hendak dibuktikan, bahwa tidak terdapat dua simpul berderajat satu.

Misalkan P merupakan lintasan terpanjang yang mungkin dalam T. Misalkan u dan v merupakan kedua ujung lintasan tersebut. Karena T tidak memiliki dua simpul berderajat satu, sedikitnya salah satu dari kedua ujung ini harus berderajat dua atau lebih. Misalkan simpul tersebut adalah u. Kita mengetahui bahwa u bertetangga dengan suatu simpul pada lintasan P, tetapi simpul itu juga harus bertetangga dengan simpul lain; sebut simpul tersebut u'.

Di manakah u'? Simpul tersebut tidak mungkin merupakan simpul pada P, sebab jika demikian, akan terdapat dua lintasan berbeda dari u ke u': sisi di antara keduanya dan bagian awal P (hingga u'). Namun, u' juga tidak mungkin berada di luar P, sebab jika demikian, akan terdapat lintasan dari u' ke v yang lebih panjang daripada P, padahal lintasan semula memiliki panjang maksimum.

Kontradiksi ini membuktikan bahwa harus terdapat sedikitnya dua simpul berderajat satu. Bahkan, kita dapat mengatakan lebih banyak: u dan v *keduanya* harus berderajat satu.

Proposisi tersebut sangat berguna ketika membuktikan pernyataan tentang pohon, sebab pernyataan mengenai pohon sering kita buktikan dengan **induksi**. Teknik pembuktian ini akan kita pelajari secara menyeluruh dalam Subbab 4.5, tetapi untuk saat ini kita hanya perlu memahami bahwa membandingkan suatu pohon dengan pohon-pohon yang lebih kecil itu berguna. Untuk menunjukkan bahwa sesuatu berlaku bagi pohon dengan v simpul, kita akan mengasumsikan bahwa hal tersebut berlaku bagi semua pohon dengan $v - 1$ simpul. Dengan menghapus satu simpul berderajat 1, kita memperoleh pohon yang lebih kecil ini; selanjutnya kita hanya perlu menunjukkan bahwa mengembalikan simpul tersebut tidak merusak

sifat yang sedang dibuktikan.

Adakah pohon yang memiliki tepat 7 simpul dan 7 sisi? Cobalah menggambarnya. Mungkinkah pohon dengan 7 simpul hanya memiliki 5 sisi? Ada alasan kuat mengapa gambar-gambar tersebut tampaknya mustahil dibuat.

Proposisi 2.2.5

Misalkan T adalah pohon dengan v simpul dan e sisi. Maka $e = v - 1$.

Kita akan membuktikan bahwa proposisi ini benar untuk semua nilai yang mungkin dari $v \geq 1$. Perhatikan bahwa jika $v = 1$, pohon tersebut harus memiliki 0 sisi, sehingga memang $e = v - 1$. Selanjutnya kita dapat memeriksa pohon dengan $v = 2$ simpul (hanya ada satu, dan pohon itu memiliki $e = 1 = v - 1$ sisi), lalu semua pohon dengan $v = 3$ simpul, kemudian $v = 4$, dan seterusnya. Namun, cara itu tidak akan pernah selesai. Benar-benar tidak pernah!

Sebagai gantinya, kita akan menggunakan suatu bentuk *pembuktian dengan kontradiksi* yang disebut metode **penjahat minimal**. Kita akan mengasumsikan bahwa proposisi tersebut tidak benar (seperti ketika memulai pembuktian dengan kontradiksi pada umumnya). Artinya, ada suatu pohon *terkecil* yang tidak memenuhi proposisi tersebut. Jika contoh penyangkal terkecil ini (yakni, penjahat minimal) memiliki v simpul, kita memperoleh jaminan bahwa *semua* pohon dengan $v - 1$ simpul *bukan* contoh penyangkal. Mari kita lihat bagaimana gagasan ini bekerja.

Bukti. Untuk memperoleh kontradiksi, andaikan proposisi tersebut tidak benar bagi semua pohon. Misalkan T adalah pohon yang tidak memenuhi proposisi itu dan memiliki banyak simpul paling sedikit di antara semua contoh penyangkal. Misalkan v adalah banyak simpul pada T.

Karena satu-satunya pohon dengan satu simpul memiliki nol sisi, pohon tersebut tidak mungkin merupakan T. Jadi, kita dapat mengasumsikan $v \geq 2$. Secara khusus, dari Proposisi 2.2.4 kita mengetahui bahwa T harus memuat sedikitnya satu simpul berderajat 1; namakan simpul itu v_0.

Misalkan T' adalah pohon yang diperoleh dengan menghapus v_0 dari T (beserta sisi yang terkait dengannya). Karena yang kita hapus adalah sebuah daun, T' tetap merupakan pohon (lintasan unik di antara setiap pasangan simpul pada T' sama dengan lintasan unik di antara pasangan tersebut pada T).

Sekarang T' memiliki $v - 1$ simpul. Karena T merupakan pohon terkecil yang tidak memenuhi proposisi, kita mengetahui bahwa proposisi itu benar bagi T'. Jadi, banyak sisi pada T' harus satu lebih sedikit daripada banyak simpulnya; dengan kata lain, T' memiliki $v - 2$ sisi. Akan tetapi, T memiliki satu sisi lebih banyak daripada T', sehingga pohon tersebut memiliki $v - 1$ sisi. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa T tidak memenuhi proposisi dan dengan demikian menyelesaikan pembuktian kita.

2.2.3 Pohon Merentang

Salah satu kelebihan pohon ialah tersedianya beberapa cara sederhana untuk menelusuri simpul-simpulnya. Jika suatu graf terhubung bukan pohon, kita tetap dapat menggunakan algoritma penelusuran ini apabila kita menemukan sebuah subgraf yang *merupakan* pohon.

Pertama-tama, kita perlu memastikan bahwa gagasan ini masuk akal. Untuk sembarang graf terhubung G, apakah selalu ada subgraf yang merupakan pohon? Sebenarnya, pertanyaan itu terlalu mudah: kita dapat mengambil satu simpul saja dari G. Jika subgraf tersebut hendak kita gunakan sebagai panduan untuk mengunjungi semua simpul, kita memerlukan subgraf yang memuat seluruh simpul. Pohon seperti itu disebut **pohon merentang**.

Definisi 2.2.6

Untuk suatu graf terhubung G, **pohon merentang** dari G adalah subgraf dari G yang merupakan pohon dan memuat semua simpul G.

Ternyata setiap graf terhubung memiliki pohon merentang (dan biasanya memiliki banyak pohon merentang).

Teorema 2.2.7

Setiap graf terhubung memiliki pohon merentang.

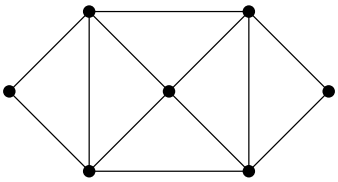
Bagaimana kita mengetahuinya? Kita dapat memberikan algoritma untuk

menemukan pohon merentang! Mulailah dengan graf terhubung G. Jika tidak terdapat siklus, G sudah merupakan pohon dan kita selesai. Jika terdapat siklus, misalkan e adalah sembarang sisi pada siklus tersebut dan tinjau graf baru $G_1 = G - e$ (yakni, graf yang diperoleh dengan menghapus e). Graf ini tetap terhubung: karena e merupakan bagian dari suatu siklus, terdapat sedikitnya dua lintasan di antara kedua simpul ujungnya. Sekarang ulangi proses tersebut. Jika G_1 tidak memiliki siklus, kita selesai; jika tidak, definisikan G_2 sebagai $G_1 - e_1$, dengan e_1 suatu sisi pada siklus di G_1. Teruskan proses ini. Proses tersebut pada akhirnya harus berhenti karena hanya ada berhingga banyak sisi yang dapat dihapus. Hasilnya merupakan pohon dan, karena tidak ada simpul yang pernah kita hapus, merupakan pohon *merentang*.

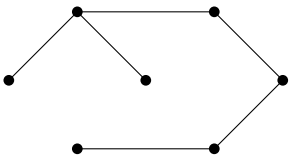
Ini bukan satu-satunya algoritma untuk menemukan pohon merentang. Kita juga dapat memulai dengan graf kosong, lalu menambahkan sisi-sisi milik G selama penambahan tersebut tidak membentuk siklus. Ada beberapa pilihan mengenai sisi mana yang ditambahkan terlebih dahulu: kita dapat selalu menambahkan sisi yang bertetangga dengan sisi-sisi yang telah ditambahkan (tentu saja setelah sisi pertama), atau menambahkannya menurut urutan lain. Pohon merentang yang akhirnya diperoleh bergantung pada pilihan-pilihan tersebut.

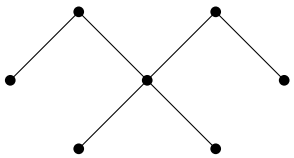
Contoh 2.2.8

Temukan dua pohon merentang yang berbeda dari graf berikut.



Penyelesaian. Berikut dua pohon merentangnya.





Meskipun tidak akan membahasnya secara terperinci, algoritma-algoritma ini biasanya diterapkan pada graf *berbobot*. Di sini setiap sisi diberi suatu bobot atau biaya. Tujuannya adalah menemukan pohon merentang dengan jumlah bobot sekecil mungkin. Pohon seperti itu disebut **pohon merentang minimum**. Pada dasarnya, pencarian pohon merentang minimum menggunakan algoritma yang sama dengan yang diuraikan di atas, tetapi ketika memilih sisi untuk ditambahkan, kita selalu memilih sisi dengan bobot terkecil (atau ketika menghapus sisi, kita

selalu menghapus sisi dengan bobot terbesar).[6]

2.2.4 Pohon Berakar

Sejauh ini, kita hanya memandang pohon sebagai suatu jenis graf. Akan tetapi, penambahan struktur tertentu pada pohon sering membantu kita memecahkan masalah. Data pun sering disusun seperti pohon. Sebagai contoh, buku ini memiliki struktur pohon: gambarlah satu simpul untuk buku itu sendiri. Kemudian gambarlah satu simpul untuk setiap bab, dan hubungkan setiap simpul tersebut dengan simpul buku. Di bawah setiap bab, gambarlah satu simpul untuk setiap subbab, lalu hubungkan simpul itu dengan bab yang memuatnya. Graf tersebut tidak memiliki siklus; graf itu merupakan pohon, tetapi pohon dengan hierarki yang jelas. Hierarki ini tidak akan ada jika kita tidak menetapkan "simpul buku" sebagai bagian "teratas".

Begitu salah satu simpul pada pohon ditetapkan sebagai **akar**, setiap simpul lain pada pohon tersebut dapat dicirikan berdasarkan posisinya terhadap akar. Hal ini dimungkinkan karena terdapat lintasan unik di antara setiap dua simpul pada pohon. Jadi, dari sembarang simpul, kita dapat kembali ke akar melalui tepat satu cara. Struktur ini juga memungkinkan kita menjelaskan hubungan di antara simpul-simpul yang berbeda pada pohon berakar.

Jika dua simpul bertetangga, salah satunya disebut **induk** dari simpul yang lain, sedangkan simpul yang lain disebut **anak** dari simpul induk tersebut. Di antara keduanya, simpul induk adalah simpul yang lebih dekat dengan akar. Jadi, akar suatu pohon merupakan simpul induk, tetapi bukan anak dari simpul mana pun (dan bersifat unik dalam hal ini: setiap simpul bukan-akar memiliki *tepat satu* induk).

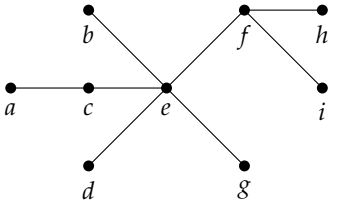
Tidak mengherankan bahwa anak dari anak suatu simpul disebut **cucu** dari simpul tersebut (dan simpul tersebut merupakan **kakek atau nenek** dari cucunya). Secara lebih umum, simpul v disebut **keturunan** dari simpul u apabila u terletak pada lintasan dari v menuju akar. Dalam hal ini, u disebut **leluhur** dari v.

Pada hampir semua pohon (tepatnya, pada semua pohon kecuali lintasan yang salah satu ujungnya dijadikan akar), akan terdapat pasangan simpul yang tidak satu pun merupakan keturunan dari yang lain. Kita dapat menganggapnya sebagai sepupu atau saudara. Tepatnya, simpul u dan v disebut **saudara** apabila keduanya memiliki induk yang sama. Perhatikan bahwa simpul-simpul saudara tidak pernah bertetangga (dapatkah Anda menjelaskan alasannya?).

Contoh 2.2.9

Perhatikan pohon berikut.

[6] Jika kita menambahkan sisi berbobot terkecil yang bertetangga dengan sisi-sisi yang telah ditambahkan, kita menjalankan *algoritma Prim*. Jika kita menambahkan sisi berbobot terkecil di seluruh graf, kita mengikuti *algoritma Kruskal*.



Jika simpul f kita tetapkan sebagai akar, maka e, h, dan i adalah anak-anak dari f dan saling bersaudara. Hal lain yang dapat kita katakan, antara lain, ialah bahwa a merupakan anak dari c dan keturunan dari f. Simpul g merupakan keturunan dari f; bahkan, simpul tersebut adalah cucu dari f. Simpul g dan d bersaudara karena keduanya memiliki induk yang sama, yaitu e.

Perhatikan bagaimana hubungan-hubungan ini berubah jika kita memilih simpul lain sebagai akar. Jika a merupakan akar, satu-satunya anaknya adalah c, yang juga hanya memiliki satu anak, yaitu e. Dengan demikian, f menjadi anak dari e (bukan sebaliknya), dan f merupakan keturunan dari a, bukan leluhurnya. Sekarang f dan g bersaudara.

Seluruh istilah kekerabatan ini membantu kita menjelaskan cara *menelusuri* sebuah pohon. Penelusuran pohon—mengunjungi setiap simpul menurut suatu urutan—merupakan langkah penting dalam banyak algoritma. Meskipun suatu pohon belum berakar, kita selalu dapat membentuk pohon berakar dengan memilih sembarang simpul sebagai akar. Contoh berikut menunjukkan manfaatnya.

Contoh 2.2.10

Jelaskan mengapa setiap pohon merupakan graf bipartit.

Penyelesaian. Untuk menunjukkan bahwa suatu graf bersifat bipartit, kita harus membagi simpul-simpulnya ke dalam dua himpunan, A dan B, sedemikian sehingga tidak ada dua simpul dalam himpunan yang sama yang bertetangga. Algoritma berikut melakukan tepat hal tersebut.

Tetapkan sembarang simpul sebagai akar dan masukkan simpul tersebut ke dalam himpunan A. Selanjutnya, masukkan semua anak dari akar ke dalam himpunan B. Tidak ada dua simpul anak ini yang bertetangga (mereka saling bersaudara), sehingga sejauh ini pembagian kita benar. Sekarang masukkan ke dalam A setiap anak dari setiap simpul dalam B (yakni, setiap cucu dari akar). Lanjutkan hingga semua simpul telah dimasukkan ke dalam salah satu himpunan, dengan bergantian antara A dan B pada setiap "generasi". Dengan kata lain, suatu simpul berada dalam himpunan B jika dan hanya jika simpul tersebut merupakan anak dari simpul dalam himpunan A.

Kunci pembagian pohon pada contoh tersebut adalah mengetahui simpul mana yang selanjutnya harus dimasukkan ke suatu himpunan. Kita memilih untuk

mengunjungi semua simpul pada generasi yang sama sebelum mengunjungi simpul mana pun pada generasi berikutnya. Cara ini biasanya disebut **pencarian melebar**. Istilah "pencarian" digunakan karena penelusuran pohon sering dilakukan untuk mencari simpul dengan sifat tertentu.

Sebaliknya, kita juga dapat membagi pohon menurut urutan yang berbeda. Mulailah dari akar dan masukkan akar ke dalam A. Kemudian cari salah satu anak akar untuk dimasukkan ke dalam B. Selanjutnya, cari satu anak dari simpul tersebut untuk dimasukkan ke dalam A, lalu cari anaknya untuk dimasukkan ke dalam B, dan seterusnya. Ketika kita mencapai simpul tanpa anak, mundurlah ke simpul induknya dan periksa apakah simpul induk tersebut memiliki anak lain. Jadi, kita bergerak menjauhi akar secepat mungkin, lalu menelusuri kembali lintasan hingga dapat bergerak maju lagi. Cara ini disebut **pencarian mendalam**.

Penjelasan algoritmis ini dapat berfungsi sebagai pembuktian bahwa setiap pohon bersifat bipartit, meskipun kita tetap harus membuktikan dengan teliti bahwa algoritmanya *benar*. Latihan-latihan akan meminta Anda menggunakan pendekatan lain, yaitu induksi, untuk membuktikan bahwa semua pohon bersifat bipartit.

2.2.5 Pertanyaan Bacaan

1. Misalkan T adalah pohon dengan 10 simpul. Manakah di antara pernyataan berikut yang harus benar mengenai T? Pilih semua jawaban yang berlaku.

A. T memiliki lintasan unik di antara setiap pasangan simpul.

B. Jika sembarang sisi dihapus dari T, graf yang dihasilkan menjadi tidak terhubung.

C. Jika sembarang sisi ditambahkan di antara dua simpul pada T yang sebelumnya tidak bertetangga, graf yang dihasilkan memiliki siklus.

D. T memiliki tepat dua simpul berderajat satu.

2. Jika suatu pohon memiliki 20 simpul, berapa banyak sisi yang dimilikinya?

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca subbab ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan mengenai isi subbab ini yang membuat Anda ingin tahu lebih jauh.

2.2.6 Soal Latihan

1. Apakah pernyataan-pernyataan berikut benar atau salah?

(a) Setiap pohon merupakan graf bipartit.

(b) Setiap graf bipartit merupakan pohon.

(c) Terdapat hutan yang memiliki lebih banyak sisi daripada simpul.

(d) Terdapat pohon dengan 6 simpul dan 6 sisi.

(e) Setiap pohon dengan 7 simpul memiliki banyak sisi yang sama.

2. Sebuah hutan memiliki 30 simpul dan 21 sisi. Berapa banyak komponen terhubung yang dimiliki graf tersebut?

3. Sebuah graf terhubung dengan 22 simpul memiliki 29 sisi. Tanpa mengetahui graf khusus yang dimaksud, berapakah jumlah sisi minimum dan maksimum yang dapat Anda hapus untuk memperoleh sebuah pohon merentang?
Jumlah sisi minimum yang harus dihapus: _____
Jumlah sisi maksimum yang harus dihapus: _____

4. Derajat rata-rata sebuah pohon adalah 1.992 (artinya, jika Anda menjumlahkan derajat semua simpul lalu membaginya dengan banyaknya simpul, hasilnya adalah 1.992).
Berapa banyak simpul yang dimiliki pohon tersebut?

5. Sebuah pohon memiliki sejumlah daun (simpul berderajat 1) dan empat simpul bukan daun. Derajat keempat simpul bukan daun tersebut adalah 8, 6, 5, dan 3. Berapa banyak daun yang dimiliki pohon tersebut?
Jumlah daun minimum yang mungkin: _____
Jumlah daun maksimum yang mungkin: _____

2.2.7 Latihan Tambahan

1. Manakah di antara graf-graf berikut yang merupakan pohon?

(a) $G = (V, E)$ dengan $V = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

(b) $G = (V, E)$ dengan $V = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

(c) $G = (V, E)$ dengan $V = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}\}$

(d) $G = (V, E)$ dengan $V = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d, e\}\}$

2. Untuk setiap barisan derajat di bawah ini, tentukan apakah barisan tersebut selalu merupakan, tidak mungkin merupakan, atau mungkin merupakan barisan derajat suatu pohon. Ingatlah bahwa barisan derajat mencantumkan derajat (banyaknya sisi yang berinsiden dengan simpul) dari semua simpul dalam graf menurut urutan tak naik.

(a) $(4, 1, 1, 1, 1)$

(b) $(3, 3, 2, 1, 1)$

(c) $(2, 2, 2, 1, 1)$

(d) $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

3. Untuk setiap barisan derajat di bawah ini, tentukan apakah barisan tersebut selalu merupakan, tidak mungkin merupakan, atau mungkin merupakan

barisan derajat suatu pohon. Berikan alasan bagi jawaban Anda.

(a) $(3, 3, 2, 2, 2)$

(b) $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$

(c) $(3, 3, 3, 1, 1, 1)$

(d) $(4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

4. Misalkan Anda memiliki graf dengan v simpul dan e sisi yang memenuhi $v = e + 1$. Apakah graf tersebut harus merupakan pohon? Buktikan jawaban Anda.

5. Buktikan bahwa sembarang graf (tidak harus berupa pohon) dengan v simpul dan e sisi yang memenuhi $v > e + 1$ TIDAK akan terhubung.

6. Jika graf G dengan v simpul dan e sisi terhubung serta memenuhi $v < e + 1$, apakah graf tersebut harus memuat siklus? Buktikan jawaban Anda.

7. Kita mendefinisikan **hutan** sebagai graf yang tidak memiliki siklus.

(a) Jelaskan mengapa istilah ini tepat. Artinya, jelaskan mengapa hutan merupakan gabungan dari pohon-pohon.

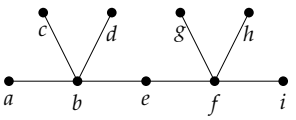
(b) Misalkan F adalah hutan yang terdiri atas m pohon dan v simpul. Berapa banyak sisi yang dimiliki F? Jelaskan.

(c) Buktikan bahwa sembarang graf G dengan v simpul dan e sisi yang memenuhi $v < e + 1$ harus memuat siklus (yaitu, bukan hutan).

8. Berikan bukti yang cermat untuk Akibat 2.2.3: Suatu graf merupakan hutan jika dan hanya jika terdapat paling banyak satu lintasan di antara setiap pasangan simpul. Gunakan bukti melalui kontraposisi (bukan bukti dengan kontradiksi) untuk kedua arah.

9. Berikan bukti *penjahat minimal* yang cermat bahwa setiap pohon bersifat bipartit.

10. Perhatikan pohon yang digambar di bawah ini.



(a) Misalkan kita menetapkan simpul e sebagai akar. Daftarkan anak, induk, dan saudara kandung dari setiap simpul. Apakah ada simpul selain e yang memiliki cucu?

(b) Misalkan *e tidak* dipilih sebagai akar. Apakah pemilihan simpul akar mengubah *banyaknya* anak yang dimiliki e? Bagaimana dengan banyaknya cucu? Berapa banyak masing-masing?

(c) Sebenarnya, pilihlah sembarang simpul pada pohon dan misalkan simpul tersebut bukan akar. Jelaskan mengapa banyaknya anak dari simpul

tersebut tidak bergantung pada simpul lain mana yang menjadi akar.

(d) Apakah hasil pada bagian sebelumnya berlaku bagi pohon lain? Berikan contoh pohon berbeda yang memenuhi hasil tersebut. Kemudian, buktikan bahwa hasil tersebut selalu berlaku atau berikan contoh pohon yang tidak memenuhinya.

11. Misalkan T adalah pohon berakar yang memuat simpul u, v, dan w (serta mungkin simpul-simpul lain). Buktikan bahwa jika w merupakan keturunan dari u dan v, maka u merupakan keturunan dari v atau v merupakan keturunan dari u.

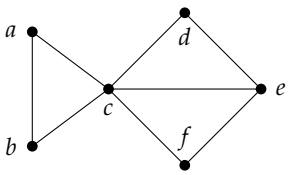
12. Kecuali jika sudah berupa pohon, suatu graf G akan memiliki beberapa pohon merentang. Seberapa mirip atau berbedakah pohon-pohon merentang tersebut?

(a) Apakah semua pohon merentang dari suatu graf harus saling isomorfik? Jelaskan alasannya atau berikan contoh penyangkal.

(b) Apakah semua pohon merentang dari suatu graf harus memiliki jumlah sisi yang sama? Jelaskan alasannya atau berikan contoh penyangkal.

(c) Apakah semua pohon merentang dari suatu graf harus memiliki jumlah daun (simpul berderajat 1) yang sama? Jelaskan alasannya atau berikan contoh penyangkal.

13. Carilah semua pohon merentang dari graf di bawah ini. Berapa banyak pohon merentang berbeda yang ada? Berapa banyak pohon merentang berbeda *hingga isomorfisme* (artinya, jika Anda mengelompokkan semua pohon merentang berdasarkan keisomorfikannya, berapa banyak kelompok yang diperoleh)?



14. Berikan contoh graf yang memiliki tepat 7 pohon merentang berbeda. Perhatikan bahwa beberapa atau semua pohon merentang tersebut boleh saling isomorfik.

15. Buktikan bahwa setiap graf terhubung yang bukan merupakan pohon harus memiliki setidaknya tiga pohon merentang berbeda (meskipun mungkin saling isomorfik).

16. Perhatikan sisi-sisi yang harus terdapat dalam setiap pohon merentang suatu graf. Apakah setiap graf harus memiliki sisi semacam itu? Berikan contoh graf yang memiliki tepat satu sisi semacam itu.

2.3 Graf Planar

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Membedakan graf planar dan graf nonplanar.
2. Menggunakan rumus Euler untuk membuktikan bahwa graf tertentu bersifat nonplanar.
3. Menerapkan rumus Euler pada polihedron.

2.3.1 Pratinjau Bagian

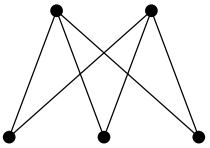
Selidiki!

Jika suatu graf terhubung dapat digambar tanpa ada sisi yang berpotongan, graf tersebut disebut **planar**. Ketika graf planar digambar dengan cara ini, graf tersebut membagi bidang menjadi wilayah-wilayah yang disebut **muka**.

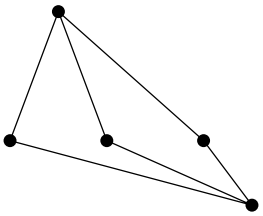
1. Jika mungkin, gambarkan dua graf planar berbeda dengan jumlah simpul, sisi, dan muka yang sama.
2. Jika mungkin, gambarkan dua graf planar berbeda dengan jumlah simpul dan sisi yang sama, tetapi jumlah muka yang berbeda.

Kapan suatu graf dapat digambar sehingga tidak ada sisi yang berpotongan? Jika hal ini *memang* mungkin, kita mengatakan bahwa graf tersebut **planar** (karena dapat digambar pada suatu *bidang*).

Perhatikan bahwa definisi planar memuat frasa "dapat digambar." Artinya, meskipun suatu graf tidak tampak planar, graf tersebut mungkin tetap planar. Barangkali graf itu dapat digambar ulang tanpa ada sisi yang berpotongan. Sebagai contoh, berikut adalah graf planar:



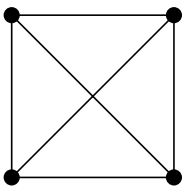
Alasannya, graf tersebut dapat digambar ulang seperti berikut:

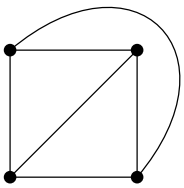


Kedua graf tersebut sama, sehingga jika salah satunya planar, yang lain juga harus planar. Namun, gambar awal graf tersebut bukan **representasi planar** dari graf itu.

Ketika graf planar digambar tanpa sisi yang berpotongan, sisi dan simpul graf membagi bidang menjadi sejumlah wilayah. Setiap wilayah ini kita sebut **muka**. Graf di atas memiliki 3 muka (ya, kita *juga* menghitung wilayah "luar" sebagai muka). Jumlah muka tidak berubah, bagaimanapun graf tersebut digambar (selama tidak ada sisinya yang berpotongan), sehingga wajar untuk menganggap jumlah muka sebagai sifat graf planar.

PERINGATAN: muka hanya dapat dihitung ketika graf digambar secara planar. Sebagai contoh, perhatikan dua representasi dari graf yang sama berikut:





Jika Anda mencoba menghitung muka menggunakan graf di sebelah kiri, Anda mungkin mengatakan bahwa terdapat 5 muka (termasuk muka luar). Namun, representasi planar graf tersebut menunjukkan bahwa sebenarnya hanya terdapat 4 muka.

Kegiatan Pratinjau

1.

(a) Gambarkan graf planar terhubung dengan 5 simpul dan 5 sisi. Berapa banyak muka (termasuk muka "luar") yang dimiliki graf Anda?

(b) Sekarang tambahkan satu sisi pada graf Anda di antara dua simpul yang belum bertetangga. Dengan mengasumsikan graf yang dihasilkan tetap planar, tuliskan jumlah simpul, sisi, dan muka yang sekarang dimilikinya.

(c) Sekarang tambahkan satu sisi lagi pada graf, kali ini menuju simpul baru. Dengan mengasumsikan graf yang dihasilkan tetap planar, tuliskan jumlah simpul, sisi, dan muka yang sekarang dimilikinya.

2. Sekarang gambarkan sedikitnya tiga graf planar terhubung lainnya, masing-masing dengan sedikitnya enam simpul. Hitung jumlah simpul v, sisi e, dan muka f untuk setiap graf, lalu catat data Anda pada tabel di bawah ini.

v	e	f

3. Apakah Anda melihat suatu pola? Apa yang terjadi pada bilangan-bilangan tersebut jika Anda menambahkan sisi di antara dua simpul yang tidak bertetangga? Apa yang terjadi jika Anda menambahkan simpul baru dan menghubungkannya ke simpul yang sudah ada?

Buatlah konjektur berupa ekspresi yang melibatkan jumlah simpul v, jumlah sisi e, dan jumlah muka f yang tetap konstan untuk semua graf planar terhubung. Berapakah konstanta tersebut?

Petunjuk. Anda mungkin mengajukan konjektur berupa ekspresi seperti $\frac{v+e}{f}$. Namun, ekspresi ini tidak tepat karena terdapat graf planar yang menghasilkan $\frac{5+5}{2} = 5$ dan graf planar lain yang menghasilkan $\frac{6+7}{3} \neq 5$.

Jenis ekspresi apa yang tetap konstan jika v dan e sama-sama bertambah 1? Dan juga tetap konstan jika e dan f sama-sama bertambah 1?

4. Kubus tersusun atas enam persegi, yang masing-masing berbagi sisi dengan setiap persegi tetangganya. Setiap simpul kubus mempertemukan tiga persegi.

(a) Berapa banyak simpul, sisi, dan muka yang dimiliki kubus?

(b) Apakah hasil ini sesuai dengan hubungan yang Anda konjekturkan di atas?

2.3.2 Rumus Euler untuk Graf Planar

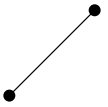
Terdapat hubungan antara jumlah simpul (v), jumlah sisi (e), dan jumlah muka (f) pada setiap graf planar terhubung. Hubungan ini disebut rumus Euler.

Rumus Euler untuk Graf Planar.

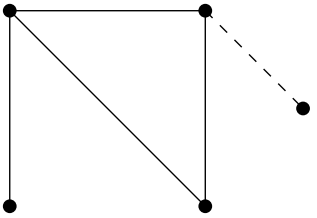
Untuk setiap graf planar terhubung dengan v simpul, e sisi, dan f muka, berlaku

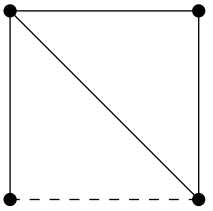
$$v - e + f = 2.$$

Mengapa rumus Euler benar? Salah satu cara untuk meyakinkan diri akan kesahihannya adalah menggambar graf planar selangkah demi selangkah. Mulailah dengan graf P_2:



Setiap graf terhubung (selain satu simpul terisolasi saja) pasti memuat subgraf ini. Sekarang kita membangun graf dengan menambahkan sisi dan simpul. Setiap langkah berupa penambahan simpul baru yang dihubungkan oleh sisi baru ke suatu bagian graf (sehingga membentuk "duri" baru) atau penghubungan dua simpul yang sudah ada pada graf dengan sisi baru (melengkapi suatu siklus).





Apa akibat dari "langkah-langkah" ini? Ketika duri ditambahkan, jumlah sisi bertambah 1, jumlah simpul bertambah 1, dan jumlah muka tetap sama. Artinya, $v - e + f$ tidak berubah. Melengkapi suatu siklus menambahkan satu sisi, menambahkan satu muka, dan mempertahankan jumlah simpul. Jadi, sekali lagi, $v - e + f$ tidak berubah.

Karena kita dapat membangun graf apa pun dengan menggabungkan kedua langkah ini, dan langkah-langkah tersebut tidak pernah mengubah nilai $v - e + f$, nilai itu akan sama untuk semua graf. Namun, perhatikan bahwa graf awal P_2 memiliki $v = 2$, $e = 1$, dan $f = 1$, sehingga $v - e + f = 2$.

Argumen yang diuraikan di atas belum sepenuhnya tepat karena kita membuat asumsi tanpa pembenaran bahwa semua graf dapat dibangun dari P_2 hanya dengan kedua langkah tersebut. Untuk menghindari masalah ini, kita dapat menggunakan argumen penyangkal minimal. Anda diminta melakukannya dalam latihan, tetapi gagasannya pada dasarnya sama dengan yang dibahas di sini. Kita mulai dengan graf planar terhubung minimal yang tidak memenuhi rumus, lalu *menghapus* suatu sisi atau suatu simpul (beserta sisinya) untuk memperoleh graf planar terhubung yang lebih kecil dan memenuhi rumus. Sama seperti langkah penambahan yang dijelaskan di atas, penghapusan sisi atau simpul tidak mengubah nilai $v - e + f$.

2.3.3 Graf Nonplanar

Selidiki!

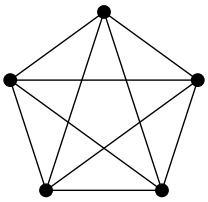
Untuk graf lengkap K_n, kita ingin mengetahui jumlah simpul, sisi, dan (jika grafnya planar) muka. Pertama, perhatikan K_3:

1. Berapa banyak simpul yang dimiliki K_3? Berapa banyak sisinya?
2. Jika K_3 planar, berapa banyak muka yang seharusnya dimilikinya?

Ulangi bagian (1) dan (2) untuk K_4, K_5, dan K_{23}.

Bagaimana dengan graf bipartit lengkap? Berapa banyak simpul, sisi, dan muka (jika graf tersebut planar) yang dimiliki $K_{7,4}$? Untuk nilai m dan n manakah K_n dan $K_{m,n}$ planar?

Tidak semua graf bersifat planar. Jika terdapat terlalu banyak sisi dan terlalu sedikit simpul, beberapa sisi harus berpotongan. Graf terkecil yang mengalami hal ini adalah K_5.



Jika Anda mencoba menggambar ulang graf ini tanpa sisi yang berpotongan, kesulitan segera muncul. Tampaknya terdapat satu sisi terlalu banyak. Bahkan, kita dapat membuktikan bahwa bagaimanapun graf tersebut digambar, K_5 akan selalu memiliki sisi yang berpotongan.

Teorema 2.3.1

K_5 tidak planar.

Bukti. Pembuktian dilakukan dengan kontradiksi. Jadi, asumsikan bahwa K_5 planar. Graf tersebut harus memenuhi rumus Euler untuk graf planar. K_5 memiliki 5 simpul dan 10 sisi, sehingga diperoleh

$$5 - 10 + f = 2,$$

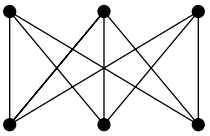
yang menyatakan bahwa jika graf digambar tanpa sisi yang berpotongan, akan terdapat $f = 7$ muka.

Sekarang perhatikan banyaknya sisi yang mengelilingi setiap muka. Setiap muka harus dikelilingi oleh sedikitnya 3 sisi. Misalkan B adalah jumlah seluruh *batas* di sekeliling semua muka pada graf. Dengan demikian, $3f \leq B$. Selain itu, $B = 2e$ karena setiap sisi digunakan sebagai batas tepat dua kali. Dengan menggabungkan keduanya, diperoleh

$$3f \leq 2e.$$

Namun, hal ini mustahil karena telah ditentukan bahwa $f = 7$ dan $e = 10$, sedangkan $21 \not\leq 20$. Ini merupakan kontradiksi, sehingga K_5 sebenarnya tidak planar.

Graf paling sederhana lainnya yang tidak planar adalah $K_{3,3}$



Pembuktian bahwa $K_{3,3}$ tidak planar menjawab teka-teki klasik rumah dan layanan utilitas: tidak mungkin menghubungkan masing-masing dari tiga rumah ke masing-masing dari tiga layanan utilitas tanpa garis yang berpotongan.

Teorema 2.3.2

$K_{3,3}$ tidak planar.

Bukti. Sekali lagi, kita menggunakan pembuktian dengan kontradiksi. Andaikan $K_{3,3}$ planar. Berdasarkan rumus Euler, akan terdapat 5 muka karena $v = 6$, $e = 9$, dan $6 - 9 + f = 2$.

Berapa banyak batas yang mengelilingi kelima muka ini? Misalkan B adalah jumlah tersebut. Karena setiap sisi digunakan sebagai batas dua kali, berlaku $B = 2e$. Selain itu, $B \geq 4f$ karena setiap muka dikelilingi oleh 4 batas atau lebih. Hal ini benar karena $K_{3,3}$ bipartit, sehingga tidak memuat siklus dengan 3 sisi. Dengan demikian,

$$4f \leq 2e.$$

Namun, ini akan menyatakan bahwa $20 \leq 18$, yang jelas salah. Jadi, $K_{3,3}$ tidak planar.

Perhatikan persamaan dan perbedaan kedua pembuktian ini. Keduanya merupakan pembuktian dengan kontradiksi, dan keduanya diawali dengan penggunaan rumus Euler untuk memperoleh jumlah muka yang semestinya pada graf. Kemudian kita mencari hubungan antara jumlah muka dan jumlah sisi berdasarkan banyaknya sisi yang mengelilingi setiap muka. Inilah satu-satunya perbedaannya. Dalam pembuktian untuk K_5, diperoleh $3f \leq 2e$, sedangkan untuk $K_{3,3}$ diperoleh $4f \leq 2e$. Koefisien f merupakan kuncinya. Koefisien tersebut adalah jumlah sisi terkecil yang dapat mengelilingi suatu muka. Jika sejumlah sisi mengelilingi suatu muka, sisi-sisi tersebut membentuk siklus. Jadi, jumlah itu adalah panjang siklus terpendek pada graf.

Secara umum, misalkan g adalah panjang siklus terpendek pada suatu graf (g berasal dari istilah teknis bahasa Inggris *girth*) sehingga untuk setiap graf planar berlaku $gf \leq 2e$. Ketika pertidaksamaan ini tidak sesuai dengan rumus Euler, kita

mengetahui dengan pasti bahwa graf tersebut tidak mungkin planar.[7]

2.3.4 Polihedron

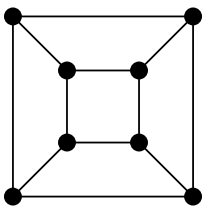
Selidiki!

Kubus merupakan contoh polihedron konveks. Kubus memiliki 6 persegi identik sebagai mukanya, 8 simpul, dan 12 sisi. Kubus merupakan **polihedron beraturan** (juga dikenal sebagai **bangun ruang Platonik**) karena setiap muka berupa poligon beraturan yang identik dan setiap simpul mempertemukan jumlah muka yang sama.

Terdapat tepat empat polihedron beraturan lainnya: tetrahedron, oktahedron, dodekahedron, dan ikosahedron, yang masing-masing memiliki 4, 8, 12, dan 20 muka. Berapa banyak simpul dan sisi yang dimiliki masing-masing polihedron tersebut?

Cabang matematika lain yang menggunakan istilah "simpul," "sisi," dan "muka" adalah geometri. **Polihedron** adalah bangun ruang geometris yang tersusun atas muka-muka poligonal datar yang bertemu pada sisi dan simpul. Kita terutama tertarik pada polihedron **konveks**, yaitu polihedron yang setiap ruas garis penghubung dua titik di bagian dalamnya seluruhnya terletak di dalam polihedron tersebut.[8]

Perhatikan bahwa karena $8 - 12 + 6 = 2$, simpul, sisi, dan muka kubus memenuhi rumus Euler untuk graf planar. Hal ini bukan suatu kebetulan. Kubus dapat direpresentasikan sebagai graf planar dengan memproyeksikan simpul dan sisinya ke bidang. Salah satu proyeksi tersebut tampak seperti berikut:



Bahkan, *setiap* polihedron konveks dapat diproyeksikan ke bidang tanpa sisi yang berpotongan. Bayangkan polihedron ditempatkan di dalam sebuah bola, dengan sumber cahaya di pusat bola. Sisi dan simpul polihedron membentuk bayangan pada permukaan bagian dalam bola. Kemudian, lubangi bola di tengah salah satu muka yang diproyeksikan dan "rentangkan" bola hingga terhampar rata pada bidang. Muka yang dilubangi menjadi muka "luar" pada graf planar.

[7] Perhatikan bahwa karena alasan teknis, panjang siklus terpendek pada graf tanpa siklus (hutan) didefinisikan sebagai tak hingga. Dalam kasus ini, $gf \leq 2e$ jelas tidak berlaku, meskipun semua pohon bersifat planar.

[8] Definisi alternatif untuk konveks adalah bahwa sudut dalam yang dibentuk oleh sembarang dua muka harus kurang dari 180 deg.

Intinya, pengetahuan kita tentang graf (khususnya graf planar) dapat diterapkan pada polihedron konveks. Karena setiap polihedron konveks dapat direpresentasikan sebagai graf planar, rumus Euler untuk graf planar juga berlaku bagi semua polihedron konveks. Kita juga dapat menerapkan jenis penalaran yang digunakan untuk graf dalam konteks lain pada polihedron konveks. Sebagai contoh, tidak ada polihedron konveks dengan 11 simpul yang semuanya berderajat 3 karena hal itu akan menghasilkan $33/2$ sisi.

Contoh 2.3.3

Adakah polihedron konveks yang terdiri atas tiga segitiga dan enam segilima? Bagaimana dengan polihedron yang terdiri atas tiga segitiga, enam segilima, dan lima segitujuh (poligon bersisi 7)?

Penyelesaian. Berapa banyak sisi yang akan dimiliki polihedron semacam itu? Untuk polihedron pertama yang diusulkan, segitiga-segitiganya menyumbangkan total 9 sisi, sedangkan segilima-segilimanya menyumbangkan 30 sisi. Namun, perhitungan ini menghitung setiap sisi dua kali (karena setiap sisi membatasi tepat dua muka), sehingga menghasilkan $39/2$ sisi, yang mustahil. Jadi, polihedron semacam itu tidak ada.

Polihedron kedua tidak menghadapi kendala ini. Tambahan 35 sisi yang disumbangkan oleh segitujuh menghasilkan total $74/2 = 37$ sisi. Sejauh ini tidak ada masalah. Sekarang, berapa banyak simpul yang dimiliki polihedron yang diandaikan tersebut? Kita dapat menggunakan rumus Euler. Terdapat 14 muka, sehingga diperoleh $v - 37 + 14 = 2$ atau secara ekuivalen $v = 25$. Namun, sekarang gunakan simpul-simpulnya untuk menghitung sisi sekali lagi. Setiap simpul harus berderajat *sedikitnya* tiga (artinya, setiap simpul mempertemukan sedikitnya tiga muka karena sudut dalam semua poligon harus kurang dari $180°$), sehingga jumlah derajat simpul sedikitnya 75. Karena jumlah derajat harus tepat dua kali jumlah sisi, ini menyatakan bahwa terdapat lebih dari 37 sisi. Sekali lagi, polihedron semacam itu tidak ada.

Untuk mengakhiri penerapan graf planar ini, perhatikan polihedron beraturan. Kita menyatakan bahwa hanya terdapat lima polihedron semacam itu. Bagaimana kita mengetahui bahwa pernyataan ini benar? Kita dapat membuktikannya menggunakan teori graf.

Teorema 2.3.4

Terdapat tepat lima polihedron beraturan.

Bukti. Ingatlah bahwa semua muka polihedron beraturan merupakan poligon beraturan yang identik dan setiap simpul memiliki derajat yang sama. Perhatikan empat kasus berdasarkan jenis poligon beraturannya.

Kasus 1: Setiap muka merupakan segitiga. Misalkan f adalah jumlah muka. Dengan demikian, terdapat $3f/2$ sisi. Dengan menggunakan rumus Euler, diper-

oleh $v - 3f/2 + f = 2$, sehingga $v = 2 + f/2$. Setiap simpul memiliki derajat yang sama, misalkan k. Jadi, jumlah sisi juga sama dengan $kv/2$. Dengan menggabungkan hasil-hasil ini, diperoleh

$$e = \frac{3f}{2} = \frac{k(2 + f/2)}{2},$$

yang berarti

$$k = \frac{6f}{4 + f}.$$

k dan f harus berupa bilangan bulat positif. Perhatikan bahwa $\frac{6f}{4+f}$ merupakan fungsi naik untuk f positif, yang dibatasi dari atas oleh asimtot horizontal $k = 6$. Jadi, nilai k yang mungkin hanyalah 3, 4, dan 5. Ketiga nilai tersebut dapat dicapai. Untuk memperoleh $k = 3$, diperlukan $f = 4$ (polihedron ini adalah tetrahedron). Untuk $k = 4$, ambil $f = 8$ (oktahedron). Untuk $k = 5$, ambil $f = 20$ (ikosahedron). Dengan demikian, terdapat tepat tiga polihedron beraturan bermuka segitiga.

Kasus 2: Setiap muka merupakan persegi. Sekarang berlaku $e = 4f/2 = 2f$. Dengan menggunakan rumus Euler, diperoleh $v = 2 + f$, dan penghitungan sisi menggunakan derajat k setiap simpul menghasilkan

$$e = 2f = \frac{k(2 + f)}{2}.$$

Penyelesaian untuk k memberikan

$$k = \frac{4f}{2 + f} = \frac{8f}{4 + 2f}.$$

Sekali lagi, ini merupakan fungsi naik, tetapi kali ini asimtot horizontalnya adalah $k = 4$, sehingga satu-satunya nilai yang mungkin bagi k adalah 3. Nilai ini menghasilkan 6 muka, sehingga diperoleh kubus. Hanya terdapat satu polihedron beraturan bermuka persegi.

Kasus 3: Setiap muka merupakan segilima. Lakukan perhitungan yang sama seperti di atas. Kali ini diperoleh $e = 5f/2$, sehingga $v = 2 + 3f/2$. Selanjutnya,

$$e = \frac{5f}{2} = \frac{k(2 + 3f/2)}{2},$$

sehingga

$$k = \frac{10f}{4 + 3f}.$$

Sekarang asimtot horizontalnya adalah $\frac{10}{3}$. Nilai ini kurang dari 4, sehingga satu-satunya kemungkinan adalah $k = 3$. Nilai tersebut dapat dicapai dengan menggunakan 12 segilima, sehingga diperoleh dodekahedron. Inilah satu-satunya polihedron beraturan bermuka segilima.

Kasus 4: Setiap muka merupakan segi-n dengan $n \geq 6$. Dengan mengikuti prosedur yang sama seperti di atas, diperoleh

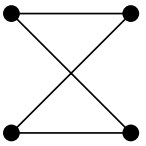
$$k = \frac{2nf}{4 + (n-2)f},$$

yang merupakan fungsi naik menuju asimtot horizontal $\frac{2n}{n-2}$. Ketika $n = 6$, asimtot ini berada pada $k = 3$. Setiap nilai n yang lebih besar menghasilkan asimtot yang lebih kecil lagi. Oleh karena itu, tidak ada polihedron beraturan dengan muka yang memiliki lebih dari lima sisi.[a]

[a] Perhatikan bahwa bidang dapat diubin dengan segienam. Ini merupakan graf planar tak hingga; setiap simpul berderajat 3. Segienam yang jumlahnya tak hingga ini bersesuaian dengan limit ketika $f \to \infty$ sehingga $k = 3$.

2.3.5 Pertanyaan Bacaan

1. Apakah graf yang ditunjukkan di bawah ini planar? Jelaskan jawaban Anda.



2. Misalkan Anda menggambar graf dengan 10 simpul dan 14 sisi sedemikian sehingga tidak ada sisi yang berpotongan. Berapa banyak muka yang mungkin dimiliki graf tersebut? Jelaskan jawaban Anda.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu lebih lanjut.

2.3.6 Soal Latihan

1. Tentukan apakah setiap pernyataan berikut benar atau salah.

(a) K_7 adalah graf planar

(b) K_6 bukan graf planar

(c) K_5 adalah graf planar

(d) $K_{3,3}$ adalah graf planar

(e) $K_{4,4}$ bukan graf planar

(f) $K_{4,5}$ adalah graf planar

(g) $K_{3,10}$ bukan graf planar

(h) $K_{2,5}$ bukan graf planar

2. Misalkan G adalah graf planar terhubung. Graf tersebut memiliki 15 sisi dan 6 muka. Berapa banyak simpul yang dimiliki G?

3. Misalkan suatu graf terhubung memiliki 9 simpul dan setiap simpul berderajat 3.

a. Berapa banyak sisi yang dimiliki graf tersebut?

b. Jika graf tersebut planar, berapa banyak muka yang dimilikinya?

4. Mari kita buktikan bahwa K_{11} tidak planar:

Pertama, berapa banyak simpul dan sisi yang dimiliki K_{11}?

Jika kita mengasumsikan bahwa K_{11} planar, berapa banyak muka yang *akan* dimilikinya?

Namun, karena setiap muka dibatasi oleh sedikitnya _____ sisi dan setiap sisi membatasi tepat _____ muka, kita dapat memperoleh batas atas bagi banyaknya muka. Berdasarkan penalaran ini, berapa banyak muka maksimum yang mungkin?

$f \leq$ _____.

Ini merupakan kontradiksi, sehingga K_{11} tidak planar. Terbukti.

5. Misalkan graf tersebut planar tetapi tidak terhubung dan memiliki 7 komponen. Gambarkan cukup banyak contoh untuk menurunkan suatu bentuk rumus Euler bagi kasus ini.

$v - e + f =$ _____.

2.3.7 Latihan Tambahan

1. Mungkinkah suatu graf planar memiliki 6 simpul, 10 sisi, dan 5 muka? Jelaskan.

2. Graf G memiliki 6 simpul dengan derajat $2, 2, 3, 4, 4, 5$. Berapa banyak sisi yang dimiliki G? Mungkinkah G planar? Jika ya, berapa banyak muka yang dimilikinya? Jika tidak, jelaskan.

3. Mungkinkah graf terhubung dengan 7 simpul dan 10 sisi digambar tanpa sisi yang berpotongan sehingga menghasilkan 4 muka? Jelaskan.

4. Mungkinkah graf dengan 10 simpul dan sejumlah sisi menjadi graf planar terhubung? Jelaskan.

5. Adakah graf planar terhubung dengan jumlah muka ganjil yang setiap simpulnya berderajat 6? Buktikan jawaban Anda.

6. Saya memikirkan sebuah polihedron yang memiliki 12 muka. Tujuh muka berbentuk segitiga dan empat muka berbentuk segiempat. Polihedron tersebut memiliki 11 simpul, termasuk simpul-simpul di sekeliling muka yang belum diketahui. Berapa banyak sisi yang dimiliki muka terakhir?

7. Perhatikan beberapa polihedron klasik.

(a) Sebuah *oktahedron* adalah polihedron beraturan yang tersusun atas 8 segitiga sama sisi (bentuknya agak menyerupai dua limas yang alasnya direkatkan menjadi satu). Gambarkan representasi graf planar dari sebuah oktahedron. Berapa banyak simpul, sisi, dan muka yang dimiliki oktahedron (dan graf Anda)?

(b) Desain tradisional bola sepak merupakan (proyeksi sferis dari) ikosahedron terpenggal. Bangun ini terdiri atas 12 segilima beraturan dan 20 segienam beraturan. Tidak ada dua segilima yang bertetangga (jadi setiap sisi segilima hanya berbatasan dengan segienam). Berapa banyak simpul, sisi, dan muka yang dimiliki ikosahedron terpenggal? Jelaskan bagaimana Anda memperoleh jawaban tersebut. Bonus: gambarkan representasi graf planar dari ikosahedron terpenggal.

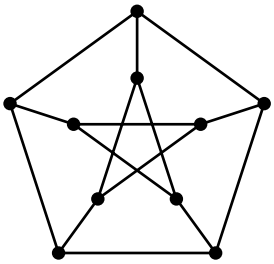
(c) "Teman" Anda mengaku telah membuat polihedron cembung dari 2 segitiga, 2 persegi, 6 segilima, dan 5 segidelapan. Buktikan bahwa teman Anda berbohong. Petunjuk: setiap simpul polihedron cembung harus berbatasan dengan sedikitnya tiga muka.

8. Buktikan rumus Euler menggunakan argumen penyangkal minimal, dengan minimalitas ditentukan oleh jumlah sisi terkecil.

9. Buktikan rumus Euler menggunakan argumen penyangkal minimal, dengan minimalitas ditentukan oleh jumlah *simpul* terkecil.

10. Rumus Euler ($v - e + f = 2$) berlaku bagi semua graf planar *terhubung*. Bagaimana jika suatu graf tidak terhubung? Misalkan suatu graf planar memiliki dua komponen. Berapakah nilai $v - e + f$ sekarang? Bagaimana jika graf tersebut memiliki k komponen?

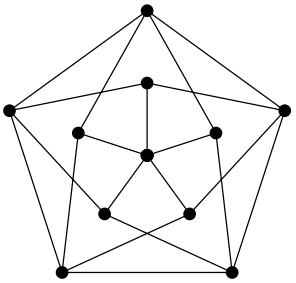
11. Buktikan bahwa **graf Petersen** (di bawah ini) tidak planar.



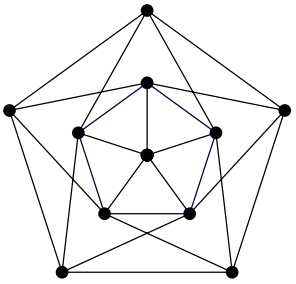
12. Buktikan bahwa setiap graf planar dengan v simpul dan e sisi memenuhi $e \leq 3v - 6$.

13. Buktikan bahwa setiap graf planar harus memiliki simpul berderajat paling tinggi 5.

14. Berikan bukti yang cermat bahwa graf di bawah ini tidak planar.



15. Jelaskan mengapa kita tidak dapat menggunakan jenis bukti yang sama seperti dalam Latihan 2.3.7.14 untuk membuktikan bahwa graf di bawah ini tidak planar. Kemudian jelaskan bagaimana Anda tetap mengetahui bahwa graf tersebut tidak planar.



2.4 Jejak dan Sirkuit Euler

Tujuan Pembelajaran

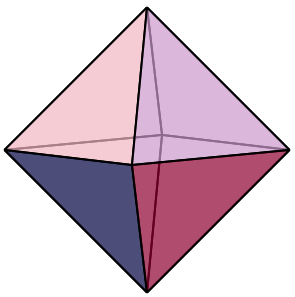
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Mengidentifikasi apakah suatu graf atau multigraf memiliki jejak atau sirkuit Euler.
2. Menjelaskan mengapa syarat perlu bagi suatu graf untuk memiliki jejak Euler memang diperlukan.
3. Membedakan jejak Euler dan lintasan Hamilton, serta menentukan mana yang lebih tepat digunakan untuk suatu masalah.

2.4.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

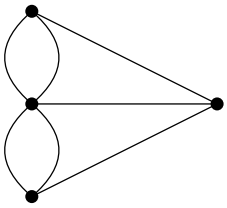
Seekor laba-laba berdiri pada salah satu sisi muka sebuah oktahedron (polihedron dengan delapan sisi muka berbentuk segitiga). Laba-laba itu ingin merayapi bangun tersebut dari satu sisi muka ke sisi muka lainnya sehingga melintasi setiap rusuk tepat satu kali. Mungkinkah hal ini dilakukan? Jika ya, bagaimana caranya?



Jika kita mulai dari suatu simpul dan menelusuri sisi-sisi untuk mencapai simpul lain, kita membentuk suatu *jalan* pada graf. Lebih tepatnya, **jalan** dalam graf adalah barisan simpul sedemikian sehingga setiap simpul dalam barisan bertetangga dengan simpul sebelum dan sesudahnya dalam barisan tersebut. Jika jalan itu melintasi setiap sisi tepat satu kali, jalan tersebut disebut **jejak Euler** (atau **jalan Euler** atau **lintasan Euler**). Jika, selain itu, simpul awal dan akhirnya sama (jadi Anda menelusuri setiap sisi tepat satu kali dan berakhir di tempat Anda memulai), jalan tersebut disebut **sirkuit Euler** (atau **tur Euler**). Tentu saja, jika suatu graf tidak terhubung, tidak mungkin ditemukan jejak atau sirkuit semacam itu. Sepanjang

sisa bagian ini, anggap semua graf yang dibahas terhubung.

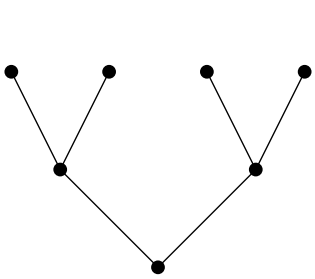
Masalah jembatan Königsberg sebenarnya merupakan pertanyaan tentang keberadaan jejak Euler. Akan ada rute yang melintasi setiap jembatan tepat satu kali jika dan hanya jika multigraf di bawah memiliki jejak Euler:



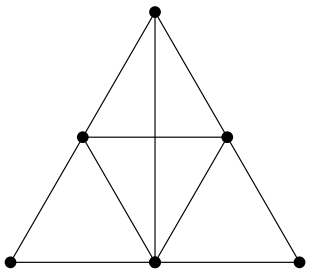
Graf ini cukup kecil sehingga kita dapat memeriksa setiap jalan yang mungkin tanpa menggunakan ulang sisi, dan dengan demikian meyakinkan diri bahwa tidak ada jejak Euler (apalagi sirkuit Euler). Pada graf kecil yang memiliki jejak Euler, biasanya tidak sulit untuk menemukannya. Tujuan kita adalah menemukan cara cepat untuk memeriksa apakah suatu graf memiliki jejak atau sirkuit Euler, bahkan jika graf tersebut cukup besar.

Aktivitas Pratinjau

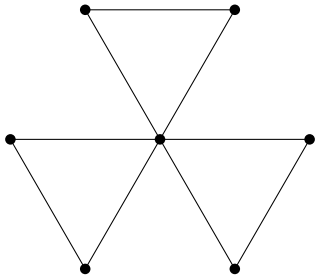
Graf mana saja di bawah ini yang memiliki jejak Euler? Graf mana saja yang memiliki sirkuit Euler?



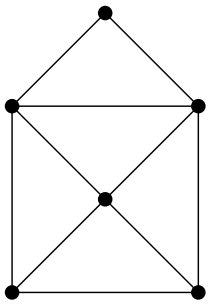
G_1



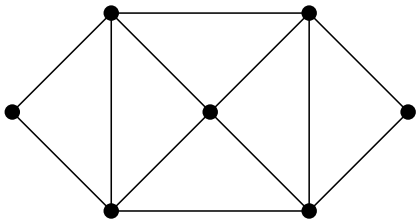
G_2



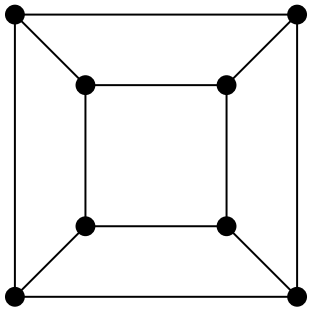
G_3



G_4



G_5

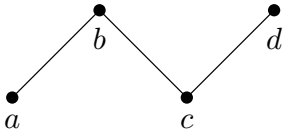


G_6

1. Tuliskan barisan derajat graf-graf di atas.

Apa kemungkinan hubungan antara barisan derajat dan keberadaan jejak atau sirkuit Euler?

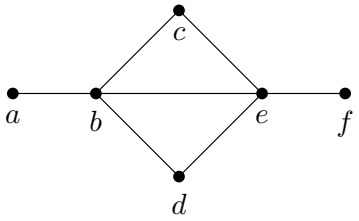
2. Salah satu cara menuliskan jejak atau sirkuit Euler adalah mencantumkan *sisi-sisinya* secara berurutan. Setiap sisi berupa pasangan simpul, dan untuk menunjukkan arah kita melintasi sisi tersebut, kita dapat menuliskannya sebagai pasangan terurut alih-alih sebagai himpunan. Sebagai contoh, perhatikan graf berikut:



Terdapat dua jejak Euler yang dapat kita tuliskan:

$$(a,b),(b,c),(c,d) \qquad \text{atau} \qquad (d,c),(c,b),(b,a).$$

(a) Tuliskan sebuah jejak Euler untuk graf di bawah ini.



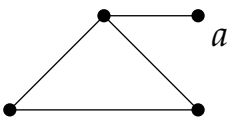
Untuk setiap simpul, tuliskan derajatnya dan berapa kali simpul tersebut muncul dalam daftar sisi Anda.

(b) Misalkan Anda memiliki graf dengan barisan derajat $(4,2,2,2,2)$ yang mempunyai jejak Euler. Berapa kali nama simpul berderajat 4 akan muncul dalam daftar sisi Anda?

(c) Misalkan Anda memiliki graf dengan jejak Euler yang ditulis sebagai daftar sisi. Apa yang dapat Anda simpulkan tentang simpul yang muncul tepat 3 kali dalam daftar tersebut? Pilih semua pernyataan yang mungkin benar.

2.4.2 Syarat untuk Jejak Euler

Salah satu cara untuk memastikan bahwa suatu graf *tidak* memiliki sirkuit Euler adalah dengan menyertakan "duri," yaitu simpul berderajat 1.



Simpul a berderajat 1, dan jika Anda mencoba membuat sirkuit Euler, Anda akan

terhenti di simpul tersebut. Simpul itu merupakan jalan buntu, kecuali jika Anda memulai dari sana. Namun, dalam hal itu tidak ada cara untuk kembali, sehingga sirkuit Euler tidak mungkin ditemukan. Meskipun demikian, terdapat jejak Euler. Jejak itu dimulai pada simpul a, kemudian mengitari segitiga. Anda akan berakhir pada simpul berderajat 3.

Masalah serupa muncul setiap kali terdapat simpul dengan derajat ganjil. Jika Anda memulai pada simpul semacam itu, Anda tidak akan dapat berakhir di sana (setelah melintasi setiap sisi tepat satu kali). Setelah menggunakan satu sisi untuk meninggalkan simpul awal, akan tersisa sisi dalam jumlah genap yang memancar dari simpul tersebut. Separuh sisi ini dapat digunakan untuk kembali ke simpul itu, dan separuh lainnya untuk meninggalkannya. Jadi, Anda kembali, lalu pergi; kembali, lalu pergi. Satu-satunya cara menghabiskan semua sisi adalah menggunakan sisi terakhir untuk meninggalkan simpul tersebut. Di sisi lain, jika terdapat simpul berderajat ganjil yang bukan merupakan titik awal jejak, pada akhirnya Anda akan terhenti di simpul itu. Jejak tersebut akan menggunakan pasangan sisi yang bersisian dengan simpul untuk tiba dan pergi lagi. Pada akhirnya, semua sisi kecuali satu akan terpakai, sehingga hanya tersisa satu sisi untuk tiba dan tidak ada sisi untuk pergi lagi.

Semua ini menunjukkan bahwa jika suatu graf memiliki jejak Euler dan dua simpul berderajat ganjil, jejak Euler tersebut harus bermula pada salah satu simpul berderajat ganjil dan berakhir pada simpul lainnya. Dalam keadaan demikian, setiap simpul lain *harus* berderajat genap karena kita memerlukan jumlah sisi yang sama untuk tiba di simpul-simpul itu dan untuk meninggalkannya. Bagaimana suatu graf dapat memiliki sirkuit Euler? Graf tersebut tidak boleh memiliki simpul berderajat ganjil karena jejak Euler harus bermula atau berakhir di simpul itu, tetapi tidak keduanya. Jadi, agar suatu graf memiliki sirkuit Euler, semua simpulnya harus berderajat genap.

Kebalikannya juga benar: jika semua simpul suatu graf berderajat genap, graf tersebut memiliki sirkuit Euler; dan jika tepat dua simpul berderajat ganjil, graf tersebut memiliki jejak Euler. Membuktikan hal ini agak rumit, tetapi gagasan dasarnya adalah bahwa Anda tidak akan pernah terhenti karena pada setiap simpul terdapat sisi "keluar" untuk setiap sisi "masuk". Jika Anda mencoba membuat jejak Euler dan melewatkan beberapa sisi, Anda selalu dapat "menyisipkan" suatu sirkuit yang menggunakan sisi-sisi yang sebelumnya terlewat.

Jejak dan Sirkuit Euler.

- Suatu graf memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika derajat setiap simpulnya genap.
- Suatu graf memiliki jejak Euler jika dan hanya jika terdapat paling banyak dua simpul berderajat ganjil.

Karena keempat simpul pada graf jembatan Königsberg berderajat ganjil, tidak ada jejak Euler pada graf tersebut. Jadi, warga kota tidak mungkin melintasi setiap

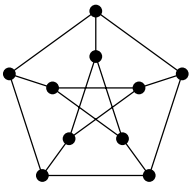
jembatan tepat satu kali.

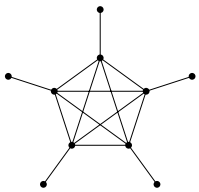
2.4.3 Lintasan Hamilton

Misalkan Anda ingin berkeliling Königsberg sedemikian rupa sehingga mengunjungi setiap daratan (kedua pulau dan kedua tepi sungai) tepat satu kali. Hal ini dapat dilakukan. Dalam istilah teori graf, kita menanyakan apakah terdapat lintasan yang mengunjungi setiap simpul tepat satu kali. Lintasan semacam itu disebut **lintasan Hamilton** (atau **lintasan Hamiltonian**). Kita juga dapat mempertimbangkan **siklus Hamilton**, yaitu lintasan Hamilton yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

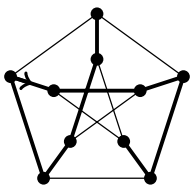
Contoh 2.4.1

Tentukan apakah graf-graf di bawah ini memiliki lintasan Hamilton.





Penyelesaian. Graf di kiri memiliki lintasan Hamilton (bahkan ada banyak lintasan berbeda), seperti ditunjukkan berikut:



Graf di kanan tidak memiliki lintasan Hamilton. Anda harus mengunjungi setiap simpul "luar", tetapi begitu mengunjungi salah satunya, Anda akan terhenti. Perhatikan bahwa graf ini juga tidak memiliki jejak Euler, meskipun terdapat graf yang memiliki jejak Euler tetapi tidak memiliki lintasan Hamilton.

Menemukan lintasan Hamilton tampaknya lebih mudah karena graf sering kali memiliki lebih banyak sisi daripada simpul, sehingga lebih sedikit syarat yang harus dipenuhi. Namun, tidak seorang pun mengetahui apakah hal ini benar. Belum diketahui adanya uji sederhana untuk menentukan apakah suatu graf memiliki lintasan Hamilton. Untuk graf kecil, hal ini bukan masalah, tetapi seiring bertambahnya ukuran graf, pemeriksaan keberadaan lintasan Hamilton menjadi semakin sulit. Bahkan, sejauh yang kita ketahui, pertanyaan ini merupakan contoh masalah yang secara umum terlalu sulit diselesaikan oleh komputer karena

merupakan contoh masalah NP-lengkap.

2.4.4 Pertanyaan Bacaan

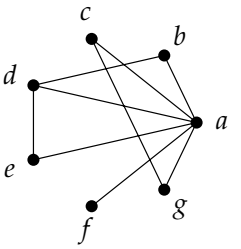
1. Adakah graf yang memiliki sirkuit Euler tetapi tidak memiliki jejak Euler? Jelaskan jawaban Anda.

2. Dapatkah suatu pohon memiliki tur Euler? Dapatkah suatu pohon memiliki sirkuit Euler? Jelaskan jawaban Anda.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu lebih lanjut.

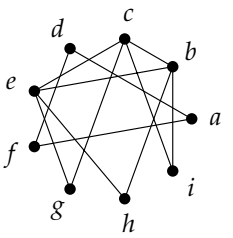
2.4.5 Latihan Soal

1. Temukan suatu lintasan Euler pada graf berikut.

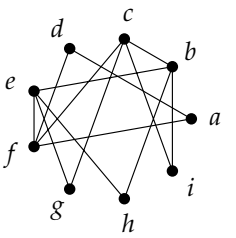


2. Manakah di antara graf-graf berikut yang memiliki sirkuit Euler? Jika suatu graf memiliki sirkuit Euler, temukan sirkuit tersebut.

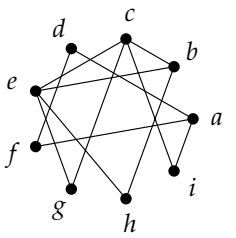
(a)



(b)



(c)



3. Tentukan mana di antara graf-graf berikut yang memiliki sirkuit Euler atau lintasan Euler.

(a)

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$E = \{ab, af, bc, cd, ce, cf, de, ef\}$$

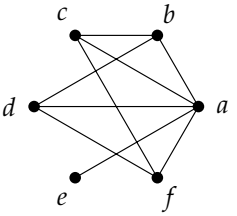
(b) Graf yang diberikan oleh daftar ketetanggaan berikut:

u	v,w,y,z
v	u,w,x,y
w	u,v,x,z
x	v,w,y,z
y	u,v,x,z
z	u,w,x,y

(c) Graf yang diberikan oleh matriks ketetanggaan berikut:

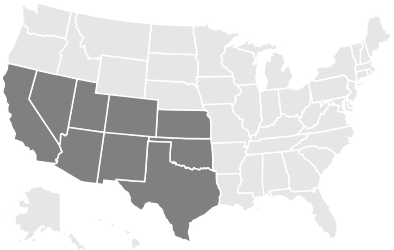
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Tambahkan sebuah sisi pada graf berikut (di antara sepasang simpul yang belum bertetangga) agar graf tersebut memiliki lintasan Euler. Kemudian, temukan lintasan Eulernya.



2.4.6 Latihan Tambahan

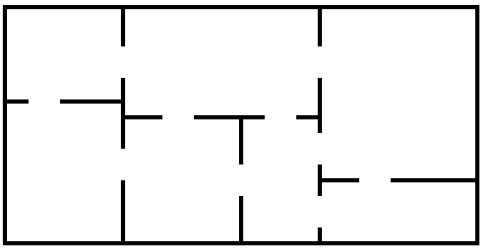
1. Anda dan teman-teman ingin berkeliling wilayah barat daya Amerika Serikat dengan mobil. Anda akan mengunjungi sembilan negara bagian yang ditunjukkan di bawah, dengan aturan yang agak aneh berikut: Anda harus melintasi setiap perbatasan di antara negara bagian yang bertetangga tepat satu kali (jadi, misalnya, Anda harus melintasi perbatasan Colorado–Utah tepat satu kali). Dapatkah perjalanan ini dilakukan? Jika dapat, apakah tempat Anda memulai perjalanan darat tersebut berpengaruh? Fakta apa dalam teori graf yang menyelesaikan masalah ini?



2. Manakah di antara graf berikut yang memuat jejak Euler? Manakah yang memuat sirkuit Euler?

(a) K_4 (b) K_5 (c) $K_{5,7}$ (d) $K_{2,7}$ (e) C_7 (f) P_7

3. Edward A. Mouse baru saja menyelesaikan rumah barunya. Denah rumah tersebut ditunjukkan di bawah ini.



(a) Edward ingin mengajak seekor teman tikus betina berkeliling rumah barunya. Mungkinkah mereka melewati setiap pintu tepat satu kali? Jika mungkin, di ruangan mana mereka harus memulai dan mengakhiri tur? Jelaskan.

(b) Mungkinkah mereka berkeliling rumah dengan mengunjungi setiap ruangan tepat satu kali (tanpa harus melewati setiap pintu)? Jelaskan.

(c) Setelah beberapa tahun dalam hitungan usia tikus, Edward memutuskan untuk merenovasi rumahnya. Ia ingin menambahkan beberapa pintu baru di antara ruangan-ruangan yang ada. Tentu saja, ia tidak dapat menambahkan pintu pada bagian luar rumah. Mungkinkah setiap ruangan memiliki banyak pintu yang ganjil? Jelaskan.

4. Untuk nilai n manakah graf K_n memuat sirkuit Euler? Jelaskan.

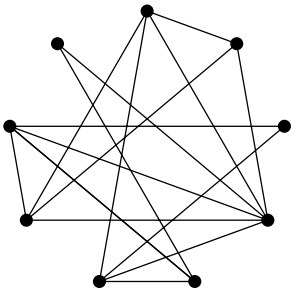
5. Untuk nilai m dan n manakah graf $K_{m,n}$ memuat jejak Euler? Kapan graf tersebut memuat sirkuit Euler? Jelaskan.

6. Untuk nilai n manakah K_n memuat lintasan Hamilton? Kapan graf tersebut memuat siklus Hamilton? Jelaskan.

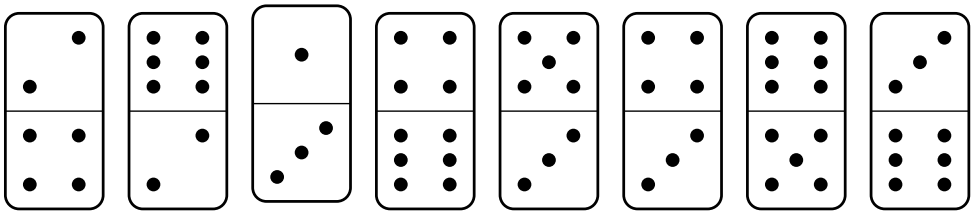
7. Untuk nilai m dan n manakah graf $K_{m,n}$ memuat lintasan Hamilton? Kapan graf tersebut memuat siklus Hamilton? Jelaskan.

8. Seorang pembangun jembatan datang ke Königsberg dan ingin menambahkan jembatan agar perjalanan yang melintasi setiap jembatan tepat satu kali *dapat* dilakukan. Berapa banyak jembatan yang harus dibangun?

9. Di bawah ini terdapat graf yang merepresentasikan hubungan pertemanan di antara sekelompok mahasiswa (setiap simpul adalah seorang mahasiswa dan setiap sisi adalah suatu hubungan pertemanan). Mungkinkah para mahasiswa duduk mengelilingi meja bundar sedemikian sehingga setiap mahasiswa duduk di antara dua temannya? Apa kaitan pertanyaan ini dengan jejak?



10. Di atas meja terdapat 8 kartu domino seperti ditunjukkan di bawah ini. Jika semua kartu tersebut disusun dalam satu baris, sedemikian sehingga setiap dua sisi yang bersentuhan memiliki banyak titik yang sama, berapakah jumlah titik pada kedua ujung barisan?

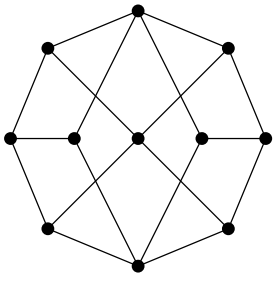


11. Dapatkah kita menentukan keberadaan lintasan Hamilton pada suatu graf berdasarkan derajat simpul-simpulnya?

(a) Misalkan suatu graf memiliki lintasan Hamilton. Paling banyak berapa simpul berderajat satu yang dapat dimiliki graf tersebut? Jelaskan mengapa jawaban Anda benar.

(b) Temukan graf yang tidak memiliki lintasan Hamilton meskipun tidak satu pun simpulnya berderajat satu. Jelaskan mengapa contoh Anda memenuhi persyaratan.

12. Perhatikan graf berikut.



(a) Temukan sebuah lintasan Hamilton. Dapatkah lintasan tersebut diperluas menjadi siklus Hamilton?

(b) Apakah graf tersebut bipartit? Jika ya, berapa banyak simpul yang terdapat dalam setiap "bagian"?

(c) Gunakan jawaban Anda pada butir (b) untuk membuktikan bahwa graf tersebut tidak memiliki siklus Hamilton.

(d) Misalkan Anda memiliki graf bipartit G dengan salah satu bagian memiliki sedikitnya dua simpul lebih banyak daripada bagian lainnya. Buktikan bahwa G tidak memiliki lintasan Hamilton.

2.5 Pewarnaan

Tujuan Pembelajaran

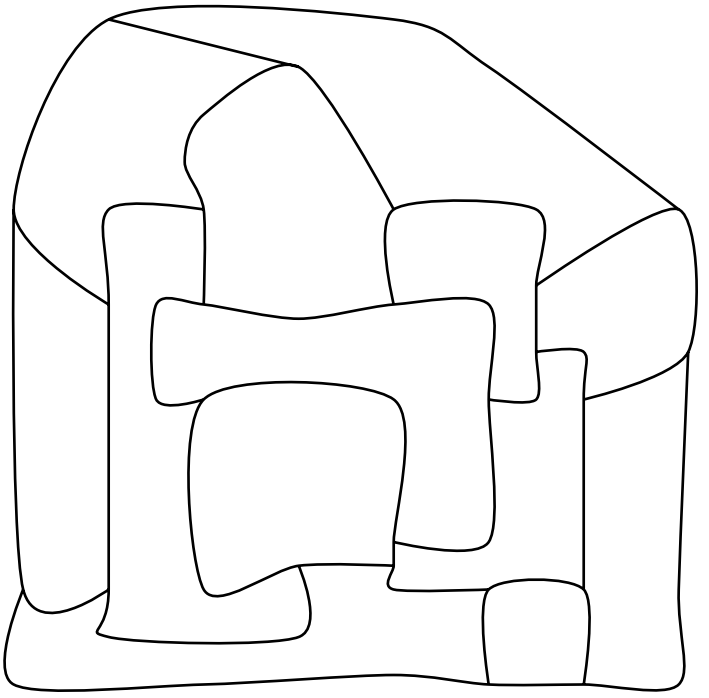
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menentukan bilangan kromatik suatu graf.
2. Menentukan indeks kromatik suatu graf.
3. Menentukan apakah penggunaan bilangan kromatik atau indeks kromatik lebih tepat untuk menyelesaikan masalah tertentu.

2.5.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Para pembuat peta di negeri fiktif Euleria telah menggambar batas berbagai kadipaten di negeri tersebut. Agar petanya menarik, mereka ingin mewarnai setiap wilayah. Wilayah yang bertetangga harus diberi warna berbeda, tetapi dua wilayah yang berjauhan boleh diberi warna yang sama. Berapa jumlah warna minimum yang dapat digunakan para pembuat peta untuk menyelesaikan tugas ini?



Barangkali masalah teori graf yang paling terkenal adalah cara mewarnai peta.

> Untuk sembarang peta negara, negara bagian, kabupaten, dan sebagainya, berapa banyak warna yang diperlukan untuk mewarnai setiap wilayah pada peta agar wilayah yang bertetangga diberi warna berbeda?

Para pembuat peta sebenarnya biasanya menggunakan sekitar tujuh warna. Salah satu alasannya, mereka mengharuskan wilayah perairan diberi warna tertentu, dan dengan banyak warna, pewarnaan yang diperbolehkan lebih mudah ditemukan. Kita ingin mengetahui apakah ada palet yang lebih kecil dan dapat digunakan untuk sembarang peta.

Apa kaitannya dengan teori graf? Jika kita menempatkan sebuah simpul di tengah setiap wilayah (misalnya di ibu kota setiap negara bagian) lalu menghubungkan dua simpul apabila negara bagiannya berbagi batas, kita memperoleh sebuah graf. Mewarnai wilayah pada peta bersesuaian dengan mewarnai simpul-simpul graf. Karena wilayah yang bertetangga tidak boleh diberi warna yang sama, simpul-simpul yang bertetangga pada graf kita tidak boleh diberi warna yang sama.

Secara umum, untuk sembarang graf G, pemberian warna pada simpul-simpulnya disebut (tidak mengherankan) **pewarnaan simpul**. Jika dalam pewarnaan simpul tersebut simpul-simpul yang bertetangga diberi warna berbeda, pewarnaan itu disebut **tepat**. Setiap graf memiliki pewarnaan simpul yang tepat. Sebagai contoh, Anda dapat memberi setiap simpul warna yang berbeda. Namun, sering kali kita

dapat menggunakan lebih sedikit warna. Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk memperoleh pewarnaan simpul yang tepat disebut **bilangan kromatik** graf tersebut, yang ditulis $\chi(G)$.

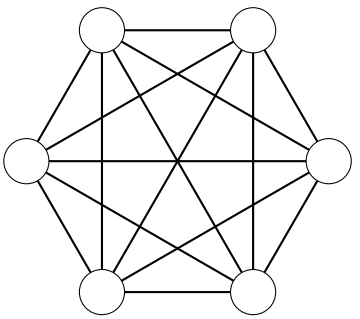
Tujuan kita dalam bagian ini adalah melihat bagaimana pewarnaan graf dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah dan memahami beberapa sifat dasar pewarnaan graf.

Kegiatan Pratinjau

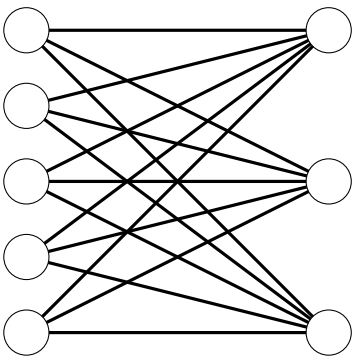
Untuk setiap graf di bawah ini:

- Temukan pewarnaan simpul yang tepat dengan menggunakan sejumlah warna. Artinya, warnai simpul-simpul dengan jumlah warna sembarang sedemikian sehingga tidak ada dua simpul bertetangga yang memiliki warna sama.
- Tentukan jumlah warna *paling sedikit* yang diperlukan untuk mewarnai simpul-simpul graf dengan tepat. Bilangan ini disebut **bilangan kromatik** graf. Pikirkan bagaimana Anda mengetahui bahwa jawaban tersebut benar.
- Dapatkah Anda membuat generalisasi? Dapatkah Anda menyimpulkan sesuatu mengenai bilangan kromatik untuk jenis graf tertentu?

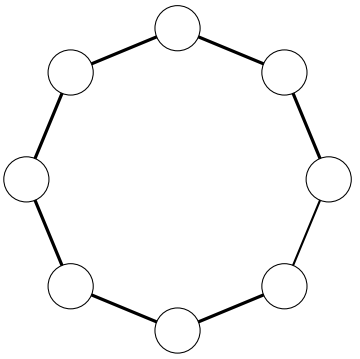
1.



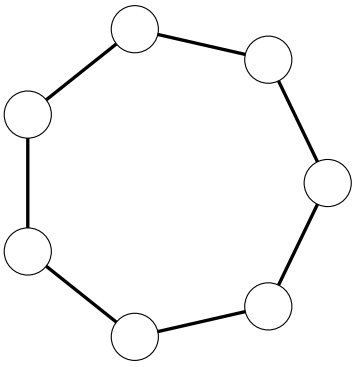
2.



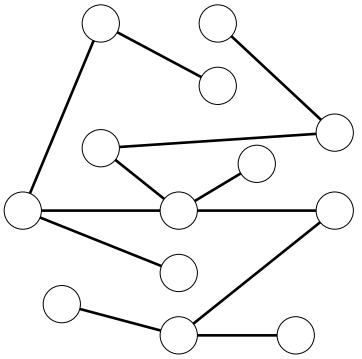
3.



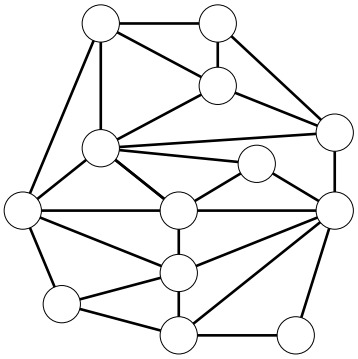
4.



5.



6.



2.5.2 Pewarnaan Simpul

Selidiki!

Departemen matematika berencana menawarkan 10 mata kuliah pada semester depan. Beberapa mata kuliah tidak dapat diselenggarakan pada waktu yang sama (mungkin karena diajarkan oleh dosen yang sama, atau diwajibkan bagi mahasiswa tingkat akhir).

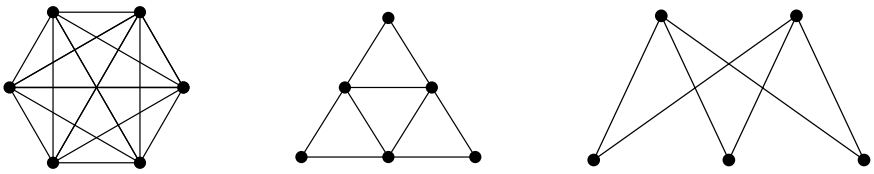
Mata kuliah:	Berbenturan dengan:
A	D I
B	D I J
C	E F I
D	A B F
E	C H I
F	C D I
G	J
H	E I J
I	A B C E F H
J	B G H

Berapa banyak slot waktu berbeda yang diperlukan untuk menyelenggarakan mata kuliah tersebut (dan mata kuliah mana yang sebaiknya diselenggarakan pada waktu yang sama)? Lebih penting lagi, bagaimana kita dapat menggunakan pewarnaan graf untuk menjawab pertanyaan ini?

Cara terbaik untuk memahami bilangan kromatik secara intuitif adalah mencoba mewarnai beberapa graf.

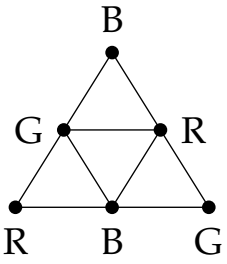
Contoh 2.5.1

Tentukan bilangan kromatik graf-graf di bawah ini.



Penyelesaian. Graf di sebelah kiri adalah K_6. Satu-satunya cara untuk mewarnai graf tersebut secara tepat adalah memberi setiap simpul warna yang berbeda (karena setiap simpul bertetangga dengan setiap simpul lainnya). Jadi, bilangan kromatiknya adalah 6.

Graf di tengah dapat diwarnai secara tepat hanya dengan 3 warna (merah, biru, dan hijau). Sebagai contoh:



Graf tersebut tidak mungkin diwarnai hanya dengan dua warna karena terdapat tiga simpul yang saling bertetangga (yaitu, sebuah segitiga). Jadi, bilangan kromatiknya adalah 3.

Graf di sebelah kanan adalah $K_{2,3}$. Seperti semua graf bipartit, graf ini memiliki bilangan kromatik 2: warnai simpul-simpul pada baris atas dengan merah dan simpul-simpul pada baris bawah dengan biru.

Tampaknya tidak ada batas bagi besarnya bilangan kromatik. Tidak mengherankan bahwa K_n memiliki bilangan kromatik n. Lalu, bagaimana mungkin pertanyaan awal tentang pewarnaan peta memiliki jawaban? Jika bilangan kromatik suatu graf dapat menjadi sebesar apa pun, tampaknya tidak akan ada batas atas bagi jumlah warna yang diperlukan untuk sembarang peta. Namun, batas tersebut ada.

Pengamatan kuncinya adalah bahwa meskipun untuk setiap bilangan n terdapat graf dengan bilangan kromatik n, hanya graf tertentu yang dapat muncul sebagai representasi peta. Jika Anda mengubah suatu peta menjadi graf, sisi-sisi di antara simpul bersesuaian dengan batas antarnegara. Jadi, simpul-simpul tersebut harus dapat dihubungkan sedemikian rupa sehingga sisi-sisinya tidak berpotongan. Dengan kata lain, semua graf yang merepresentasikan peta bersifat *planar*!

Jadi, pertanyaannya adalah: berapakah bilangan kromatik terbesar dari sembarang graf planar? Jawabannya diberikan oleh teorema teori graf yang paling

terkenal:

Teorema 2.5.2 Teorema Empat Warna.

Jika G adalah graf planar, bilangan kromatik G paling besar 4. Jadi, sembarang peta dapat diwarnai secara tepat dengan 4 warna atau kurang.

Kita tidak akan membuktikan teorema ini. Sungguh. Meskipun teorema tersebut mudah dinyatakan dan dipahami, pembuktiannya tidak mudah. Bahkan, saat ini belum diketahui adanya bukti yang "mudah" untuk teorema tersebut. Bukti terbaik saat ini masih memerlukan komputer berdaya tinggi untuk memeriksa *himpunan tak terhindarkan* yang terdiri atas 633 *konfigurasi yang dapat direduksi*. Gagasannya adalah bahwa setiap graf harus memuat salah satu konfigurasi yang dapat direduksi tersebut (fakta ini juga perlu diperiksa oleh komputer) dan bahwa konfigurasi yang dapat direduksi memang dapat diwarnai dengan 4 warna atau kurang.

Kartografi tentu bukan satu-satunya penerapan pewarnaan graf. Ada banyak situasi ketika Anda ingin mempartisi objek-objek yang ditinjau agar objek yang saling berkaitan tidak berada dalam himpunan yang sama. Sebagai contoh, Anda mungkin ingin menyimpan bahan kimia dengan aman. Untuk menghindari ledakan, pasangan bahan kimia tertentu tidak boleh disimpan dalam ruangan yang sama. Dengan mewarnai suatu graf (dengan simpul yang merepresentasikan bahan kimia dan sisi yang merepresentasikan potensi interaksi berbahaya), Anda dapat menentukan jumlah minimum ruangan yang diperlukan untuk menyimpan bahan kimia tersebut.

Berikut adalah contoh lainnya:

Contoh 2.5.3

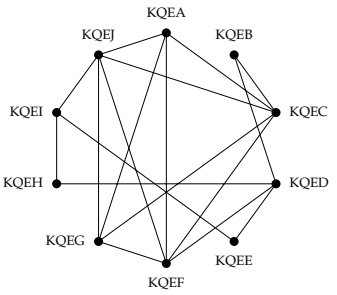
Stasiun radio memancarkan sinyal pada frekuensi tertentu. Namun, jumlah frekuensi yang dapat dipilih terbatas, sehingga banyak stasiun di seluruh negeri menggunakan frekuensi yang sama. Hal ini dapat dilakukan karena stasiun-stasiun tersebut cukup berjauhan sehingga sinyalnya tidak saling mengganggu; tidak ada satu radio pun yang dapat menangkap sinyal-sinyal tersebut secara bersamaan.

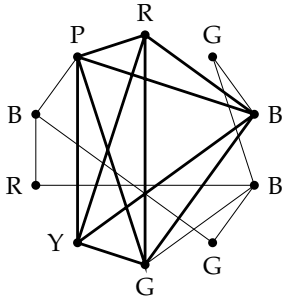
Misalkan 10 stasiun radio baru akan didirikan di suatu wilayah yang saat ini belum memiliki stasiun radio. Pasangan stasiun radio yang cukup berdekatan sehingga menimbulkan gangguan dicatat dalam tabel di bawah ini. Berapa jumlah minimum frekuensi yang dapat digunakan stasiun-stasiun tersebut?

	KQEA	KQEB	KQEC	KQED	KQEE	KQEF	KQEG	KQEH	KQEI	KQEJ
KQEA			x			x	x			x
KQEB			x	x						
KQEC	x	x				x	x			x
KQED		x			x	x		x		
KQEE				x					x	
KQEF	x		x	x			x			x
KQEG	x		x			x				x
KQEH				x					x	
KQEI					x			x		x
KQEJ	x		x			x	x		x	

Penyelesaian. Representasikan masalah tersebut sebagai graf dengan stasiun sebagai simpul dan sisi yang menghubungkan dua stasiun apabila keduanya cukup berdekatan sehingga menimbulkan gangguan. Kita mencari bilangan kromatik graf tersebut. Simpul-simpul yang diberi warna sama merepresentasikan stasiun yang dapat menggunakan frekuensi yang sama.

Graf ini memiliki bilangan kromatik 5. Pewarnaan tepat dengan 5 warna ditunjukkan di sebelah kanan. Perhatikan bahwa graf tersebut memuat salinan graf lengkap K_5, sehingga tidak mungkin digunakan kurang dari 5 warna.





Dalam contoh di atas, bilangan kromatiknya adalah 5, tetapi hal ini bukan contoh penyangkal bagi Teorema Empat Warna 2.5.2 karena graf yang merepresentasikan stasiun radio tidak planar. Akan menyenangkan jika ada cara cepat untuk menentukan bilangan kromatik suatu graf (yang mungkin nonplanar). Ternyata belum diketahui apakah terdapat algoritma efisien untuk menghitung bilangan kromatik.

Meskipun kita mungkin tidak dapat menentukan bilangan kromatik suatu graf secara tepat dengan mudah, kita sering kali dapat memberikan rentang yang wajar bagi bilangan kromatik tersebut. Dengan kata lain, kita dapat memberikan batas atas dan batas bawah bagi bilangan kromatik.

Hal ini tidak terlalu sulit: untuk setiap graf G, bilangan kromatik G sedikitnya 1 dan paling banyak sama dengan jumlah simpul G.

Apa? Anda menginginkan batas yang *lebih baik* bagi bilangan kromatik? Kalau begitu, Anda beruntung.

Sebuah **klik** dalam graf adalah himpunan simpul yang setiap pasang simpulnya bertetangga. Dengan kata lain, klik berukuran n tidak lain adalah salinan graf

lengkap K_n. Kita mendefinisikan **bilangan klik** suatu graf sebagai nilai n terbesar sedemikian sehingga graf tersebut memuat klik berukuran n. Setiap klik berukuran n tidak dapat diwarnai dengan kurang dari n warna, sehingga kita memperoleh batas bawah yang baik:

Teorema 2.5.4

Bilangan kromatik graf G sedikitnya sama dengan bilangan klik G.

Ada kalanya bilangan kromatik G *sama* dengan bilangan kliknya. Graf-graf ini memiliki nama khusus; graf tersebut disebut **sempurna**. Jika Anda mengetahui bahwa suatu graf sempurna, menentukan bilangan kromatiknya cukup dilakukan dengan mencari klik terbesar.[9] Namun, tidak semua graf sempurna.

Untuk batas atas, kita dapat memperbaiki batas "jumlah simpul" dengan memperhatikan derajat simpul. Misalkan $\Delta(G)$ menyatakan derajat terbesar dari semua simpul dalam graf G. Dugaan yang wajar untuk batas atas bilangan kromatik adalah $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Mengapa dugaan ini wajar? Mulai dari sembarang simpul, simpul tersebut beserta semua tetangganya selalu dapat diberi $\Delta(G) + 1$ warna, karena himpunan ini memuat paling banyak $\Delta(G) + 1$ simpul. Sekarang, perluas pewarnaannya! Pada setiap tahap, jika Anda meninjau simpul yang telah diwarnai, sebagian tetangganya mungkin telah diwarnai dan sebagian lainnya belum. Namun, dalam keadaan apa pun, simpul tersebut dan semua tetangganya dapat diberi warna berbeda, karena terdapat paling banyak $\Delta(G)$ tetangga, ditambah satu simpul yang sedang ditinjau.

Bahkan, terdapat contoh graf yang memenuhi $\chi(G) = \Delta(G)+1$. Untuk sembarang n, graf lengkap K_n memiliki bilangan kromatik n, tetapi $\Delta(K_n) = n-1$ (karena setiap simpul bertetangga dengan setiap simpul *lainnya*). Selain itu, setiap siklus *ganjil* memiliki bilangan kromatik 3, sedangkan derajat setiap simpul dalam siklus adalah 2. Ternyata hanya dua jenis contoh inilah yang menghasilkan kesamaan, suatu hasil yang dikenal sebagai Teorema Brooks.

Teorema 2.5.5 Teorema Brooks.

Setiap graf G memenuhi $\chi(G) \leq \Delta(G)$, kecuali jika G merupakan graf lengkap atau siklus ganjil; dalam hal tersebut, $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Bukti teorema ini *cukup* rumit sehingga tidak akan kita sajikan di sini (meskipun Anda diminta membuktikan suatu kasus khusus dalam latihan). Pembaca yang menyukai tantangan dianjurkan mencari buku teori graf untuk memperoleh petunjuk

[9] Terdapat kelas-kelas graf khusus yang dapat dibuktikan sempurna. Salah satunya adalah kelas graf **kordal**, yang memiliki sifat bahwa setiap siklus dalam graf memuat **tali busur**—sisi di antara dua simpul pada siklus yang tidak bertetangga di sepanjang siklus tersebut.

tentang cara membuktikan teorema tersebut.

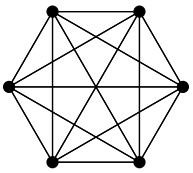
2.5.3 Pewarnaan Sisi

Bilangan kromatik suatu graf berkaitan dengan pewarnaan simpul, tetapi kita juga dapat menanyakan pewarnaan sisi. Seperti pada pewarnaan simpul, kita dapat mensyaratkan bahwa sisi-sisi yang bertetangga harus diberi warna berbeda. Di sini, dua sisi dianggap bertetangga apabila keduanya berinsiden dengan simpul yang sama. Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai sisi-sisi graf G secara tepat disebut **indeks kromatik** G, yang ditulis $\chi'(G)$.

Contoh 2.5.6

Enam orang teman memutuskan untuk menghabiskan sore dengan bermain catur. Setiap orang akan bermain satu kali melawan setiap orang lainnya. Mereka memiliki cukup banyak perangkat catur, tetapi tidak seorang pun ingin memainkan lebih dari satu pertandingan pada saat yang sama. Setiap pertandingan berlangsung selama satu jam (berkat jam catur mereka yang praktis). Berapa jam turnamen tersebut akan berlangsung?

Penyelesaian. Representasikan setiap pemain dengan sebuah simpul dan tempatkan sebuah sisi di antara dua pemain apabila mereka saling bertanding. Dalam kasus ini, kita memperoleh graf K_6:



Kita harus mewarnai sisi-sisinya; setiap warna merepresentasikan jam yang berbeda. Karena sisi-sisi berbeda yang berinsiden dengan simpul yang sama akan diberi warna berbeda, tidak ada pemain yang memainkan dua pertandingan (sisi) berbeda pada saat yang sama. Jadi, kita perlu mengetahui indeks kromatik K_6.

Perhatikan bahwa pasti berlaku $\chi'(K_6) \geq 5$ karena terdapat simpul berderajat 5. Ternyata 5 warna sudah cukup (cobalah temukan pewarnaan semacam itu). Oleh karena itu, keenam teman tersebut akan bermain selama 5 jam.

Menariknya, jika salah satu teman dalam contoh di atas pergi, kelima pecatur yang tersisa tetap memerlukan 5 jam: indeks kromatik K_5 juga 5.

Secara umum, apa yang dapat kita katakan tentang indeks kromatik? Tentu saja $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Namun, seberapa jauh lebih besar nilainya? Ternyata hanya sedikit lebih besar.

Teorema 2.5.7 Teorema Vizing.

Untuk sembarang graf G, indeks kromatik $\chi'(G)$ bernilai $\Delta(G)$ atau $\Delta(G) + 1$.

Sekilas, teorema ini membuat indeks kromatik tampak kurang menarik. Namun, menentukan suatu graf termasuk dalam kasus yang mana tidak selalu mudah. Graf yang memenuhi $\chi'(G) = \Delta(G)$ disebut *kelas 1*, sedangkan graf lainnya disebut *kelas 2*. Graf bipartit selalu memenuhi $\chi'(G) = \Delta(G)$, sehingga termasuk kelas 1 (hal ini dibuktikan oleh König pada tahun 1916, beberapa dasawarsa sebelum Vizing membuktikan teoremanya pada tahun 1964). Pada tahun 1965, Vizing membuktikan bahwa semua graf planar dengan $\Delta(G) \geq 8$ termasuk kelas 1, tetapi hal ini tidak berlaku bagi semua graf planar dengan $2 \leq \Delta(G) \leq 5$. Vizing mengajukan konjektur bahwa semua graf planar dengan $\Delta(G) = 6$ atau $\Delta(G) = 7$ termasuk kelas 1; kasus $\Delta(G) = 7$ dibuktikan pada tahun 2001 oleh Sanders dan Zhao; kasus $\Delta(G) = 6$ masih terbuka.

Teori Ramsey. Ada cara menarik lain untuk meninjau pewarnaan sisi, yang sangat berbeda dari pembahasan kita sejauh ini. Bagaimana jika setiap sisi graf kita warnai merah atau biru? Dapatkah kita melakukannya tanpa, misalnya, membentuk segitiga *monokromatik* (yaitu, segitiga yang seluruh sisinya merah atau seluruh sisinya biru)? Untuk graf tertentu, jawabannya tentu saja ya. Cobalah melakukannya untuk K_4. Bagaimana dengan K_5? K_6? Sampai sejauh mana kita dapat melakukannya?

Masalah di atas tidak terlalu sulit dan merupakan latihan yang menyenangkan. Kita dapat memperluas pertanyaan tersebut dengan berbagai cara. Bagaimana jika kita memiliki tiga warna? Bagaimana jika kita berusaha menghindari graf lain? Mengejutkan bahwa masih sangat sedikit yang diketahui tentang pertanyaan-pertanyaan ini. Sebagai contoh, kita mengetahui bahwa diperlukan hingga K_{17} untuk memaksa terbentuknya segitiga monokromatik dengan tiga warna, tetapi belum diketahui seberapa besar graf yang diperlukan jika digunakan lebih banyak warna. Demikian pula, kita mengetahui bahwa dengan dua warna, K_{18} adalah graf terkecil yang memaksa terbentuknya salinan monokromatik K_4, tetapi untuk memaksa terbentuknya K_5 monokromatik, hasil terbaik yang kita miliki masih berupa rentang, yaitu dari K_{43} hingga K_{49}. Jika Anda tertarik pada pertanyaan semacam ini, bidang teori graf ini disebut teori Ramsey. Silakan pelajari lebih lanjut.

2.5.4 Pertanyaan Bacaan

1. Benar atau salah: jika suatu graf memuat simpul berderajat 5, bilangan kromatik graf tersebut sedikitnya 5. Jelaskan.

2. Dengan kata-kata Anda sendiri, jelaskan perbedaan antara bilangan kromatik dan indeks kromatik.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu lebih jauh.

2.5.5 Latihan Soal

1. Setiap masalah berikut dapat diselesaikan dengan mencari bilangan kromatik atau indeks kromatik suatu graf.

Untuk setiap masalah, tentukan apakah penyelesaiannya memerlukan pewarnaan sejati pada simpul atau pada sisi graf. Catatan: informasi yang diberikan mungkin belum cukup untuk benar-benar menyelesaikan masalah, dan itu tidak menjadi persoalan. Anda hanya perlu menentukan apakah pada prinsipnya masalah tersebut merupakan penerapan pewarnaan sisi atau pewarnaan simpul.

(a) Profesor Snape menyimpan bahan-bahan ramuan dalam sesedikit mungkin lemari, tetapi beberapa bahan tidak boleh disimpan dalam lemari yang sama karena dapat berinteraksi secara berbahaya. Berapa banyak lemari yang diperlukan?

(b) Dalam sebuah acara perkenalan singkat, setiap peserta harus berbicara selama 5 menit dengan setiap peserta lain secara bergiliran. Berapa lama acara tersebut harus berlangsung?

(c) Lima mahasiswa akan mengikuti wawancara magang dengan empat perusahaan dalam sebuah bursa kerja. Berapa banyak sesi waktu wawancara yang diperlukan?

(d) Departemen matematika ingin menjadwalkan ujian tengah semester bersama yang masing-masing berlangsung sehari selama libur semester. Seorang mahasiswa yang mengambil dua mata kuliah harus mengikuti kedua ujian itu pada hari yang berbeda, dan inilah satu-satunya kendala penjadwalannya. Berapa hari ujian yang diperlukan?

2. Berapakah bilangan kromatik setiap graf berikut?

P_{13} _____
C_4 _____
C_{13} _____
$K_{6,8}$ _____
K_7 _____

3. Berapakah ***indeks*** kromatik setiap graf berikut?

P_{14} _____
C_{12} _____
C_5 _____
$K_{4,9}$ _____
K_8 _____

4. Pernyataan-pernyataan berikut membahas bilangan kromatik $\chi(G)$ dan indeks kromatik $\chi'(G)$ suatu graf. Kita menggunakan $\Delta(G)$ untuk derajat maksimum G.

Apakah pernyataan-pernyataan berikut benar atau salah?

(a) Jika suatu graf memiliki simpul berderajat 6, maka indeks kromatik graf tersebut sekurang-kurangnya 6.

(b) $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

(c) Indeks kromatik setiap graf planar paling besar 4.

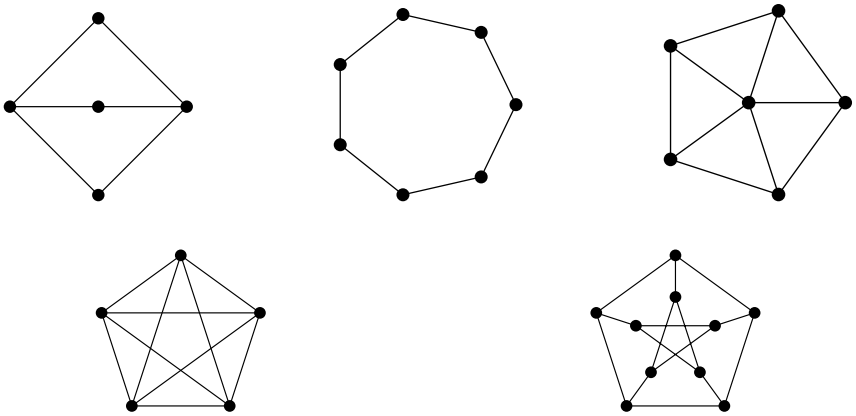
(d) Untuk setiap siklus, indeks kromatik sama dengan bilangan kromatik.

2.5.6 Latihan Tambahan

1. Berapakah jumlah warna paling sedikit yang diperlukan untuk mewarnai simpul-simpul $K_{4,5}$ secara tepat? Dengan kata lain, tentukan bilangan kromatik graf tersebut.

2. Gambarlah sebuah graf dengan bilangan kromatik 6 (yaitu graf yang memerlukan 6 warna untuk mewarnai simpul-simpulnya secara tepat). Dapatkah graf Anda berupa graf planar? Jelaskan.

3. Tentukan bilangan kromatik setiap graf berikut.



4. Sekelompok 10 teman memutuskan pergi ke sebuah pondok di hutan (tempat yang tentunya mustahil menjadi lokasi terjadinya masalah). Sayangnya, beberapa di antara mereka pernah berpacaran satu sama lain dan hubungan mereka masih agak canggung. Untuk mencapai pondok tersebut, mereka perlu membagi diri ke dalam sejumlah mobil, dan dua orang yang pernah berpacaran tidak boleh berada di mobil yang sama.

(a) Berapakah jumlah mobil paling sedikit yang diperlukan jika semua hubungan tersebut hanya bersifat heteroseksual? Representasikan sebuah contoh situasi semacam itu dengan graf. Jenis graf apakah yang Anda

peroleh?

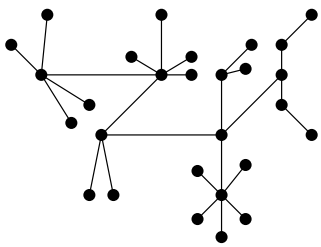
(b) Karena beberapa teman tersebut pernah berpacaran, terdapat pula konflik di antara teman-teman dengan gender yang sama, seperti tercantum di bawah ini. Sekarang, berapakah jumlah mobil bebas konflik paling sedikit yang dapat mereka gunakan untuk pergi ke pondok?

Teman	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Konflik	CFJ	J	AEF	H	CFG	ACEGI	EFI	D	AFG	B

5. Berapakah jumlah warna paling sedikit yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul-simpul kubus sehingga tidak ada dua simpul bertetangga yang diberi warna sama?

6. Buktikan bahwa bilangan kromatik setiap pohon adalah dua. Ingat bahwa pohon adalah graf terhubung yang tidak memiliki siklus.

(a) Perhatikan pohon berikut. Jika Anda mewarnai simpul paling kiri dengan warna merah, warna apakah yang harus diberikan kepada tetangganya? Warna apakah yang harus diberikan kepada tetangga-tetangga dari simpul tersebut? Jelaskan suatu prosedur untuk mewarnai pohon berikut dengan dua warna.



(b) Jika Anda menggunakan prosedur yang sama untuk mewarnai suatu siklus, apakah Anda selalu dapat mewarnainya dengan dua warna?

(c) Buktikan bahwa prosedur Anda dari bagian (a) selalu berhasil untuk setiap pohon.

(d) Sekarang, berikan bukti lain dengan menggunakan induksi bahwa setiap pohon memiliki bilangan kromatik 2.

7. Kedua masalah berikut dapat diselesaikan dengan menggunakan pewarnaan graf. Untuk setiap masalah, representasikan situasinya dengan graf, nyatakan apakah Anda perlu mewarnai simpul atau sisi beserta alasannya, lalu gunakan pewarnaan tersebut untuk menyelesaikan masalah.

(a) Liga Quidditch Anda memiliki 5 tim. Minggu depan akan diadakan turnamen yang mempertemukan setiap tim dengan setiap tim lainnya tepat satu kali. Setiap tim hanya dapat memainkan paling banyak satu pertandingan per hari, tetapi tersedia cukup waktu dalam sehari untuk mengadakan beberapa pertandingan. Berapa harikah waktu paling

singkat yang diperlukan untuk menyelenggarakan turnamen tersebut?

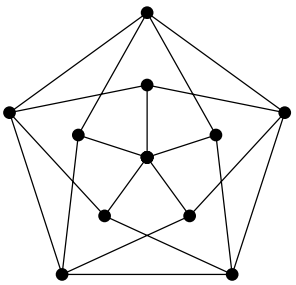
(b) Sepuluh anggota Klub Matematika akan berkendara ke sebuah konferensi matematika di negara bagian tetangga. Namun, beberapa siswa tersebut pernah berpacaran dan hubungan mereka masih agak canggung. Setiap siswa mencantumkan siswa lain yang tidak bersedia berbagi mobil dengannya; konflik-konflik tersebut dicatat dalam tabel berikut. Berapakah jumlah mobil paling sedikit yang diperlukan klub untuk melakukan perjalanan itu? Abaikan keterbatasan jumlah tempat duduk; cukup hindari konflik yang ada.

Siswa:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Konflik:	BEJ	ADG	HJ	BF	AI	DJ	B	CI	EHJ	ACFI

8. Buktikan teorema enam warna: setiap graf planar memiliki bilangan kromatik paling banyak 6. Jangan mengasumsikan teorema empat warna (yang pembuktiannya JAUH lebih sulit), tetapi Anda boleh mengasumsikan fakta bahwa setiap graf planar memuat sebuah simpul berderajat paling banyak 5.

9. Tidak semua graf merupakan graf sempurna. Berikan contoh graf dengan bilangan kromatik 4 yang tidak memuat salinan K_4. Dengan kata lain, tidak boleh terdapat 4 simpul yang seluruh pasangannya saling bertetangga.

10. Tentukan bilangan kromatik graf berikut dan buktikan bahwa jawaban Anda benar.



11. Buktikan bahwa setiap graf terhubung G yang memuat setidaknya satu simpul dengan derajat kurang dari $\Delta(G)$ (derajat maksimum di antara semua simpul dalam G) memiliki bilangan kromatik paling banyak $\Delta(G)$.

12. Anda memiliki satu set huruf alfabet magnetis (masing-masing satu dari 26 huruf dalam alfabet) yang perlu dimasukkan ke dalam kotak-kotak. Untuk alasan yang jelas, Anda tidak ingin menempatkan dua huruf berurutan dalam kotak yang sama. Berapakah jumlah kotak paling sedikit yang diperlukan (dengan asumsi setiap kotak mampu menampung huruf sebanyak yang diperlukan)?

13. Misalkan Anda mewarnai setiap sisi suatu graf dengan warna merah atau biru (tanpa mensyaratkan bahwa sisi-sisi bertetangga harus diberi warna berbeda). Sifat apakah yang harus dimiliki graf tersebut agar dijamin terdapat suatu simpul yang bersisian dengan tiga sisi berwarna sama? Buktikan jawaban Anda.

14. Buktikan bahwa jika Anda mewarnai setiap sisi K_6 dengan warna merah atau biru, pasti terdapat sebuah segitiga monokromatik (yaitu segitiga yang seluruh sisinya merah atau seluruh sisinya biru).

2.6 Relasi dan Graf

Tujuan Pembelajaran

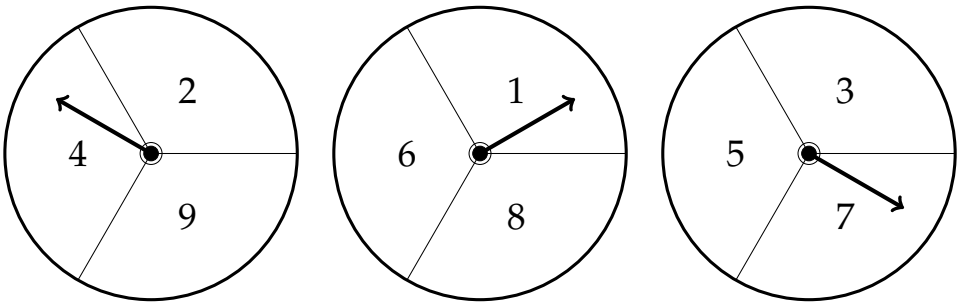
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menjelaskan hubungan antara graf dan relasi.
2. Menentukan apakah suatu relasi bersifat refleksif, simetris, atau transitif.
3. Menggunakan relasi ekuivalensi untuk mempartisi suatu himpunan dan menggunakan partisi untuk mendefinisikan relasi ekuivalensi.

2.6.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Perhatikan tiga roda putar di bawah ini.



A *B* *C*

Jika Anda dan seorang teman masing-masing memilih roda putar yang berbeda lalu memutarnya, kita dapat mempertimbangkan sembilan hasil yang mungkin. Sebagai contoh, untuk roda putar A dan B, hasilnya adalah

$$(2,1),(2,6),(2,8),(4,1),(4,6),(4,8),(9,1),(9,6),(9,8).$$

Hal ini menunjukkan bahwa roda putar A akan menang lima dari sembilan kali.

Bandingkan kombinasi roda putar lainnya. Roda putar manakah yang terbaik?

Pada bagian ini, kita akan mempelajari generalisasi graf yang disebut **relasi**. Kita akan melihat bagaimana relasi dapat direpresentasikan oleh graf dan bagaimana

graf dapat digunakan untuk merepresentasikan relasi. Kita juga akan mempertimbangkan beberapa sifat yang mungkin dimiliki relasi dan bagaimana sifat-sifat tersebut dapat digunakan untuk mengklasifikasikan relasi ke dalam berbagai jenis.

Aktivitas Pratinjau

Dalam suatu bulan, beberapa tanggal lebih mirip satu sama lain daripada tanggal lainnya. Sebagai contoh, tanggal 3 lebih menyerupai tanggal 24 daripada tanggal 15. Apa yang mungkin dimaksud dengan pernyataan ini? Kita akan mempelajari dua penafsiran yang membuatnya benar.

1. Kita mengatakan bahwa dua bilangan antara 1 dan 31 berelasi, ditulis $a \sim b$, jika selisihnya merupakan kelipatan 7. Sebagai contoh, $3 \sim 24$ karena $24 - 3 = 3 \cdot 7$, tetapi $3 \not\sim 15$ karena $15 - 3 = 12$, yang bukan kelipatan 7.

(a) Manakah di antara pernyataan berikut yang benar? Dengan kata lain, pasangan bilangan manakah yang berelasi menurut definisi di atas?

- □ $4 \sim 14$
- □ $7 \sim 14$
- □ $10 \sim 17$
- □ $17 \sim 24$
- □ $10 \sim 24$
- □ $20 \sim 10$
- □ $31 \sim 3$
- □ $25 \sim 25$

(b) Manakah di antara pernyataan berikut yang benar tentang relasi $\sim$ dalam kasus ini?

- □ $a \sim a$ untuk setiap bilangan a
- □ $a \not\sim a$ untuk setiap bilangan a
- □ Untuk setiap bilangan a dan b, jika $a \sim b$, maka $b \sim a$
- □ Untuk setiap bilangan a dan b, jika $a \sim b$ dan $b \sim a$, maka $a = b$
- □ Untuk setiap bilangan a dan b, jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \sim c$

(c) Kita akan menulis $[a]$ untuk himpunan semua bilangan yang berelasi dengan a. Sebagai contoh, $[7] = \{7, 14, 21, 28\}$. Tentukan masing-masing himpunan berikut:

- $[1] =$ _____;
- $[2] =$ _____;
- $[3] =$ _____;

- $[4]$ = _____;
- $[5]$ = _____;
- $[6]$ = _____.

Adakah bilangan yang berada dalam lebih dari satu himpunan $[a]$ di atas?

2. Jika Anda membagi kelipatan 7 dengan 7, hasilnya adalah bilangan bulat. Jika membagi bilangan lain dengan 7, Anda dapat menuliskan hasilnya sebagai desimal atau sebagai hasil bagi dan sisa. Sebagai contoh, $19 \div 7$ menghasilkan 2 dengan sisa 5 karena kita dapat menulis $19 = 2 \cdot 7 + 5$. Sisa ini disebut residu modulo. Dalam pemrograman Python (dan banyak bahasa lain), operator modulo ditulis sebagai `%`. Sebagai contoh, `19 % 7` adalah `5`. Cobalah untuk beberapa bilangan.

(a) Tentukan semua bilangan a antara 1 dan 31 yang kongruen dengan 5 mod 7. Artinya, tentukan semua a sedemikian sehingga `a % 7 = 5`.

(b) Karena operasi modulo merupakan fungsi, setiap bilangan memiliki tepat satu residu modulo 7. Artinya, kelas-kelas residu mempartisi bilangan 1 sampai 31: setiap bilangan berada dalam tepat satu himpunan bilangan dengan residu tertentu. Kita telah menemukan himpunan untuk residu 5. Tentukan himpunan-himpunan lainnya.

- `a % 7 = 0`: _____;
- `a % 7 = 1`: _____;
- `a % 7 = 2`: _____;
- `a % 7 = 3`: _____;
- `a % 7 = 4`: _____;
- `a % 7 = 6`: _____.

(c) Kita dapat menggunakan nilai-nilai residu modulo untuk mendefinisikan relasi pada bilangan 1 sampai 31. Kita mengatakan bahwa $a \sim b$ jika `a % 7 = b % 7`. Dengan kata lain, dua bilangan berelasi jika keduanya berada dalam himpunan yang sama pada partisi yang ditemukan di atas.

Manakah di antara pernyataan berikut yang benar? Dengan kata lain, pasangan bilangan manakah yang berelasi menurut relasi modulus ini?

- ☐ $4 \sim 14$
- ☐ $7 \sim 14$
- ☐ $10 \sim 17$
- ☐ $17 \sim 24$
- ☐ $10 \sim 24$
- ☐ $20 \sim 10$

- $31 \sim 3$
- $25 \sim 25$

2.6.2 Relasi secara Umum

Graf merupakan salah satu cara untuk merepresentasikan hubungan di antara berbagai objek. Kita telah melihat cara menggunakan graf untuk merepresentasikan orang-orang yang berteman, kelas-kelas yang jadwalnya bertabrakan, atau stasiun radio yang terlalu berdekatan untuk menggunakan frekuensi yang sama. Namun, tidak semua cara menghubungkan berbagai hal dapat direpresentasikan oleh graf. Pada bagian ini, kita akan membahas konsep relasi yang lebih umum dan melihat hubungannya dengan graf.

Perhatikan contoh relasi antara mahasiswa dan mata kuliah yang berlaku ketika seorang mahasiswa mengikuti mata kuliah tersebut (pada semester tertentu). Ini merupakan relasi antara dua himpunan berbeda (mahasiswa dan mata kuliah). Jika kita menggunakan graf untuk menggambarkan relasi ini, graf tersebut bersifat *bipartit* karena dua mahasiswa tidak pernah saling berelasi dan dua mata kuliah juga tidak pernah saling berelasi.

Graf sebenarnya terdiri atas himpunan simpul dan himpunan sisi: $G = (V, E)$; setiap anggota himpunan E merupakan subhimpunan dua unsur dari V. Jika kita ingin menonjolkan sifat bipartit graf, kita dapat membagi V menjadi dua himpunannya dan menulis $G = ((A, B), E)$. Dalam notasi ini, agar graf bersifat bipartit, setiap sisi harus berupa pasangan (a, b), dengan a anggota A dan b anggota B. Dengan kata lain, setiap sisi merupakan anggota **hasil kali Kartesius** dari A dan B, yang ditulis

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

(Cara lain menyatakannya adalah bahwa $A \times B$ merupakan "himpunan semua pasangan terurut yang terdiri atas anggota A dan B.")

Keterangan 2.6.1 Ada satu hal halus yang perlu kita tunjukkan: graf bipartit yang telah dideskripsikan sebenarnya memiliki *sisi berarah* dari A ke B karena kita mempertimbangkan pasangan *terurut*. Menurut definisi graf kita, sisi merupakan *subhimpunan* dua unsur dari himpunan simpul, sedangkan subhimpunan tidak terurut. Selama A dan B saling lepas, tidak ada kerancuan. Namun, kita akan menjumpai relasi ketika A dan B berbagi beberapa anggota, sementara urutan tetap penting. Kita akan segera membahasnya lebih lanjut.

Contoh ini menggambarkan dengan tepat apa yang dimaksud dengan relasi biner secara umum. Berikut definisi cermatnya.

Definisi 2.6.2

Sebuah **relasi biner** adalah himpunan pasangan terurut. Kita mengatakan bahwa relasi biner tersebut merupakan **relasi pada himpunan** A **dan** B jika pasangan-pasangan terurutnya membentuk subhimpunan dari $A \times B$. Kita

mengatakan bahwa relasi biner tersebut merupakan **relasi pada himpunan** A jika pasangan-pasangan terurutnya membentuk subhimpunan dari $A \times A$.

Perhatikan bahwa $A \times A$ adalah himpunan semua pasangan terurut yang kedua koordinatnya merupakan anggota A.

Contoh 2.6.3

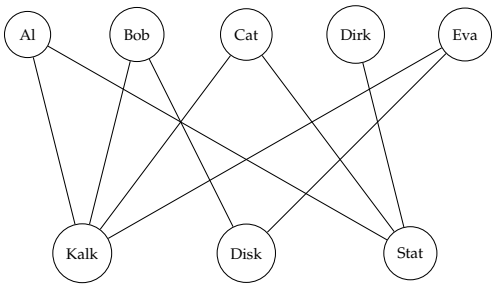
Perhatikan himpunan mahasiswa A dan himpunan mata kuliah B. Misalkan $A = \{\text{Al, Bob, Cat, Dirk, Eva}\}$ dan $B = \{\text{Kalkulus, Matematika Diskret, Statistika}\}$. Semua mahasiswa kecuali Dirk mengikuti Kalkulus, Bob dan Eva mengikuti Matematika Diskret, sedangkan Al, Cat, dan Dirk mengikuti Statistika.

Kita dapat mendefinisikan relasi T berupa "mengikuti" antara A dan B, yang berlaku bagi seorang mahasiswa dan suatu mata kuliah tepat ketika mahasiswa tersebut mengikuti mata kuliah itu. Tuliskan relasi ini sebagai subhimpunan dari $A \times B$ dan gambarlah graf bipartitnya.

Penyelesaian. Untuk menuliskan relasi tersebut secara tepat, kita cukup memberikan himpunan pasangan terurut:

$$\begin{aligned} T = \{&(\text{Al, Kalkulus}), (\text{Al, Statistika}),\\ &(\text{Bob, Kalkulus}), (\text{Bob, Matematika Diskret})\\ &(\text{Cat, Kalkulus}), (\text{Cat, Statistika})\\ &(\text{Dirk, Statistika})\\ &(\text{Eva, Kalkulus}), (\text{Eva, Matematika Diskret})\} \end{aligned}$$

Kita dapat menggambar relasi ini sebagai graf bipartit:



Contoh 2.6.4

Perhatikan relasi M berupa "merupakan kelipatan dari" pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tuliskan relasi ini sebagai himpunan pasangan terurut. Apakah relasi ini membentuk graf?

Penyelesaian. Pertama, mari kita pikirkan anggota mana yang seharusnya

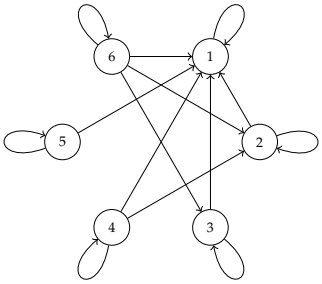
berelasi dan mana yang tidak. Kita mengetahui bahwa 6 merupakan kelipatan dari 2, sehingga relasi berlaku bagi pasangan $(6, 2)$. Namun, 6 bukan kelipatan dari 4, sehingga pasangan $(6, 4)$ tidak memenuhi relasi tersebut. Lebih tepatnya, kita mengatakan bahwa $(6, 2) \in M$, tetapi $(6, 4) \notin M$.

Mari kita cantumkan semua anggota M:

$$M = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), \\ (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}.$$

Relasi ini bukan graf karena dua alasan: pertama, anggota-anggota berelasi dengan dirinya sendiri; kedua, urutan anggota dalam relasi tidak simetris (misalnya, 6 berelasi dengan 2, tetapi 2 tidak berelasi dengan 6).

Namun, kita masih dapat menggambar sesuatu yang menyerupai graf untuk menggambarkan relasi ini. Karena arah relasi penting, kita akan memiliki sisi *berarah*. Sifat ini saja akan menghasilkan **graf berarah**. Karena simpul dapat memiliki sisi menuju dirinya sendiri, struktur tersebut kita sebut **multigraf**; jadi relasi ini dapat dipandang sebagai **multigraf berarah**.



Relasi biner R pada himpunan A dan B selalu dapat "dibalik" untuk menghasilkan relasi pada himpunan B dan A. Artinya, R menyatakan bagaimana anggota A berelasi dengan anggota B; anggota B tersebut berelasi dengan anggota A, hanya saja secara *invers* (terbalik). Relasi baru ini kita sebut **invers** dari R.

Definisi 2.6.5

Diberikan relasi biner R, definisikan R^{-1} sebagai **invers** dari R, yaitu himpunan

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Relasi T dari Contoh 2.6.3 menyatakan bahwa seorang mahasiswa mengikuti mata kuliah tertentu. Relasi invers T^{-1} menyatakan bahwa suatu mata kuliah diikuti oleh mahasiswa tertentu. Sebagai contoh, (Kalkulus, Al) merupakan anggota T^{-1}. Secara grafis, gambarnya tidak akan berbeda, meskipun kita dapat menempatkan himpunan mata kuliah di atas dan mahasiswa di bawah.

Relasi M dari Contoh 2.6.4 menyatakan, misalnya, bahwa 6 merupakan kelipatan

dari 2 karena $(6, 2) \in M$. Untuk inversnya, kita memiliki $(2, 6) \in M^{-1}$, yang berarti 2 merupakan faktor dari 6. Dalam contoh ini, kita telah merepresentasikan relasi sebagai multigraf berarah. Graf inversnya akan tampak persis sama, tetapi semua panah mengarah ke arah yang berlawanan.

Cara lain untuk membuat relasi baru adalah menggabungkan dua relasi. Misalkan, selain relasi "mengikuti" dari Contoh 2.6.3, kita mendefinisikan relasi "diajar oleh" yang memasangkan setiap mata kuliah dengan pengajarnya. Misalkan Profesor X mengajar Kalkulus. Dalam hal itu, karena Al mengikuti Kalkulus dan Kalkulus diajar oleh Profesor X, kita dapat menyimpulkan bahwa Al mengikuti mata kuliah yang diajar Profesor X.

Definisi 2.6.6

Misalkan R merupakan relasi dari himpunan A ke B dan S merupakan relasi dari B ke C. **Komposisi** R dan S adalah

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S \text{ untuk suatu } b \in B\}$$

Perhatikan urutan penulisan kedua relasi: $S \circ R$, bukan $R \circ S$. Alasan kita menulisnya demikian (yang mungkin tampak terbalik) adalah agar sesuai dengan notasi yang lazim untuk komposisi *fungsi*. Sebenarnya, fungsi tidak lain adalah jenis relasi tertentu!

Contoh 2.6.7

Tuliskan relasi $P \circ T$, yaitu komposisi relasi dari Contoh 2.6.3 dan relasi

$$P = \{(\text{Kalkulus, Prof. X}), (\text{Matematika Diskret, Prof. L}),$$
$$(\text{Statistika, Prof. X}), (\text{Statistika, Prof. S})\}.$$

Perhatikan bahwa di sini kita menyatakan mata kuliah Statistika diajar bersama oleh Profesor X dan S.

Penyelesaian. Relasi yang kita cari adalah relasi antara mahasiswa dan profesor. Kita dapat memulai dari setiap anggota T dan *memperluasnya* dengan mengikuti mata kuliah menuju profesornya melalui P. Sebagai contoh, mulai dari Cat dan perhatikan bahwa (Cat, Kalkulus) $\in T$. Sekarang perhatikan dengan apa Kalkulus berelasi melalui P: (Kalkulus, Prof. X) $\in P$. Jadi, kita dapat menggabungkan keduanya untuk menyimpulkan bahwa (Cat, Prof. X) $\in P \circ T$.

Pendekatan alternatif adalah mempertimbangkan pasangan mahasiswa dan profesor yang dihubungkan oleh mata kuliah yang sama. Apakah pasangan (Al, Prof. L) merupakan anggota komposisi? Tidak, karena tidak ada mata kuliah yang sekaligus diikuti Al dan diajar Profesor L. Di sisi lain, kita dapat menyimpulkan bahwa (Al, Prof. X) $\in P \circ T$ karena terdapat mata kuliah yang sama. Mata kuliah tersebut dapat berupa Kalkulus atau Statistika

(banyaknya langkah perantara yang sama tidak menjadi persoalan, asalkan terdapat setidaknya satu).

Berikut relasi lengkapnya:

$$P \circ T = \{(\text{Al}, \text{Prof. X}), (\text{Al}, \text{Prof. S}), (\text{Bob}, \text{Prof. X}), (\text{Bob}, \text{Prof. L}), (\text{Cat}, \text{Prof. X}), (\text{Cat}, \text{Prof. S}), (\text{Dirk}, \text{Prof. X}), (\text{Dirk}, \text{Prof. S}), (\text{Eva}, \text{Prof. X}), (\text{Eva}, \text{Prof. L})\}$$

Sesuatu yang menarik sering terjadi ketika suatu relasi dikomposisikan dengan inversnya. Anda mungkin pernah melihat hal serupa untuk *fungsi* dalam kalkulus atau aljabar: $f(x) = e^x$ memiliki fungsi invers $f^{-1}(x) = \ln(x)$, dan kita mengetahui bahwa $f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} = x$. Namun, fungsi adalah relasi yang setiap "masukan"-nya memiliki tepat satu "keluaran", sehingga tidak mengherankan bahwa komposisi dengan invers hanya menghasilkan fungsi identitas. Jika masukan dapat memiliki beberapa keluaran dan keluaran dapat memiliki beberapa masukan, kita memperoleh sesuatu yang lebih.

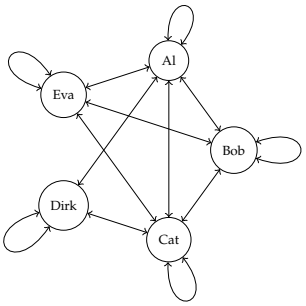
Contoh 2.6.8

Deskripsikan relasi $T^{-1} \circ T$ (menggunakan relasi T yang telah kita kenal dari Contoh 2.6.3). Apa yang dinyatakan relasi ini tentang mahasiswa dan mata kuliah?

Penyelesaian. Dengan mengikuti relasi tersebut, kita dapat memulai dengan menyatakan bahwa Al mengikuti Kalkulus dan Kalkulus diikuti oleh Al, sehingga Al berelasi dengan Al. Namun, Kalkulus juga diikuti oleh Bob, sehingga kini Al juga berelasi dengan Bob. Apakah Bob juga berelasi dengan Al? Ya, karena Bob mengikuti Kalkulus dan Kalkulus diikuti oleh Al.

Komposisi tersebut menyatakan pasangan mahasiswa mana yang mengikuti setidaknya satu mata kuliah yang sama. Ini mencakup hampir semua pasangan mahasiswa, kecuali Dirk tidak berelasi dengan Bob atau Eva karena keduanya tidak mengikuti Statistika, sedangkan Statistika adalah satu-satunya mata kuliah yang diikuti Dirk.

Alih-alih menuliskan relasi tersebut (yang hampir mencakup seluruh $A \times A$), berikut representasi grafnya.



Meskipun di sini kita menggambar multigraf berarah, panah yang mengarah ke kedua arah berarti bahwa sebenarnya kita cukup menggambar multigraf.

2.6.3 Sifat-Sifat Relasi

Mulai saat ini, kita hanya akan mempertimbangkan relasi pada satu himpunan (jadi, dari suatu himpunan ke dirinya sendiri). Untuk membantu memahami relasi-relasi ini, mari kita perhatikan beberapa sifat dasar yang mungkin dimiliki atau tidak dimiliki suatu relasi.

Definisi 2.6.9 Refleksif, Simetris, dan Transitif.

Misalkan R merupakan relasi pada himpunan A. Kita mengatakan bahwa

- R bersifat **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk semua $a \in A$.
- R bersifat **simetris** jika, untuk semua $a, b \in A$, apabila $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$.
- R bersifat **transitif** jika, untuk semua $a, b, c \in A$, apabila $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$.

Mari kita telaah setiap sifat ini dengan cermat.

Akan membantu jika kita mempertimbangkan beberapa contoh standar relasi pada himpunan. Sebagian besar relasi di sini akan ditulis menggunakan notasi *infiks*, yang berarti simbol relasi ditempatkan di antara dua objek yang direlasikan. Sebagai contoh, relasi *kurang dari* hampir selalu ditulis sebagai $2 < 6$, bukan $(2, 6) \in <$.

Contoh 2.6.10 Relasi refleksif dan nonrefleksif.

Suatu relasi bersifat refleksif ketika setiap anggota berelasi dengan dirinya sendiri. Relasi-relasi berikut bersifat refleksif:

- Relasi "kurang dari atau sama dengan" pada setiap himpunan bilangan. Apakah $3 \leq 3$? Lebih penting lagi, apakah setiap bilangan tidak lebih

besar daripada dirinya sendiri? Karena jawabannya ya, relasi ini bersifat refleksif.

- Relasi "berselisih paling banyak 3", yang berlaku bagi dua bilangan a dan b jika $|a - b| \leq 3$. Untuk membuktikan bahwa relasi ini refleksif, cukup perhatikan bahwa $|a - a| = 0 \leq 3$.
- Relasi "merupakan kelipatan dari" dari Contoh 2.6.4. Perhatikan bahwa multigraf berarah untuk relasi ini memiliki gelang pada setiap simpul.

Namun, relasi-relasi berikut tidak refleksif:

- Relasi "berjumlah nol", yang berlaku bagi bilangan a dan b jika $a + b = 0$. Perhatikan bahwa meskipun $0 + 0 = 0$, sehingga $(0, 0)$ merupakan anggota relasi, setiap bilangan lainnya tidak berelasi dengan dirinya sendiri.
- Setiap relasi yang dideskripsikan oleh graf. Ingat, graf tidak dapat memiliki sisi yang kembali membentuk gelang pada satu simpul, sehingga relasi sisi pada graf tidak refleksif. (Multigraf dapat bersifat refleksif ataupun tidak.)

Jika tidak ada anggota yang berelasi dengan dirinya sendiri (seperti pada relasi sisi suatu graf), relasi tersebut disebut **irefleksif**. Tentu saja, beberapa relasi tidak refleksif maupun irefleksif.

Memeriksa bahwa suatu relasi refleksif relatif mudah. Dua sifat lainnya dirumuskan sebagai implikasi, sehingga sedikit lebih rumit.

Contoh 2.6.11 Relasi simetris dan nonsimetris.

Pada dasarnya, relasi simetris berlaku "dua arah." Lebih tepatnya, jika a berelasi dengan b, maka b juga berelasi dengan a.

Relasi-relasi berikut bersifat simetris.

- Relasi "berselisih paling banyak 3": jika $|a - b| \leq 3$, maka $|b - a| \leq 3$.
- Relasi "berjumlah nol": jika $a + b = 0$, tentu $b + a = 0$.
- Untuk setiap graf, relasi sisi bersifat simetris. Tentu saja, untuk graf *berarah*, hal ini biasanya tidak benar.

Di sisi lain, relasi-relasi berikut tidak simetris.

- $\leq$ tidak simetris. Untuk membuktikan bahwa suatu relasi tidak simetris, kita cukup menemukan a dan b sedemikian sehingga $a \leq b$, tetapi $b \not\leq a$. Memang, $3 \leq 4$, tetapi $4 \not\leq 3$. Terbukti.
- Relasi "merupakan kelipatan dari" tidak simetris. 6 merupakan kelipatan dari 2, tetapi 2 bukan kelipatan dari 6.

Relasi yang tidak simetris dapat bersifat **antisimetris**, yang berarti bahwa *satu-satunya* keadaan ketika (a, b) dan (b, a) keduanya berada dalam relasi adalah ketika $a = b$. Perhatikan bahwa terdapat relasi yang tidak simetris maupun antisimetris.

Dalam bahasa relasi invers, suatu relasi simetris jika dan hanya jika relasi tersebut sama dengan inversnya.

Contoh 2.6.12 Relasi transitif dan nontransitif.

Jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c, apakah itu berarti a berelasi dengan c? Jika hal ini benar untuk semua a, b, dan c, relasi tersebut disebut transitif.

Berikut beberapa relasi transitif.

- $\leq$. Misalkan $a \leq b$ dan $b \leq c$. Jelas bahwa $a \leq c$.
- Relasi "merupakan kelipatan dari". Relasi ini cocok untuk dibuktikan: Misalkan a merupakan kelipatan dari b dan b merupakan kelipatan dari c. Maka $a = bk$ untuk suatu bilangan bulat k dan $b = cj$ untuk suatu bilangan bulat j. Dengan substitusi, $a = cjk$, sehingga a merupakan kelipatan dari c.

Namun, relasi-relasi berikut tidak transitif.

- Relasi "berselisih paling banyak 3" tidak transitif. Kita cukup menemukan tiga bilangan yang gagal memenuhi syarat tersebut. Bagaimana dengan 1, 3, dan 5? Di sini selisih 1 dan 3 paling banyak 3, begitu pula selisih 3 dan 5, tetapi $|1 - 5| = 4$, sehingga relasi tidak berlaku bagi $(1, 5)$.
- Relasi "berjumlah nol" tidak transitif. Perhatikan bahwa kita tidak pernah menyatakan a, b, dan c harus berupa bilangan yang berbeda. Misalkan $a = 5, b = -5$, dan $c = 5$. Maka $a + b = 0$ dan $b + c = 0$, sehingga relasi berlaku bagi (a, b) dan (b, c). Namun, $a + c = 10$, sehingga relasi tidak berlaku bagi (a, c).

Relasi sisi suatu graf dapat bersifat transitif atau tidak. Bagaimanakah bentuk graf jika relasi sisinya transitif?

2.6.4 Relasi Ekuivalensi

Sekarang kita akan melakukan sesuatu yang sangat lazim dalam matematika: Kita akan mengamati jenis relasi yang paling umum, mempertimbangkan sifat-sifatnya, kemudian mengklasifikasikan relasi lain yang juga memiliki sifat-sifat tersebut sebagai kelas relasi tertentu.

Relasi yang paling kita kenal adalah **kesamaan**. Sifat relasi apa saja yang dimiliki relasi kesamaan? Tentu setiap objek sama dengan dirinya sendiri, sehingga kesamaan bersifat *refleksif*. Jika $a = b$, maka $b = a$, sehingga kesamaan bersifat *simetris*. Jika $a = b$ dan $b = c$, maka $a = c$, sehingga kesamaan bersifat *transitif*.

Relasi lain apa yang bersifat *refleksif*, *simetris*, dan *transitif*? Tepat relasi-relasi yang berperilaku seperti kesamaan. Relasi demikian disebut **relasi ekuivalensi**.

Definisi 2.6.13 Relasi Ekuivalensi.

Relasi yang refleksif, simetris, dan transitif disebut **relasi ekuivalensi**.

Catatan 2.6.14 Contoh lain jenis relasi yang dimodelkan menurut relasi klasik adalah **urutan parsial**. Relasi ini refleksif, *antisimetris*, dan transitif, sama seperti relasi kurang dari atau sama dengan. Mungkin Anda telah memperhatikan bahwa relasi subhimpunan, yang ditulis $\subseteq$, terasa sangat mirip dengan $\leq$. Hal ini karena $\subseteq$ juga merupakan urutan parsial. Demikian pula relasi "merupakan kelipatan dari" yang kita lihat di atas.

Ada banyak hal menarik yang dapat kita katakan tentang urutan parsial dan himpunan yang diurutkannya secara parsial, yang disebut **himpunan terurut parsial** atau **poset**. Pembahasan itu kita simpan untuk kesempatan lain.

Tidak satu pun contoh yang telah kita bahas sejauh ini dalam bagian ini merupakan relasi ekuivalensi, tetapi relasi ekuivalensi muncul di mana-mana dalam matematika. Relasi ini begitu umum sehingga mudah terlewatkan sebagai sesuatu yang layak dibahas. Mari kita lihat beberapa contoh.

Contoh 2.6.15

Buktikan bahwa relasi $\equiv_2$, yang berlaku bagi dua bilangan bulat jika selisihnya genap, merupakan relasi ekuivalensi. Artinya, $a \equiv_2 b$ jika dan hanya jika $b - a = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k.

Penyelesaian. Kita cukup memeriksa tiga sifat yang disyaratkan.

1. $\equiv_2$ bersifat refleksif: untuk setiap bilangan bulat a, kita memiliki $a - a = 0$ dan $0 = 2k$ untuk $k = 0$, sehingga $a \equiv_2 a$.

2. $\equiv_2$ bersifat simetris: Tetapkan sembarang bilangan bulat a dan b, lalu asumsikan $a \equiv_2 b$. Ini berarti $b - a = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Bagaimana dengan $a - b$? Kita memiliki $a - b = 2(-k)$, dan $-k$ merupakan bilangan bulat, sehingga $b \equiv_2 a$.

3. $\equiv_2$ bersifat transitif: Tetapkan sembarang bilangan bulat a, b, dan c, lalu asumsikan $a \equiv_2 b$ dan $b \equiv_2 c$. Ini berarti $b - a = 2k$ dan $c - b = 2j$ untuk beberapa bilangan bulat k dan j. Bagaimana dengan $c - a$? Kita memiliki

$$c - a = (c - b) + (b - a) = 2k + 2j = 2(k + j).$$

Karena $k + j$ merupakan bilangan bulat, kita memperoleh $a \equiv_2 c$ sebagaimana diperlukan.

Contoh 2.6.16

Kita sebut dua graf "ekuivalen-barisan-derajat" jika keduanya memiliki barisan derajat yang sama. Apakah ini merupakan relasi ekuivalensi?

Penyelesaian. Ya. Jelas bahwa setiap graf memiliki barisan derajat yang sama dengan dirinya sendiri, sehingga relasi ini refleksif. Jika G_1 memiliki barisan derajat yang sama dengan G_2, maka G_2 memiliki barisan derajat yang sama dengan G_1, sehingga relasi ini simetris. Terakhir, jika G_1 memiliki barisan derajat yang sama dengan G_2, yang memiliki barisan derajat yang sama dengan G_3, ketiganya memiliki barisan derajat yang sama. Jadi, G_1 memiliki barisan derajat yang sama dengan G_3 (yakni, relasi ini transitif).

Contoh ini hampir terlalu jelas. Hal itu karena kita mengatakan dua objek berelasi jika suatu sifat yang terdefinisi dengan baik dari kedua objek tersebut *sama*, sedangkan kesamaan memenuhi sifat-sifat relasi ekuivalensi. Tujuan kita selanjutnya adalah memahami hal ini dengan lebih baik dan melihat bahwa sifat inilah yang tepatnya menghasilkan relasi ekuivalensi.

2.6.5 Kelas Ekuivalensi dan Partisi

Diberikan relasi *apa pun* R, kita dapat mengamati *himpunan* anggota yang berelasi dengan suatu anggota tertentu. Untuk relasi "mengikuti", kita dapat menanyakan mata kuliah apa yang diikuti Al (yakni, mata kuliah yang berelasi dengan Al). Untuk relasi "merupakan kelipatan dari", kita dapat menanyakan bilangan apa saja yang membagi 6. Salah satu cara mempelajari relasi adalah mempelajari himpunan objek yang berelasi dengan setiap anggota.

Definisi 2.6.17

Misalkan R merupakan relasi pada himpunan A, dan a merupakan anggota A. **Kelas relasi** dari a, yang ditulis $[a]$, adalah himpunan semua anggota b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ (himpunan b yang berelasi dengan a melalui R). Artinya,

$$[a] = \{b \in A : (a, b) \in R\}.$$

Jika R merupakan relasi ekuivalensi, kelas-kelas relasinya disebut **kelas ekuivalensi**.

Contoh 2.6.18

Tentukan kelas-kelas relasi untuk relasi "merupakan kelipatan dari" pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Penyelesaian. Terdapat enam kelas relasi karena setiap anggota memiliki kelas relasi. Kelas-kelas tersebut adalah:

$$\begin{aligned}[1] &= \{1\} \\ [2] &= \{1, 2\} \\ [3] &= \{1, 3\} \\ [4] &= \{1, 2, 4\} \\ [5] &= \{1, 5\} \\ [6] &= \{1, 2, 3, 6\}.\end{aligned}$$

Sebagai contoh, kita memperoleh [4] dengan mempertimbangkan semua pasangan $(4, b)$ yang memenuhi relasi: 4 merupakan kelipatan dari 1, 2, dan 4, sehingga bilangan-bilangan tersebut merupakan nilai b yang mungkin.

Lihat kembali multigraf berarah untuk relasi ini yang ditunjukkan dalam penyelesaian Contoh 2.6.4. Apakah kelas-kelas relasinya? Kelas-kelas itu tidak lain adalah tetangga setiap simpul (dengan tetangga ditentukan dengan mengikuti arah panah yang benar).

Contoh 2.6.19

Tentukan kelas-kelas ekuivalensi untuk relasi $\equiv_2$ pada bilangan bulat.

Penyelesaian. Oh tidak! Himpunan kita tak hingga, jadi apakah kita akan memiliki tak hingga banyak kelas relasi? Baiklah, sebaiknya kita mulai...

Bilangan apa saja yang berelasi dengan 1? Ingat, kita mencari bilangan bulat yang selisihnya dengan 1 merupakan kelipatan 2. Jadi, 3 pasti termasuk. Demikian pula 5, 7, -1, -3, dan seterusnya—semua bilangan ganjil? Ya, karena selisih setiap dua bilangan ganjil adalah genap. Kita juga dapat mengatakan bahwa selisih setiap dua bilangan genap adalah genap, sehingga kelas ekuivalensi 2 akan memuat semua bilangan genap. Sejauh ini kita memperoleh:

$$\begin{aligned}[1] &= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}\end{aligned}$$

Sebenarnya, tampaknya kita sudah selesai. Meskipun [3], [4], [5], dan seterusnya semuanya merupakan kelas ekuivalensi yang sah, anggota-anggota yang berelasi dengan 3 tepat sama dengan anggota-anggota yang berelasi dengan 1 karena $1 \equiv_2 3$. Hal ini terjadi karena relasinya transitif! Jika $3 \equiv_2 b$, kita mengetahui bahwa $1 \equiv_2 b$.

Jadi, kita memiliki tepat dua kelas ekuivalensi. Setiap bilangan bulat berada dalam tepat satu dari kedua kelas ekuivalensi ini, dan kelas ekuivalensi setiap bilangan bulat tepat merupakan kelas yang memuatnya.

Cermati kedua contoh di atas. Untuk relasi "merupakan kelipatan dari", yang BUKAN relasi ekuivalensi, beberapa anggota termasuk dalam lebih dari satu kelas relasi yang berbeda. Namun, untuk $\equiv_2$, yang merupakan relasi ekuivalensi, setiap anggota berada dalam tepat satu kelas ekuivalensi. Hal ini bukan kebetulan. Untuk memahaminya, kita akan mendefinisikan istilah baru.

Definisi 2.6.20

Diberikan himpunan tak kosong A, sebuah **partisi** dari A adalah himpunan P yang beranggotakan subhimpunan tak kosong dari A sedemikian sehingga setiap anggota A berada dalam tepat satu anggota P.

Definisi tersebut melibatkan banyak simbol dan himpunan. Namun, sebenarnya tidak rumit: Partisi adalah cara memecah suatu himpunan menjadi subhimpunan *saling lepas* yang *menutupi* seluruh himpunan. Subhimpunan saling lepas berarti tidak ada anggota yang berada dalam *lebih dari satu* subhimpunan. Subhimpunan menutupi himpunan berarti setiap anggota berada dalam *setidaknya satu* subhimpunan.

Contoh 2.6.21

Berikan beberapa partisi berbeda dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Penyelesaian. Ada begitu banyak pilihan! Salah satunya adalah:

$$P_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}.$$

Itu merupakan partisi A menjadi dua subhimpunan. Partisi lainnya:

$$P_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Contoh lainnya:

$$P_3 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\},$$

yang merupakan partisi menjadi bilangan ganjil dan genap. Kita juga memiliki partisi trivial:

$$P_4 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Catatan: Di dalam himpunan P_4 hanya terdapat satu himpunan.

Kadang-kadang agak membingungkan untuk memandang anggota partisi sebagai subhimpunan karena partisi sendiri merupakan himpunan, dan himpunan yang beranggotakan himpunan sulit dibicarakan. Kadang-kadang kita menyebut partisi sebagai *koleksi* dan setiap anggotanya sebagai *bagian* atau *blok*.

Sekarang gagasan utamanya: Untuk setiap relasi ekuivalensi, kelas-kelas ekuivalensinya membentuk partisi; dan untuk setiap partisi, kita dapat mendefinisikan relasi "berada dalam subhimpunan yang sama" yang merupakan relasi ekuivalensi. Kita telah melihat bahwa kelas-kelas ekuivalensi $\equiv_2$ membentuk partisi. Sekarang

mari kita meninjau arah sebaliknya.

Contoh 2.6.22

Definisikan relasi ekuivalensi $\sim$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dari partisi $P = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$.

Penyelesaian. Katakan bahwa dua anggota A ekuivalen jika keduanya berada dalam anggota P yang sama. Jadi, $1 \sim 4$ dan $4 \sim 1$, serta $2 \sim 3$, $2 \sim 5$, $3 \sim 5$, $3 \sim 2$, $5 \sim 2$, dan $5 \sim 3$. Tunggu. Kita juga memiliki $1 \sim 1$, $2 \sim 2$, dan seterusnya, karena setiap bilangan berada dalam subhimpunan yang sama dengan dirinya sendiri.

Dari pemeriksaan langsung, jelas bahwa relasi ini refleksif, simetris, dan transitif, sehingga merupakan relasi ekuivalensi.

Teorema 2.6.23

Diberikan relasi ekuivalensi R pada himpunan A, kelas-kelas ekuivalensinya membentuk partisi dari A.

Diberikan partisi $P = \{B_1, B_2, \ldots\}$ dari himpunan A, relasi $\equiv_P$ yang didefinisikan oleh $a \equiv_P b$ jika dan hanya jika a dan b berada dalam blok P yang sama merupakan relasi ekuivalensi.

Selanjutnya, kelas-kelas ekuivalensi dari relasi ekuivalensi yang dibentuk oleh suatu partisi tepat sama dengan partisi semula, dan relasi ekuivalensi yang dibangun dari partisi kelas-kelas ekuivalensinya tepat sama dengan relasi ekuivalensi semula.

2.6.6 Pertanyaan Bacaan

1. Perhatikan relasi R pada bilangan bulat yang berlaku bagi a dan b tepat ketika $b - a \geq 4$. Sebagai contoh, $(2, 7) \in R$, tetapi $(8, 6) \notin R$. Manakah di antara sifat relasi berikut yang dimiliki R?

A. R bersifat refleksif.

B. R bersifat irefleksif.

C. R bersifat simetris.

D. R bersifat antisimetris.

E. R bersifat transitif.

2. Tidak semua graf memiliki relasi sisi yang transitif. Namun, adakah graf yang memilikinya? Jika ada, berikan contoh dan jelaskan mengapa relasi sisinya transitif. Jika tidak ada, jelaskan alasannya.

3. Setelah membaca bagian ini, pertanyaan apa yang Anda miliki? Ajukan setidaknya satu pertanyaan tentang bagian ini yang membuat Anda ingin tahu

lebih lanjut.

2.6.7 Soal Latihan

1. Manakah di antara relasi berikut pada bilangan bulat yang bersifat refleksif?

(a) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x + y$ ganjil.

(b) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x + y$ positif.

(c) $x \sim y$ jika dan hanya jika $xy \geq 0$.

(d) $x \sim y$ jika dan hanya jika xy positif.

(e) $x \sim y$ jika dan hanya jika $y - x$ merupakan kelipatan 10.

2. Manakah di antara relasi berikut pada bilangan bulat yang bersifat simetris?

(a) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x + y$ ganjil.

(b) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x + y$ positif.

(c) $x \sim y$ jika dan hanya jika $xy \geq 0$.

(d) $x \sim y$ jika dan hanya jika xy positif.

(e) $x \sim y$ jika dan hanya jika $y - x$ merupakan kelipatan 10.

3. Manakah di antara relasi berikut pada bilangan bulat yang bersifat transitif?

(a) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x + y$ ganjil.

(b) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x + y$ positif.

(c) $x \sim y$ jika dan hanya jika $xy \geq 0$.

(d) $x \sim y$ jika dan hanya jika xy positif.

(e) $x \sim y$ jika dan hanya jika $y - x$ merupakan kelipatan 10.

4. Definisikan relasi $R_1, \ldots, R_6$ pada $1, 2, 3, 4$ sebagai berikut.

(a) $R_1 = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$,

(b) $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

(c) $R_3 = \{(2,4), (4,2)\}$.

(d) $R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$,

(e) $R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$,

(f) $R_6 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$,

Untuk setiap relasi tersebut, tentukan apakah relasi itu bersifat refleksif, irefleksif, simetris, antisimetris, dan/atau transitif.

5. Untuk setiap relasi berikut pada himpunan semua orang, tentukan apakah relasi itu bersifat refleksif, irefleksif, simetris, antisimetris, dan/atau transitif.

(a) $a \sim b$ jika dan hanya jika a lebih tua daripada b.

(b) $a \sim b$ jika dan hanya jika a dan b memiliki kakek atau nenek yang sama.

(c) $a \sim b$ jika dan hanya jika a memiliki nama depan yang sama dengan b.

(d) $a \sim b$ jika dan hanya jika a dan b lahir pada hari yang sama.

6. Untuk setiap relasi berikut pada himpunan semua bilangan bulat, tentukan apakah relasi itu bersifat refleksif, irefleksif, simetris, antisimetris, dan/atau transitif.

(a) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x + y = 0$.

(b) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x - y$ merupakan bilangan bulat.

(c) $x \sim y$ jika dan hanya jika $x = 2y$.

(d) $x \sim y$ jika dan hanya jika $xy > 1$.

2.6.8 Latihan Tambahan

1. Perhatikan relasi $>$ pada himpunan $\{1, 2, \ldots, 8\}$.

(a) Gambarlah graf berarah dari relasi $>$.

(b) Gambarlah graf berarah untuk relasi invers $>^{-1}$.

(c) Apakah relasi invers dari $>$ sama dengan relasi $\leq$? Jelaskan.

2. Benar atau salah: untuk sembarang relasi R pada himpunan A, relasi R^{-1} bersifat simetris jika dan hanya jika R bersifat simetris. Berikan alasan untuk jawaban Anda.

3. Benar atau salah: untuk sembarang relasi R pada himpunan A, komposisi R dengan inversnya, $R \circ R^{-1}$, selalu bersifat refleksif. Berikan alasan untuk jawaban Anda.

4. Jika mungkin, temukan contoh relasi pada himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ yang bersifat refleksif dan simetris, tetapi tidak transitif. Jika relasi semacam itu ada, gambarlah multigraf berarah dari relasi tersebut dan tuliskan pasangan-pasangan terurut yang mendefinisikannya. Jelaskan jawaban Anda.

5. Jika mungkin, temukan contoh relasi pada himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ yang bersifat refleksif dan transitif, tetapi tidak simetris. Jika relasi semacam itu ada, gambarlah multigraf berarah dari relasi tersebut dan tuliskan pasangan-pasangan terurut yang mendefinisikannya. Jelaskan jawaban Anda.

6. Jika mungkin, temukan contoh relasi pada himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ yang bersifat simetris dan transitif, tetapi tidak refleksif. Jika relasi semacam itu ada, gambarlah multigraf berarah dari relasi tersebut dan tuliskan pasangan-pasangan terurut yang mendefinisikannya. Jelaskan jawaban Anda.

7. Apa yang salah dalam argumen berikut, yang menyatakan bahwa setiap relasi yang simetris dan transitif pasti refleksif?

> Misalkan R adalah relasi pada himpunan A yang bersifat simetris dan transitif. Karena R simetris, jika aRb, maka berlaku bRa. Karena R transitif, jika aRb dan bRa, maka berlaku aRa. Karena hal ini benar untuk semua unsur a, kita memperoleh bahwa aRa benar untuk semua a dalam A, sehingga R refleksif.

8. Misalkan R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Seperti apakah kemungkinan bentuk multigraf berarah untuk R? Berikan sedikitnya dua contoh berbeda dari relasi R semacam itu beserta grafnya untuk mengilustrasikan jawaban Anda.

9. Perhatikan relasi R pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang didefinisikan oleh $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$. Apakah R merupakan relasi ekuivalensi? Berikan alasan untuk jawaban Anda.

Terlepas dari jawaban Anda, seperti apakah kelas-kelas relasi $[a]$ untuk $a \in A$? Dapatkah Anda menentukan apakah R merupakan relasi ekuivalensi berdasarkan informasi ini?

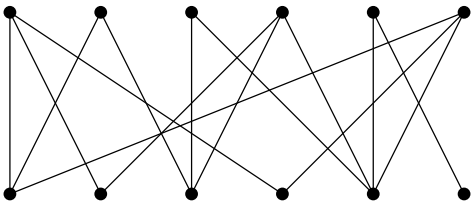
10. Perhatikan relasi "penyendiri" pada suatu himpunan mahasiswa yang menggambarkan pertemanan dan berlaku *hanya* di antara setiap mahasiswa dan dirinya sendiri (yakni, tidak seorang pun berteman dengan orang lain selain dirinya sendiri). Apakah relasi ini merupakan relasi ekuivalensi? Berikan alasan untuk jawaban Anda. Jika relasi tersebut merupakan relasi ekuivalensi, seperti apakah kelas-kelas ekuivalensinya?

2.7 Pencocokan pada Graf Bipartit

Selidiki!

Untuk suatu graf bipartit, **pencocokan** adalah subhimpunan sisi sedemikian sehingga setiap simpul bersisian dengan tepat satu sisi dalam subhimpunan tersebut. Tujuan kegiatan ini adalah menemukan beberapa kriteria yang menentukan kapan suatu graf bipartit memiliki pencocokan.

Apakah graf berikut memuat suatu pencocokan? Jika ya, temukan salah satunya.



Tidak semua graf bipartit memiliki pencocokan. Gambarlah sebanyak mungkin contoh graf bipartit yang berbeda secara mendasar dan TIDAK memiliki pencocokan. Tujuan Anda adalah menemukan semua kemungkinan penghalang bagi keberadaan pencocokan sempurna pada suatu graf. Tuliskan syarat-syarat yang *perlu* agar suatu graf memiliki pencocokan (yakni, isilah bagian kosong berikut: Jika suatu graf memiliki pencocokan, maka _____). Selanjutnya, tanyakan apakah syarat-syarat tersebut juga cukup (apakah benar bahwa jika _____, maka graf tersebut memiliki pencocokan?).

Kita mengakhiri bab ini dengan satu contoh tambahan masalah teori graf untuk menggambarkan keragaman dan keluasan bidang tersebut.

Misalkan Anda memiliki graf bipartit G. Graf ini terdiri atas dua himpunan simpul A dan B, dengan sejumlah sisi yang menghubungkan beberapa simpul dalam A dengan beberapa simpul dalam B (dan, tentu saja, tidak ada sisi di antara dua simpul yang keduanya berada dalam A atau keduanya berada dalam B). **Pencocokan dari** A adalah subhimpunan sisi sedemikian sehingga setiap simpul A bersisian dengan tepat satu sisi dalam subhimpunan itu, dan tidak ada simpul dalam B yang bersisian dengan lebih dari satu sisi dalam subhimpunan tersebut. Dalam penerapannya, kita akan mengasumsikan bahwa $|A| = |B|$ (kedua himpunan memiliki jumlah simpul yang sama), sehingga setiap simpul pada graf bersisian dengan tepat satu sisi dalam pencocokan.[10]

Sedikit konteks dapat mempermudah pemahaman. Anggap simpul-simpul

[10]Apa yang kita sebut *pencocokan* kadang-kadang disebut *pencocokan sempurna* atau *pencocokan lengkap*. Istilah tersebut digunakan karena pencocokan yang tidak sempurna juga menarik untuk dipelajari. Kita akan menyebutnya pencocokan *parsial*.

dalam A merepresentasikan mahasiswa dalam suatu kelas, dan simpul-simpul dalam B merepresentasikan topik presentasi. Kita menempatkan sisi dari simpul $a \in A$ ke simpul $b \in B$ jika mahasiswa a ingin mempresentasikan topik b. Tentu saja, beberapa mahasiswa ingin mempresentasikan lebih dari satu topik, sehingga simpul mereka akan berderajat lebih dari 1. Sebagai pengajar, Anda ingin memberikan satu topik tersendiri kepada setiap mahasiswa. Jadi, Anda ingin menemukan pencocokan dari A: Anda memilih suatu subhimpunan sisi sedemikian sehingga setiap mahasiswa dipasangkan dengan tepat satu topik, dan tidak ada topik yang dipasangkan dengan dua mahasiswa.[11]

Pertanyaannya adalah: kapan suatu graf bipartit memuat pencocokan dari A? Untuk mulai menjawab pertanyaan ini, perhatikan hal-hal yang dapat menghalangi suatu graf memuat pencocokan. Pengamatan ini belum tentu memberi kita syarat yang menjamin bahwa graf *memang* memiliki pencocokan, tetapi setidaknya merupakan titik awal.

Salah satu alasan G tidak dapat memiliki pencocokan ialah adanya simpul dalam A yang tidak bertetangga dengan simpul mana pun dalam B (sehingga berderajat 0). Apa lagi yang dapat menghalanginya? Bagaimana jika dua mahasiswa sama-sama hanya menyukai satu topik yang sama? Setelah topik tersebut diberikan kepada mahasiswa pertama, tidak ada lagi topik yang disukai mahasiswa kedua, sehingga keadaannya sama saja seolah-olah mahasiswa kedua berderajat 0. Atau, bagaimana jika tiga mahasiswa hanya menyukai dua topik di antara mereka? Sekali lagi, setelah satu mahasiswa diberi suatu topik, keadaan ini berkurang menjadi kasus sebelumnya, yaitu dua mahasiswa hanya menyukai satu topik. Penalaran ini dapat diteruskan untuk semakin banyak mahasiswa.

Sekarang seharusnya jelas bahwa jika terdapat sekelompok n mahasiswa yang secara bersama-sama menyukai paling banyak $n-1$ topik, maka pencocokan mustahil dibentuk. Pernyataan ini berlaku untuk setiap nilai n dan setiap kelompok yang terdiri atas n mahasiswa.

Untuk menyatakannya dalam bahasa teori graf, misalkan Anda memiliki himpunan simpul $S \subseteq A$. Definisikan $N(S)$ sebagai himpunan semua **tetangga** dari simpul-simpul dalam S. Dengan kata lain, $N(S)$ memuat semua simpul (dalam B) yang bertetangga dengan sedikitnya satu simpul dalam S. (Dalam graf mahasiswa/topik, $N(S)$ adalah himpunan topik yang disukai mahasiswa-mahasiswa dalam S.) Pembahasan di atas dapat diringkas sebagai berikut.

Syarat Pencocokan.

Jika graf bipartit $G = \{A, B\}$ memiliki pencocokan dari A, maka

$$|N(S)| \geq |S|$$

[11] Dahulu, contoh baku untuk pencocokan adalah *masalah perkawinan*, dengan A terdiri atas para lelaki di suatu kota, B terdiri atas para perempuan, dan suatu sisi merepresentasikan perkawinan yang disetujui kedua pihak. Pencocokan kemudian merepresentasikan cara para tetua kota menikahkan semua orang di kota tersebut, tanpa memperbolehkan poligami. Demi kepekaan politis, kita memilih konteks yang lebih progresif.

untuk semua $S \subseteq A$.

Apakah konversnya benar? Misalkan G memenuhi syarat pencocokan $|N(S)| \geq |S|$ untuk semua $S \subseteq A$ (setiap himpunan simpul memiliki tetangga yang jumlahnya paling sedikit sama dengan jumlah simpul dalam himpunan tersebut). Apakah ini berarti bahwa suatu pencocokan ada? Ternyata, ya. Syarat perlu yang jelas tersebut juga merupakan syarat cukup.[12] Teorema ini pertama kali dibuktikan oleh Philip Hall pada 1935.[13]

Teorema 2.7.1 Teorema Perkawinan Hall.

Misalkan G adalah graf bipartit dengan himpunan A dan B. Maka G memiliki pencocokan dari A jika dan hanya jika

$$|N(S)| \geq |S|$$

untuk semua $S \subseteq A$.

Terdapat cukup banyak pembuktian yang berbeda untuk teorema ini – pencarian singkat di internet dapat menjadi titik awal.

Selain penerapannya pada masalah perkawinan dan topik presentasi mahasiswa, pencocokan memiliki berbagai macam penerapan. Kita mengakhiri pembahasan dengan salah satu contohnya.

Contoh 2.7.2

Misalkan Anda membagikan 52 kartu remi standar ke dalam 13 tumpukan yang masing-masing terdiri atas 4 kartu. Buktikan bahwa Anda selalu dapat memilih satu kartu dari setiap tumpukan sehingga memperoleh masing-masing satu dari 13 nilai kartu: As, 2, 3, . . . , 10, Jack, Queen, dan King.

Penyelesaian. Menyelesaikan masalah ini secara langsung akan sulit, tetapi syarat pencocokan dapat membantu. Bentuklah graf G dengan 13 simpul dalam himpunan A, yang masing-masing merepresentasikan salah satu dari 13 nilai kartu, dan 13 simpul dalam himpunan B, yang masing-masing merepresentasikan salah satu dari 13 tumpukan. Gambarlah sisi di antara simpul $a \in A$ dan simpul $b \in B$ jika kartu bernilai a terdapat dalam tumpukan b. Perhatikan bahwa kita hanya mencari pencocokan dari A; setiap nilai harus ditemukan tepat satu kali di antara tumpukan-tumpukan tersebut.

Kita akan memperoleh pencocokan jika syarat pencocokan terpenuhi. Untuk sembarang himpunan nilai kartu (suatu himpunan $S \subseteq A$), kita

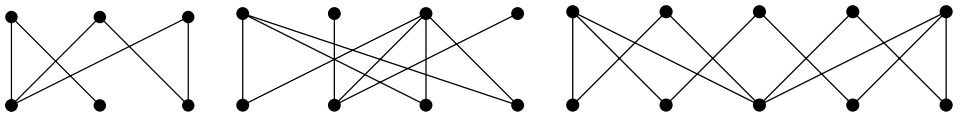
[12] Hal semacam ini sering terjadi dalam teori graf. Jika contoh-contoh penyangkal yang jelas dapat dihindari, kita sering memperoleh hasil yang diinginkan.

[13] Terdapat pula versi tak hingga dari teorema ini, yang dibuktikan oleh Marshall Hall, Jr. Kesamaan nama mereka hanyalah kebetulan; kedua Hall tersebut tidak memiliki hubungan keluarga.

harus menunjukkan bahwa $|N(S)| \geq |S|$. Artinya, banyak tumpukan yang memuat nilai-nilai tersebut sedikitnya sama dengan banyak nilai yang berbeda. Bagaimana jika tidak demikian? Misalkan $|S| = k$. Jika $|N(S)| < k$, maka dalam tumpukan-tumpukan tersebut terdapat kurang dari $4k$ kartu (karena setiap tumpukan memuat 4 kartu). Akan tetapi, terdapat $4k$ kartu yang memiliki k nilai berbeda tersebut, sehingga sedikitnya satu dari kartu-kartu ini harus berada dalam tumpukan lain, suatu kontradiksi. Jadi, syarat pencocokan terpenuhi, sehingga terdapat pencocokan seperti yang diperlukan.

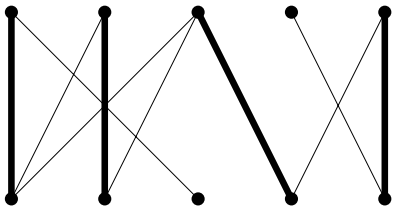
Latihan

1. Temukan suatu pencocokan pada setiap graf bipartit berikut atau jelaskan mengapa tidak terdapat pencocokan.



2. Graf bipartit yang tidak memiliki pencocokan mungkin masih memiliki **pencocokan parsial**. Istilah ini berarti suatu himpunan *sisi* sedemikian sehingga tidak ada simpul yang bersisian dengan lebih dari satu sisi (tetapi mungkin tidak bersisian dengan sisi mana pun). Setiap graf bipartit (dengan setidaknya satu sisi) memiliki pencocokan parsial, sehingga kita dapat mencari pencocokan parsial maksimum dalam suatu graf.

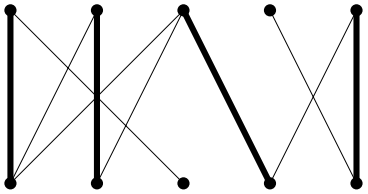
"Teman" Anda menyatakan bahwa ia telah menemukan pencocokan parsial maksimum untuk graf berikut (pencocokannya ditampilkan dengan garis tebal). Ia menjelaskan bahwa tidak ada sisi lain yang dapat ditambahkan karena semua sisi yang tidak digunakan dalam pencocokan parsialnya bersisian dengan simpul yang telah dicocokkan. Apakah pernyataannya benar?



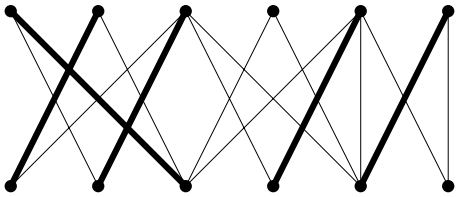
3. Salah satu cara untuk memeriksa apakah suatu pencocokan parsial sudah maksimum adalah dengan membentuk **lintasan berselang-seling**. Lintasan ini merupakan urutan sisi-sisi yang bertetangga, yang secara bergantian terdiri atas sisi dalam pencocokan dan sisi di luar pencocokan (tidak ada sisi yang boleh digunakan lebih dari satu kali). Jika sebuah lintasan berselang-seling berawal dan berakhir dengan sisi yang *tidak* berada dalam pencocokan, lintasan itu disebut **lintasan augmentasi**.

(a) Temukan lintasan berselang-seling terpanjang yang mungkin untuk

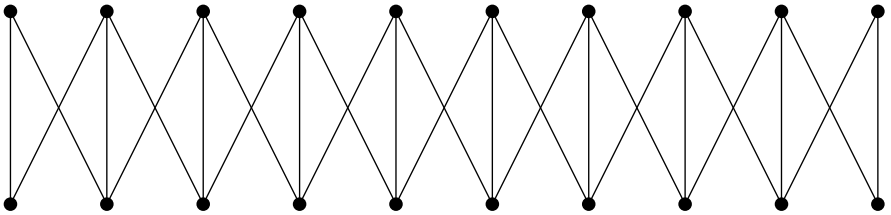
pencocokan parsial pada graf teman Anda. Apakah lintasan tersebut merupakan lintasan augmentasi? Bagaimana lintasan ini membantu Anda menemukan pencocokan yang lebih besar?



(b) Temukan lintasan berselang-seling terpanjang yang mungkin untuk pencocokan parsial berikut. Apakah terdapat lintasan augmentasi? Apakah pencocokan parsial tersebut merupakan pencocokan parsial maksimum dalam graf ini?



4. Dua keluarga terkaya di Westeros memutuskan menjalin persekutuan melalui pernikahan. Keluarga pertama memiliki 10 putra dan keluarga kedua memiliki 10 putri. Usia anak-anak dalam kedua keluarga tersebut saling bersesuaian. Untuk menghindari ketidakpatutan, kedua keluarga menetapkan bahwa setiap anak harus menikah dengan seseorang yang seusia, atau dengan seseorang yang satu tingkat lebih muda atau lebih tua. Graf yang merepresentasikan pernikahan yang dapat diterima adalah sebagai berikut:



Pertanyaannya adalah: berapa banyak susunan pernikahan berbeda yang dapat diterima untuk menikahkan seluruh 20 anak tersebut?

(a) Berapa banyak susunan pernikahan yang mungkin jika disyaratkan bahwa tepat 6 putra menikahi putri yang tidak seusia dengannya?

(b) Dapatkah Anda menggeneralisasi jawaban sebelumnya untuk memperoleh jumlah seluruh susunan pernikahan?

(c) Bagaimana Anda mengetahui bahwa jawaban Anda benar? Cobalah menghitung dengan cara lain. Perhatikan ukuran keluarga yang lebih

kecil dan peroleh suatu barisan.

(d) Dapatkah Anda memberikan relasi rekurensi yang sesuai dengan masalah ini?

5. Suatu himpunan simpul $A \subseteq V$ disebut **penutup simpul** jika setiap sisi graf bersisian dengan suatu simpul dalam penutup tersebut (jadi, penutup simpul menutupi *sisi-sisi*). Karena V sendiri merupakan penutup simpul, setiap graf memiliki penutup simpul. Pertanyaan yang menarik adalah bagaimana menemukan penutup simpul **minimum**, yaitu penutup yang menggunakan sesedikit mungkin simpul.

(a) Misalkan Anda memiliki suatu pencocokan pada sebuah graf. Bagaimana pencocokan itu dapat digunakan untuk memperoleh penutup simpul minimum? Apakah metode Anda selalu berhasil?

(b) Misalkan Anda memiliki penutup simpul minimum untuk suatu graf. Bagaimana penutup tersebut dapat digunakan untuk memperoleh pencocokan parsial? Apakah metode Anda selalu berhasil?

(c) Apakah hubungan antara ukuran penutup simpul minimum dan ukuran pencocokan parsial maksimum dalam suatu graf?

6. Dalam banyak penerapan pencocokan, penggunaan graf bipartit merupakan pilihan yang wajar. Namun, Anda mungkin bertanya-tanya apakah terdapat cara untuk menemukan pencocokan pada graf secara umum.

(a) Untuk nilai n manakah graf lengkap K_n memiliki pencocokan?

(b) Buktikan bahwa jika suatu graf memiliki pencocokan, maka $|V|$ genap.

(c) Apakah konversnya benar? Dengan kata lain, apakah semua graf dengan $|V|$ genap memiliki pencocokan?

(d) Bagaimana jika kita juga mensyaratkan kondisi pencocokan? Buktikan atau bantah: Jika suatu graf dengan jumlah simpul genap memenuhi $|N(S)| \geq |S|$ untuk semua $S \subseteq V$, maka graf tersebut memiliki pencocokan.

2.8 Ringkasan Bab

Semoga bab ini telah memberi Anda gambaran tentang luasnya ragam topik dalam teori graf sekaligus alasan bidang ini menarik untuk dipelajari. Masih banyak bidang menarik lain yang dapat ditinjau, dan jumlahnya terus bertambah; teori graf merupakan bidang penelitian matematika yang aktif.

Salah satu alasan teori graf merupakan bidang kajian yang begitu kaya adalah karena bidang ini membahas konsep yang sangat mendasar: setiap pasangan objek dapat saling berhubungan atau tidak berhubungan. Jenis objek dan arti "berhubungan" bergantung pada konteks, dan hal ini menghasilkan banyak penerapan teori graf dalam sains dan bidang matematika lainnya. Objek tersebut dapat berupa negara, dan dua negara berhubungan apabila keduanya berbagi batas. Objek tersebut dapat berupa daratan yang berhubungan apabila terdapat jembatan di antaranya. Objek tersebut dapat berupa situs web yang berhubungan apabila terdapat tautan dari satu situs ke situs lainnya. Atau, kita dapat bersikap sepenuhnya abstrak: objeknya berupa simpul yang berhubungan apabila terdapat sisi di antaranya.

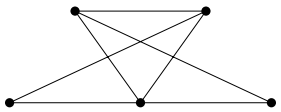
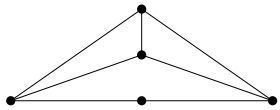
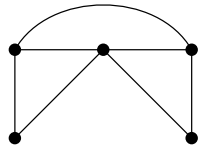
Pertanyaan yang kita ajukan tentang graf bergantung pada penerapannya, tetapi sering kali mengarah pada pertanyaan yang lebih mendalam, umum, dan abstrak yang layak dipelajari secara tersendiri. Berikut adalah ringkasan singkat jenis pertanyaan yang telah kita tinjau:

- Dapatkah graf digambar pada bidang tanpa sisi yang berpotongan? Jika dapat, berapa banyak muka yang dibentuk gambar tersebut pada bidang?
- Dapatkah simpul-simpul graf diwarnai dengan sedikit warna sedemikian sehingga simpul-simpul yang bertetangga memiliki warna berbeda? Berapa banyak warna yang diperlukan?
- Dapatkah setiap sisi graf ditelusuri tepat satu kali tanpa mengangkat pensil? Jenis "lintasan" lain apa yang mungkin dimiliki suatu graf?
- Dapatkah Anda menemukan subgraf dengan sifat tertentu? Sebagai contoh, kapan suatu graf (bipartit) memuat subgraf yang setiap simpulnya hanya bertetangga dengan satu simpul lain?

Tidak mengherankan bahwa pertanyaan-pertanyaan ini sering kali saling berkaitan. Sebagai contoh, bilangan kromatik suatu graf tidak dapat lebih besar dari 4 apabila graf tersebut planar. Ada atau tidaknya jejak Euler pada suatu graf bergantung pada banyaknya simpul yang bertetangga dengan setiap simpul (dan apakah bilangan-bilangan tersebut selalu genap atau tidak). Bahkan keberadaan pencocokan dalam graf bipartit dapat dibuktikan menggunakan lintasan.

Tinjauan Bab

1. Graf mana saja di bawah ini yang sama, jika ada? Graf mana yang berbeda? Jelaskan.

2. Graf mana dalam soal sebelumnya yang memiliki jejak atau sirkuit Euler? Graf mana yang planar?

3. Gambarkan graf yang memiliki sirkuit Euler tetapi tidak planar.

4. Gambarkan graf yang tidak memiliki jejak Euler dan juga tidak planar.

5. Perhatikan graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan $E = \{ab, ac, af, bg, cd, ce\}$ (di sini kita menggunakan notasi singkat untuk sisi: sebagai contoh, ab sebenarnya berarti $\{a, b\}$).

(a) Apakah graf G isomorfik dengan $G' = (V', E')$ dengan $V' = \{t, u, v, w, x, y, z\}$ dan $E' = \{tz, uv, uy, uz, vw, vx\}$? Jika ya, berikan isomorfismenya. Jika tidak, jelaskan bagaimana Anda mengetahuinya.

(b) Temukan graf G'' dengan 7 simpul dan 6 sisi yang TIDAK isomorfik dengan G, atau jelaskan mengapa hal tersebut tidak mungkin.

(c) Tuliskan *barisan derajat* untuk G. Artinya, tuliskan derajat semua simpul dalam urutan menurun.

(d) Temukan graf terhubung G''' yang memiliki barisan derajat sama dengan G tetapi TIDAK isomorfik dengan G, atau jelaskan mengapa hal tersebut tidak mungkin.

(e) Graf jenis apakah G? Apakah G lengkap? Bipartit? Pohon? Siklus? Lintasan? Roda?

(f) Apakah G planar?

(g) Berapakah bilangan kromatik G? Jelaskan.

(h) Apakah G memiliki jejak atau sirkuit Euler? Jelaskan.

6. Jika suatu graf memiliki 10 simpul, 10 sisi, dan sebuah sirkuit Euler, apakah graf tersebut harus planar? Berapa banyak muka yang dimilikinya?

7. Misalkan G adalah graf dengan n simpul yang masing-masing berderajat 5.

(a) Untuk nilai n manakah kondisi ini mungkin?

(b) Untuk nilai n manakah graf tersebut memiliki jejak Euler?

(c) Berapakah nilai n terkecil yang memungkinkan graf tersebut planar? (rumit)

8. Pada acara dansa sekolah, 6 siswi dan 4 siswa bergiliran berdansa (secara berpasangan) satu sama lain.

(a) Berapa banyak pasangan yang berdansa jika setiap siswi berdansa dengan setiap siswa?

(b) Berapa banyak pasangan yang berdansa jika setiap orang berdansa dengan setiap orang lainnya (tanpa memandang gender)?

(c) Jelaskan graf apa yang dapat digunakan untuk merepresentasikan kedua situasi tersebut.

9. Dalam suatu kelompok yang terdiri atas n orang, mungkinkah setiap orang berteman dengan sejumlah ganjil orang dalam kelompok tersebut? Jika ya, apa yang dapat Anda simpulkan tentang n?

10. Teman Anda menantang Anda untuk membuat polihedron cembung yang terdiri atas 9 segitiga dan 6 segilima.

(a) Mungkinkah polihedron semacam itu dibuat dengan *hanya* menggunakan bentuk-bentuk tersebut? Jelaskan.

(b) Anda memutuskan untuk menambahkan satu segitujuh (poligon bersisi tujuh). Berapa banyak simpul yang dimiliki polihedron cembung baru Anda?

(c) Dengan mengasumsikan bahwa Anda berhasil membuat polihedron baru bermuka 16, mungkinkah setiap simpul menjadi pertemuan bagi jumlah muka yang sama? Mungkinkah setiap simpul menjadi pertemuan bagi 3 atau 4 muka? Jika ya, berapa banyak simpul dari masing-masing jenis tersebut?

11. Adakah polihedron cembung yang memerlukan 5 warna untuk mewarnai simpul-simpulnya secara tepat? Jelaskan.

12. Berapa banyak sisi yang dimiliki graf $K_{n,n}$? Untuk nilai n manakah graf tersebut memiliki sirkuit Euler? Untuk nilai n manakah graf tersebut planar?

13. Graf G memiliki 6 simpul dengan derajat $1, 2, 2, 3, 3, 5$. Berapa banyak sisi yang dimiliki G? Jika G planar, berapa banyak muka yang dimilikinya? Apakah G memiliki jejak Euler?

14. Berapa jumlah warna minimum yang Anda perlukan untuk mewarnai simpul-simpul K_7 secara tepat? Berdasarkan jawaban Anda, dapatkah Anda menentukan apakah K_7 planar?

15. Berapa jumlah warna minimum yang Anda perlukan untuk mewarnai simpul-simpul $K_{3,4}$ secara tepat? Berdasarkan jawaban Anda, dapatkah Anda menentukan apakah $K_{3,4}$ planar?

16. Buktikan bahwa $K_{3,4}$ tidak planar. Gunakan rumus Euler, bukan sekadar mengacu pada fakta bahwa $K_{3,3}$ tidak planar.

17. Dodekahedron adalah polihedron cembung beraturan yang tersusun atas 12 segilima beraturan.

(a) Misalkan Anda mewarnai setiap segilima dengan salah satu dari tiga

warna. Buktikan bahwa pasti terdapat dua segilima bertetangga yang diberi warna sama.

(b) Bagaimana jika Anda menggunakan empat warna?

(c) Bagaimana jika Anda mewarnai muka sebuah kubus alih-alih dodekahedron?

18. Tentukan apakah pernyataan-pernyataan berikut benar atau salah. Buktikan jawaban Anda.

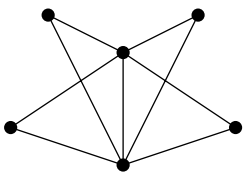
(a) Jika dua graf G_1 dan G_2 memiliki bilangan kromatik yang sama, kedua graf tersebut isomorfik.

(b) Jika dua graf G_1 dan G_2 memiliki jumlah simpul dan sisi yang sama serta bilangan kromatik yang sama, kedua graf tersebut isomorfik.

(c) Jika dua graf isomorfik, kedua graf tersebut memiliki bilangan kromatik yang sama.

19. Jika graf planar G dengan 7 simpul membagi bidang menjadi 8 muka, berapa banyak sisi yang harus dimiliki G?

20. Perhatikan graf di bawah ini:



(a) Apakah graf tersebut memiliki jejak atau sirkuit Euler? Jelaskan.

(b) Apakah graf tersebut planar? Jelaskan.

(c) Apakah graf tersebut bipartit? Lengkap? Bipartit lengkap?

(d) Berapakah bilangan kromatik graf tersebut?

21. Untuk setiap bagian di bawah ini, tentukan apakah pernyataannya benar atau salah. Jelaskan mengapa pernyataan yang benar memang benar, dan berikan contoh penyangkal bagi pernyataan yang salah.

(a) Setiap graf bipartit bersifat planar.

(b) Setiap graf bipartit yang memiliki sedikitnya satu sisi mempunyai bilangan kromatik 2.

(c) Setiap graf bipartit memiliki jejak Euler.

(d) Setiap simpul pada graf bipartit berderajat genap.

(e) Suatu graf bipartit jika dan hanya jika jumlah derajat semua simpulnya genap.

22. Perhatikan pernyataan, "Jika suatu graf planar, graf tersebut memiliki jejak Euler."

(a) Tuliskan konvers pernyataan tersebut.

(b) Tuliskan kontraposisi pernyataan tersebut.

(c) Tuliskan negasi pernyataan tersebut.

(d) Mungkinkah kontraposisi tersebut salah? Jika ya, apa yang dapat Anda simpulkan?

(e) Apakah pernyataan semula benar atau salah? Buktikan jawaban Anda.

(f) Apakah konvers pernyataan tersebut benar atau salah? Buktikan jawaban Anda.

23. Misalkan G adalah graf terhubung dengan v simpul dan e sisi. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jika G memuat tepat satu siklus (di antara sisi dan simpul lainnya), maka $v = e$.

Catatan: Anda diminta membuktikan kasus khusus rumus Euler untuk graf planar, jadi jangan gunakan rumus tersebut dalam bukti Anda.

Bab 3

Pencacahan

Salah satu hal pertama yang Anda pelajari dalam matematika adalah cara menghitung. Sekarang kita ingin mencacah kumpulan objek yang besar dengan cepat dan tepat. Sebagai contoh:

- Dalam sekelompok 10 orang, jika setiap orang berjabat tangan tepat sekali dengan setiap orang lainnya, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
- Dengan berapa banyak cara Anda dapat membagikan 10 kue kering Girl Scout kepada 7 anggota Boy Scout?
- Berapa banyak anagram yang dapat dibentuk dari kata "anagram"?

Sebelum membahas pertanyaan-pertanyaan seperti ini, mari kita pelajari dasar-dasar pencacahan.

3.1 Segitiga Aritmetika Pascal

Tujuan Pembelajaran

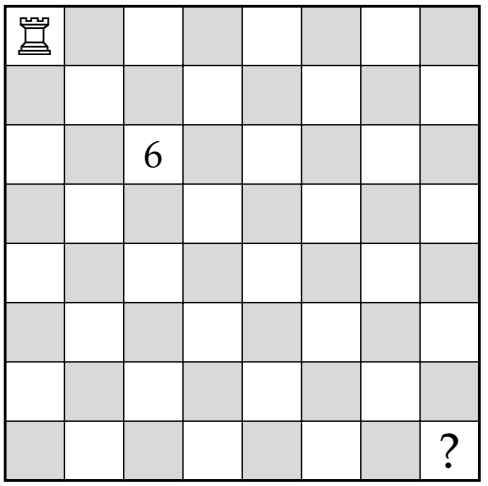
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menggunakan segitiga Pascal untuk menjawab persoalan pencacahan tentang lintasan kisi, string bit, dan subhimpunan.
2. Menjelaskan cara membentuk segitiga Pascal dan kaitannya dengan persoalan pencacahan.
3. Menjelaskan mengapa segitiga Pascal berkaitan dengan begitu banyak jenis persoalan pencacahan.

3.1.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Dalam permainan catur, benteng hanya dapat bergerak dalam garis lurus (bukan secara diagonal). Ada berapa cara benteng di sudut kiri atas dapat mencapai sudut kanan bawah papan jika hanya bergerak ke bawah dan ke kanan?



Selain itu, apa kaitannya persoalan ini dengan pencacahan banyaknya piza yang dapat Anda pesan jika Anda memilih separuh dari 14 taburan yang tersedia?

Kegiatan Pratinjau

Mari kita tentukan banyaknya lintasan yang dapat ditempuh benteng untuk mencapai beberapa petak pada papan catur.

1. Angka 6 pada petak di baris dan kolom ke-3 menyatakan bahwa terdapat 6 lintasan berbeda menuju petak tersebut, meskipun benteng hanya perlu melewati empat petak untuk sampai ke sana. Salah satu lintasannya adalah DDRR (bawah, bawah, kanan, kanan). Tuliskan keenam lintasan tersebut.

2. Ada berapa lintasan menuju petak pada baris 4, kolom 2 (secara diagonal di bawah dan di sebelah kiri angka 6)? Tuliskan semua lintasan sebagai string D/R.

Berapa banyak lintasan yang diperoleh? Dengan kata lain, angka berapa yang harus ditempatkan pada petak papan catur tersebut?

3. Sekarang mari kita tentukan lintasan menuju petak pada baris 4, kolom 3 (tepat di bawah angka 6).

Pertama, tuliskan semua lintasan yang berakhir dengan R.

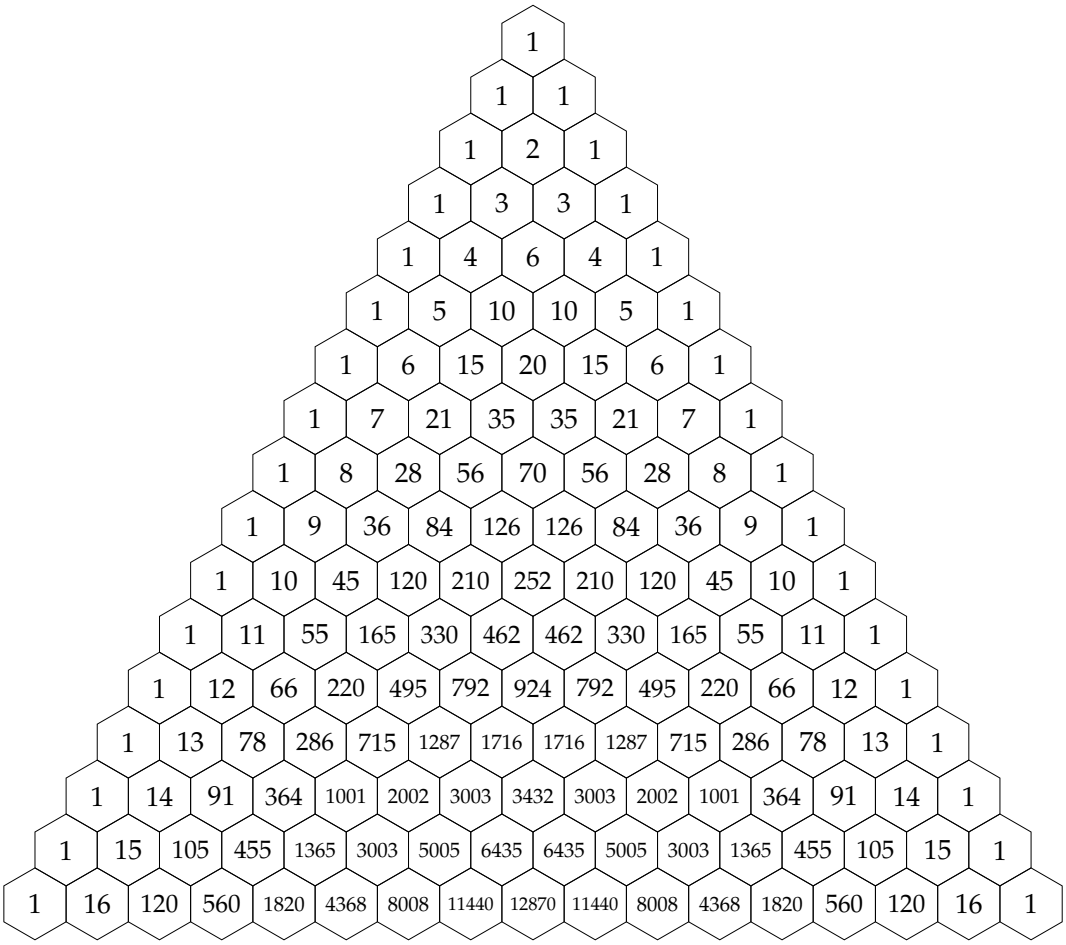
Selanjutnya, tuliskan semua lintasan yang berakhir dengan D.

Adakah lintasan lain? Secara keseluruhan, ada berapa lintasan menuju petak ini?

4. Lanjutkan mengisi papan catur, baik dengan mencacah string D/R secara langsung maupun dengan menggunakan pengamatan Anda dari tugas sebelumnya. Angka berapa yang terdapat di sudut kanan bawah papan catur?

Pada tahun 1653, Blaise Pascal, yang menelaah persoalan-persoalan yang kelak menjadi dasar teori peluang, menghimpun sejumlah fakta tentang susunan bilangan berbentuk segitiga dalam karyanya *Risalah tentang Segitiga Aritmetika*. Susunan bilangan ini telah muncul sejak abad ke-10 di Tiongkok, India, dan Persia. Kajian terhadap segitiga ini di Tiongkok dan Persia digunakan untuk apa yang kini kita sebut aljabar: mencari akar pangkat n, yang pada dasarnya berarti menyelesaikan persamaan polinomial. Dalam naskah-naskah India, bilangan-bilangan pada segitiga tersebut muncul sebagai jawaban atas persoalan pencacahan: dari enam *rasa*, berapa banyak kombinasi yang dapat dibuat dengan satu, dua, atau tiga rasa, dan seterusnya? Matematikawan Eropa pada abad ke-14 menyajikan segitiga ini sebagai tabel **bilangan figuratif** (bilangan yang dapat disusun dalam bentuk geometris), yang sebelumnya telah menjadi pokok utama karya Pythagoras dan para pengikutnya.

Lalu, apakah segitiga luar biasa yang menyimpan rahasia begitu banyak persoalan matematika ini? Inilah segitiga Pascal:



Gambar 3.1.1 Segitiga Pascal.

Luangkan waktu sejenak untuk mengamati keindahan segitiga ini. Apa yang Anda perhatikan? Apa yang membuat Anda bertanya-tanya? Perhatikan secara

khusus baris ke-5 (angka 1 pada baris teratas kita sebut baris 0, sehingga baris 5 adalah 1, 5, 10, 10, 5, 1). Bagaimana hubungan bilangan-bilangan pada baris ini dengan bilangan-bilangan di atasnya? Perhatikan bahwa $5 = 1 + 4$ dan $10 = 4 + 6$. Apakah hal ini juga terjadi di bagian lain segitiga?

Memang, setiap bilangan pada segitiga merupakan *jumlah dua bilangan di atasnya*. Kita akan menggunakan sifat ini sebagai *definisi* segitiga Pascal. Dengan demikian, kita dapat membentuk sebanyak mungkin baris segitiga sesuai kebutuhan. Definisi aditif inilah yang digunakan di Tiongkok dan Persia untuk mencari akar pangkat n; penggunaan ini akan kita singgung secara singkat pada akhir bagian. Namun, kita tertarik pada persoalan pencacahan, sehingga tujuan utama kita sekarang adalah mengamati bagaimana bilangan-bilangan pada segitiga Pascal menjadi jawaban bagi berbagai persoalan pencacahan.

Berikut beberapa objek diskret yang tampaknya berbeda dan dapat kita cacah: lintasan kisi, string bit, subhimpunan, dan piza. Kita akan memberikan contoh untuk setiap jenis persoalan pencacahan tersebut (sekaligus menjelaskan apa yang dimaksud dengan objek-objek itu). Seperti yang akan kita lihat, bilangan-bilangan pada segitiga Pascal merupakan jawaban bagi semua persoalan ini.

Sebelum memulai, kita perlu memperkenalkan sedikit notasi. Mari kita beri nama setiap bilangan pada segitiga Pascal berdasarkan posisinya. Anggap setiap bilangan berada pada sebuah baris dan kolom: baris dihitung ke bawah mulai dari 0, sedangkan kolom dihitung dari kiri, juga mulai dari 0. Entri pada baris n dan kolom k dinotasikan dengan $\binom{n}{k}$. Sebagai contoh, $\binom{6}{3} = 20$ karena itulah nilai pada baris 6, kolom 3. Karena alasan yang akan segera menjadi jelas, $\binom{n}{k}$ dibaca "n **pilih** k." Kita dapat menuliskan kembali segitiga tersebut menggunakan nama-nama ini:

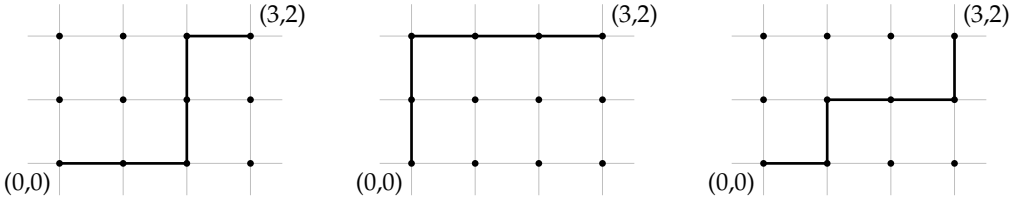
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} &
\end{array}$$

3.1.2 Lintasan Kisi

Kisi bilangan bulat adalah himpunan semua titik pada bidang Kartesius yang koordinat x dan y-nya merupakan bilangan bulat. Jika Anda biasa menggambar grafik pada kertas berpetak, kisi adalah himpunan semua titik potong garis-garis petak tersebut.

Lintasan kisi adalah salah satu lintasan terpendek yang mungkin untuk

menghubungkan dua titik pada kisi dengan hanya bergerak secara horizontal dan vertikal. Sebagai contoh, berikut tiga lintasan kisi yang mungkin dari titik $(0, 0)$ ke $(3, 2)$:



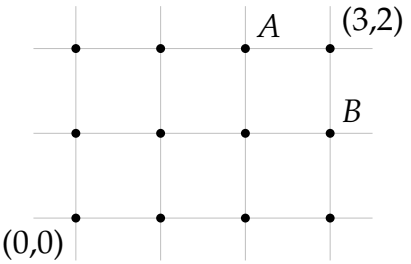
Perhatikan bahwa agar lintasan tersebut merupakan lintasan *terpendek* yang mungkin, setiap langkah harus menuju ke kanan atau ke atas. Selain itu, dalam kasus ini, apa pun lintasan yang kita ambil, kita harus melangkah tiga kali ke kanan dan dua kali ke atas. Apa pun urutan langkahnya, selalu terdapat lima langkah. Jadi, setiap lintasan memiliki **panjang** lima.

Persoalan pencacahan yang akan kita ajukan adalah: *ada berapa* lintasan kisi antara $(0, 0)$ dan $(3, 2)$? Dalam kasus ini, menggambar semua lintasan tidak akan memakan waktu lama. Atau, kita dapat menuliskan setiap lintasan sebagai string "arah", seperti $xxyyx$, $yyxxx$, atau $xyxxy$, yang berturut-turut bersesuaian dengan tiga lintasan yang digambar di atas. Di sini, sebuah x berarti bergerak satu satuan dalam arah x, dan demikian pula untuk y. Kita akan memperoleh sepuluh lintasan berikut:

$$\begin{array}{ccccccc} & xxxyy & xxyxy & xyxxy & yxxxy & & \\ xxyyx & xyxyx & yxxyx & xyyxx & yxyxx & yyxxx. \end{array}$$

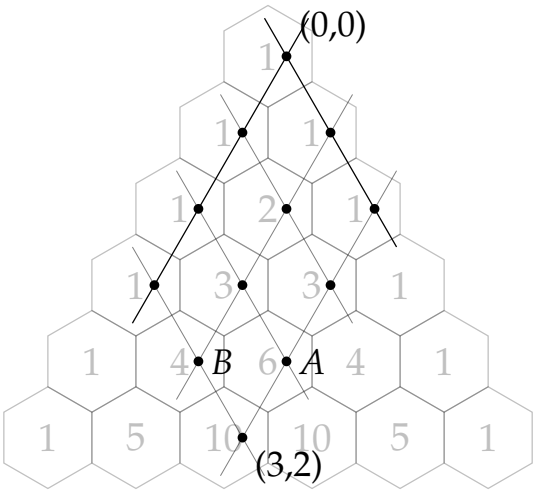
Ketika jarak antara titik awal dan titik akhir lebih besar, kita perlu mencari cara yang lebih efisien untuk mencacah lintasan-lintasan tersebut.

Mari kita gunakan apa yang telah kita pelajari dari lintasan benteng (yang ternyata memang merupakan lintasan kisi). Perhatikan kisi berikut:



Setiap lintasan kisi dari (0,0) ke (3,2) harus melalui tepat salah satu dari A dan B. Titik A berjarak 4 langkah dari (0,0), dan dua di antaranya berada dalam arah x. Langkah terakhir juga berada dalam arah x, sehingga lintasan dari (0,0) ke (3,2) yang melalui A tepat merupakan enam string di atas yang berakhir dengan x. Untuk lintasan yang melalui titik B, langkah terakhir berada dalam arah y, sehingga lintasan dari (0,0) ke (3,2) yang melalui B tepat merupakan empat string di atas yang berakhir dengan y. Jadi, banyaknya lintasan menuju (3,2) adalah 6 + 4.

Pengamatan umumnya adalah sebagai berikut. Untuk menentukan banyaknya lintasan yang berawal di $(0,0)$ dan berakhir di (m,n), kita dapat menjumlahkan banyaknya lintasan menuju titik tepat di sebelah kiri titik akhir, yaitu $(m-1,n)$, dengan banyaknya lintasan menuju titik tepat di bawah titik akhir, yaitu $(m,n-1)$. Cara ini persis sama dengan cara membentuk segitiga Pascal! Jika kita memutar kisi dengan tepat sehingga titik $(0,0)$ berada di puncak segitiga dan kedua sumbu terletak di sepanjang sisi-sisi segitiga, kita melihat bahwa bilangan-bilangan pada segitiga Pascal tepat menyatakan banyaknya lintasan menuju setiap titik kisi.



Agar pengamatan ini berguna untuk benar-benar menentukan banyaknya lintasan dari titik asal ke suatu titik, perhatikan bahwa *panjang* lintasan menentukan *baris* segitiga Pascal, sedangkan banyaknya langkah dalam arah y menentukan seberapa jauh posisi kita ke dalam segitiga, yaitu *kolom* segitiga Pascal.

Contoh 3.1.2

Ada berapa lintasan kisi dari $(0,0)$ ke $(4,7)$?

Penyelesaian. Panjang lintasan-lintasan ini adalah $4+7=11$. Perhatikan baris ke-11 segitiga Pascal:

$$1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1.$$

Hitung hingga posisi ke-7 (ingat bahwa angka 1 berada pada posisi 0); kita memperoleh $\binom{11}{7} = 330$ lintasan berbeda.

3.1.3 String Bit

"Bit" merupakan singkatan dari "digit biner", sehingga **string bit** adalah string yang terdiri atas digit-digit biner. **Digit biner** tidak lain adalah angka 0 dan 1. Semua objek berikut merupakan string bit:

$$1001 \quad 0 \quad 1111 \quad 1010101010.$$

Banyaknya bit (0 atau 1) dalam string disebut **panjang** string; string-string di atas berturut-turut memiliki panjang 4, 1, 4, dan 10. Kita juga dapat menanyakan berapa banyak bit yang bernilai 1. Banyaknya angka 1 dalam suatu string bit disebut **bobot** string; string-string di atas berturut-turut memiliki bobot 2, 0, 4, dan 5.

Definisi 3.1.3 String Bit.

- **String n-bit** adalah string bit yang panjangnya n. Dengan kata lain, string tersebut memuat n simbol, dan setiap simbol merupakan sebuah bit, yaitu 0 atau 1.
- **Bobot** suatu string bit adalah banyaknya angka 1 di dalamnya.
- $\mathbf{B}_k^n$ adalah himpunan semua string n-bit berbobot k.

Sebagai contoh, elemen-elemen himpunan $\mathbf{B}_2^3$ adalah string bit 011, 101, dan 110. Ketiganya merupakan satu-satunya string yang memuat tiga bit dengan tepat dua di antaranya bernilai 1.

Persoalan pencacahannya adalah: ada berapa string 5-bit yang berbobot 3? Dengan kata lain, kita menanyakan kardinalitas $|\mathbf{B}_3^5|$.

Mari kita tuliskan semuanya dan melihat berapa banyak yang diperoleh.

	11100	11010	10110	01110	
11001	10101	01101	10011	01011	00111.

Bagus. Ada sepuluh. Sebenarnya, saya harus mengaku: saya tidak mengetik semuanya dari awal. Saya hanya mengubah daftar 10 lintasan kisi dari (0,0) ke (3,2) yang kita peroleh sebelumnya. Setiap x diubah menjadi 1 dan setiap y menjadi 0. Bagaimanapun, setiap lintasan kisi dengan panjang n yang memerlukan k langkah dalam arah x dapat direpresentasikan oleh string yang terdiri atas n simbol dari dua jenis, dengan k simbol di antaranya berjenis sama. Menamai kedua simbol itu x dan y, atau menamainya 1 dan 0, tidak mengubah *banyaknya* string yang diperoleh.

Karena itu, tidak mengherankan jika hubungan yang sama antara segitiga Pascal dan lintasan kisi juga berlaku untuk string bit. Perhatikan 10 string di atas. Baris pertama memuat semua string bit dalam $\mathbf{B}_3^5$ yang berakhir dengan 0. Sebelum angka 0 terakhir itu terdapat sebuah string dalam $\mathbf{B}_3^4$, sebab string tersebut harus memiliki panjang 4 dan bobot 3 (angka 0 terakhir menambah panjang, tetapi tidak menambah bobot). Baris kedua memuat semua string bit dalam $\mathbf{B}_3^5$ yang berakhir dengan 1. Sebelum angka 1 terakhir itu terdapat sebuah string dalam $\mathbf{B}_2^4$, sebab string tersebut harus memiliki panjang 4 dan bobot 2 (angka 1 terakhir menambah panjang sekaligus bobot). Jadi, banyaknya string 5-bit berbobot 3 adalah jumlah banyaknya string 4-bit berbobot 3 dan banyaknya string 4-bit berbobot 2. Dalam simbol:

$$|\mathbf{B}_3^5| = |\mathbf{B}_3^4| + |\mathbf{B}_2^4|.$$

Sekarang kita memiliki dua alasan kuat untuk meyakini bahwa segitiga Pascal memberikan banyaknya string bit dengan bobot tertentu: terdapat korespondensi satu-satu antara lintasan kisi dan string bit, serta relasi rekurensi yang sama berlaku bagi string bit dan bagi pembentukan segitiga Pascal. Jadi, sekarang kita dapat menggunakan segitiga tersebut untuk mencacah string bit.

Contoh 3.1.4

Ada berapa string 11-bit yang berbobot 5?

Penyelesaian. Terdapat $\binom{11}{5}$ string semacam itu. Dari segitiga Pascal, kita melihat bahwa $\binom{11}{5} = 462$.

3.1.4 Subhimpunan dan Piza

Subhimpunan dari suatu himpunan A adalah himpunan yang seluruh elemennya juga merupakan elemen A. Bayangkan kita memulai dengan himpunan A lalu menghapus beberapa elemennya (atau tidak menghapus satu pun, atau menghapus semuanya): himpunan yang dihasilkan merupakan subhimpunan dari A. (Informasi lebih lanjut tentang himpunan dapat ditemukan dalam Subbab 0.2 dan Subbab 5.1.)

Misalkan kita memperhatikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ada berapa subhimpunan dari A yang memuat tepat 3 elemen? Mari kita tuliskan semuanya:

$$\begin{array}{ccccccc} & \{1,2,3\} & \{1,2,4\} & \{1,3,4\} & \{2,3,4\} & & \\ \{1,2,5\} & \{1,3,5\} & \{2,3,5\} & \{1,4,5\} & \{2,4,5\} & \{3,4,5\}. & \end{array}$$

Sekali lagi, kita memperoleh sepuluh objek. Bahkan, kita telah menuliskannya dalam urutan yang sama dengan sepuluh string 5-bit berbobot 3 dan sepuluh lintasan kisi dari (0,0) ke (3,2). Namun, apakah hal ini masuk akal? Dalam hal apa subhimpunan dapat dianggap sama dengan string bit?

Bayangkan setiap bit dalam suatu string bit merepresentasikan salah satu elemen dalam suatu himpunan. Himpunan A memiliki lima elemen, sehingga kita memerlukan lima bit untuk merepresentasikan subhimpunan dari A. Jika bit pada posisi n bernilai 0, berarti kita *tidak* memasukkan n ke dalam subhimpunan; sedangkan nilai 1 pada posisi tersebut menunjukkan bahwa n berada dalam subhimpunan. Tiga angka 1 berarti kita mengatakan "ya" kepada tiga elemen.

Contoh 3.1.5

Subhimpunan mana dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang bersesuaian dengan string bit berikut?

$$101011 \quad 001000 \quad 111111 \quad 000000$$

Penyelesaian. Di sini kita tidak menetapkan bobot string, sehingga subhimpunan yang diperoleh tidak semuanya berukuran sama. Berikut korespondensinya:

101011	$\{1,3,5,6\}$
001000	$\{3\}$
111111	$\{1,2,3,4,5,6\}$
000000	$\emptyset$

Subhimpunan terakhir adalah **himpunan kosong**, yaitu himpunan yang tidak memuat elemen apa pun (kita juga dapat menuliskannya sebagai {}). Himpunan ini merupakan subhimpunan dari *setiap* himpunan!

Catatan 3.1.6 Yang telah kita lakukan di sini adalah memberikan sebuah *bijeksi* antara himpunan string 5-bit berbobot 3 dan himpunan subhimpunan 3-elemen dari A. **Bijeksi** adalah fungsi $f : X \to Y$ sedemikian sehingga setiap elemen Y merupakan citra dari tepat satu elemen X. Anda dapat membuktikan bahwa jika terdapat bijeksi antara dua himpunan, maka keduanya memiliki banyak elemen yang sama. Ini merupakan teknik pencacahan umum yang akan kita gunakan pada bagian-bagian berikutnya.

Contoh ini sekali lagi memperlihatkan bahwa segitiga Pascal dapat memberikan jawaban bagi suatu persoalan pencacahan. Banyaknya subhimpunan k-elemen dari himpunan dengan n elemen sama dengan banyaknya string n-bit berbobot k, yaitu bilangan pada baris n, kolom k segitiga: $\binom{n}{k}$.

Contoh 3.1.7

Ada berapa subhimpunan dari himpunan $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ yang memiliki tepat 4 elemen?

Penyelesaian. Himpunan tersebut memuat 7 elemen, sehingga banyaknya subhimpunan 4-elemen sama dengan banyaknya string 7-bit berbobot 4, yaitu $\binom{7}{4} = 35$.

Pada tahap ini, saya yakin kita semua mulai lapar, jadi mari memesan piza. Namun, piza apa yang akan kita pesan? Agar tidak berlebihan, kita cukup memilih tiga dari sepuluh taburan yang tersedia. Ada berapa piza berbeda yang dapat kita pesan?

Aha! Inilah alasan kita perlu mencacah subhimpunan! Setiap pilihan piza tidak lain adalah subhimpunan 3-elemen dari himpunan 10 taburan. Sekarang kita tahu cara mencacahnya: terdapat $\binom{10}{3} = 120$ piza berbeda.

Bagaimana jika kita menginginkan soda Italia saat makan malam? Misalkan kita ingin menambahkan dua sirop dengan rasa berbeda dari 13 rasa yang tersedia. Ada berapa soda berbeda yang mungkin dibuat? Ini tidak lain adalah banyaknya subhimpunan 2-elemen dari himpunan dengan 13 elemen: $\binom{13}{2} = 78$.

Inilah alasan $\binom{n}{k}$ dibaca "n pilih k". Bilangan ini menyatakan banyaknya cara memilih k objek dari kumpulan n objek karena memilih k elemen tepat merupakan

cara membentuk subhimpunan k-elemen.

Kita dapat memandang pencacahan lintasan kisi sebagai memilih k dari n objek: dari n langkah pada lintasan, kita memilih k langkah untuk bergerak dalam arah x. String bit juga dapat dipandang dengan cara ini: dari n bit dalam string, kita memilih k bit untuk bernilai 1.

Sekarang kita dapat menjawab berbagai persoalan pencacahan di dunia nyata, selama persoalan itu pada dasarnya hanya menanyakan banyaknya subhimpunan dari suatu himpunan. Segitiga Pascal memuat semua jawaban tersebut.

Mencacah Subhimpunan.

Banyaknya subhimpunan k-elemen dari suatu himpunan dengan n elemen adalah bilangan pada baris n, kolom k segitiga Pascal, yaitu $\binom{n}{k}$, yang dibaca "n pilih k." Bilangan ini menyatakan banyaknya cara memilih k objek dari kumpulan n objek.

3.1.5 Aljabar?

Sebelumnya kita mengatakan bahwa salah satu penggunaan awal segitiga Pascal adalah untuk menyelesaikan persoalan dalam *aljabar*. Apa kaitan pencacahan subhimpunan (atau string bit atau lintasan kisi) dengan aljabar?

Misalkan Anda mengembangkan ekspresi binomial $(x + 1)^6$ (yaitu mengalikan binomial $x + 1$ dengan dirinya sendiri sebanyak enam kali). Pengerjaan secara manual dapat melelahkan, tetapi sistem aljabar komputer seperti SageMath dapat melakukannya dengan mudah.

```
expand((x+1)^6)
```

```
x^6 + 6*x^5 + 15*x^4 + 20*x^3 + 15*x^2 + 6*x + 1
```

Apakah koefisien-koefisiennya tampak tidak asing? Perhatikan baris ke-6 segitiga Pascal:

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$$

Mengapa bilangan-bilangan ini menjadi koefisiennya?

Cobalah 3.1.8

Ubah kode SageMath di atas untuk mengembangkan $(x + 1)^{10}$. Berapakah koefisien x^6?

Untuk melihat mengapa hal ini bukan sekadar kebetulan, mari kita perhatikan pengembangan $(x + y)^3$ dengan sangat cermat. Sebenarnya kita sedang mengalikan

$$(x + y)(x + y)(x + y).$$

Artinya, kita harus menerapkan sifat distributif pada binomial-binomial tersebut, seperti berikut. (Kita akan menggunakan bentuk huruf berbeda untuk setiap versi

x dan y agar asal setiap faktor dapat dilacak.)

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) \\ &= [(x+y)(\mathbf{x}+\mathbf{y})]\mathcal{X} + [(x+y)(\mathbf{x}+\mathbf{y})]\mathcal{Y} \\ &= [(x+y)\mathbf{x} + (x+y)\mathbf{y}]\mathcal{X} + [(x+y)\mathbf{x} + (x+y)\mathbf{y}]\mathcal{Y} \\ &= [x\mathbf{x} + y\mathbf{x} + x\mathbf{y} + y\mathbf{y}]\mathcal{X} + [x\mathbf{x} + y\mathbf{x} + x\mathbf{y} + y\mathbf{y}]\mathcal{Y} \\ &= x\mathbf{x}\mathcal{X} + y\mathbf{x}\mathcal{X} + x\mathbf{y}\mathcal{X} + y\mathbf{y}\mathcal{X} + x\mathbf{x}\mathcal{Y} + y\mathbf{x}\mathcal{Y} + x\mathbf{y}\mathcal{Y} + y\mathbf{y}\mathcal{Y}.\end{aligned}$$

Penerapan sifat distributif secara berulang menghasilkan jumlah suku-suku yang masing-masing merupakan hasil kali tiga variabel. Kita melihat bahwa setiap suku diperoleh dengan *memilih* x atau y dari setiap binomial. Sebagai contoh, suku $x\mathbf{y}\mathcal{X}$ diperoleh dengan memilih x dari binomial pertama, $\mathbf{y}$ dari binomial kedua, dan $\mathcal{X}$ dari binomial ketiga.

Misalkan kita ingin menentukan koefisien suku x^2y. Kita menggabungkan suku-suku sejenis, yaitu semua suku yang diperoleh dengan memilih x dua kali (dan y satu kali). Dari sudut pandang lain, suku x^2y berasal dari semua string yang memuat dua x dan satu y, seperti string bit atau lintasan kisi. Bagaimanapun cara kita memandangnya, hasilnya adalah terdapat $\binom{3}{2} = 3$ suku berbentuk x^2y.

Semoga jelas bahwa hasil ini dapat diperumum ke pengembangan $(x+y)^n$ untuk setiap bilangan bulat positif n. Hasil ini dikenal sebagai *teorema binomial*.

Teorema 3.1.9 Teorema Binomial.

Baris ke-n segitiga Pascal memberikan koefisien-koefisien pengembangan $(x+y)^n$. *Artinya, untuk setiap bilangan bulat positif* n,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.,$$

sehingga koefisien $x^k y^{n-k}$ *adalah* $\binom{n}{k}$.

Karena alasan ini, bilangan-bilangan pada segitiga Pascal sering disebut **koefisien binomial**.

Contoh 3.1.10

Tanpa mengalikan binomial tersebut satu per satu, berikan pengembangan $(x+y)^5$.

Penyelesaian. Kita mengambil baris ke-5 segitiga Pascal: $1, 5, 10, 10, 5, 1$. Dengan demikian, pengembangannya adalah

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

3.1.6 Pertanyaan Bacaan

1. Mengapa banyaknya lintasan kisi dari $(0, 0)$ ke $(3, 5)$ sama dengan banyaknya string 8-bit berbobot 5?

2. Manakah di antara persoalan pencacahan berikut yang jawabannya adalah $\binom{11}{5}$? Pilih semua yang sesuai.

A. Ada berapa lintasan kisi dari $(0, 0)$ ke $(11, 5)$?

B. Ada berapa subhimpunan dari $\{1, 2, \ldots, 11\}$ yang memuat tepat 5 elemen?

C. Ada berapa string 11-bit yang berbobot 5?

D. Ada berapa cara memilih 5 rasa es krim untuk membuat sundae raksasa dari 11 rasa yang tersedia?

3. Banyaknya subhimpunan berukuran 3 dari $\{1, 2, \ldots, 8\}$ sama dengan banyaknya subhimpunan dari $\{1, 2, \ldots, 7\}$ yang berukuran 2 atau 3. Jelaskan mengapa hal ini masuk akal.

4. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang ingin Anda ketahui lebih lanjut.

3.1.7 Soal Latihan

1. Gunakan segitiga Pascal untuk menentukan nilai numerik berikut.

(a) $\binom{7}{2}$ (c) $\binom{8}{3}$ (e) $\binom{8}{7}$

(b) $\binom{7}{3}$ (d) $\binom{10}{5}$ (f) $\binom{13}{2}$

2. Hitung jumlah baris-baris segitiga Pascal berikut.

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}.$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}.$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}.$$

Berdasarkan perhitungan di atas, buatlah dugaan untuk jumlah bilangan pada baris ke-13 segitiga Pascal.

3. Perhatikan lintasan kisi dari (3,4) ke (8,10).
Berapa panjang setiap lintasan tersebut?
Ada berapa langkah dalam arah x?
Ada berapa lintasan berbeda?

4. Ada berapa lintasan kisi dari (a, b) ke (c, d)? Berikan jawaban Anda sebagai koefisien binomial berbentuk $\binom{n}{k}$, dan nyatakan nilai n serta k.

5. Perhatikan string bit 100110010.
Berapakah panjang string bit tersebut?
Berapakah bobot string bit tersebut?
Ada berapa string bit (termasuk string ini) yang memiliki panjang dan bobot yang sama dengannya?

6. Perhatikan himpunan $\mathbf{B}_3^8$ yang terdiri atas string 8-bit berbobot 3.
Ada berapa angka 1 dalam setiap string bit? Ada berapa angka 0 dalam setiap string bit?
Ada berapa string bit dalam himpunan tersebut?
Ada berapa string 8-bit yang berbobot 5?

7. Misalkan Anda memesan calzone dari *D.P. Dough*. Anda menginginkan 5 isian berbeda, yang dipilih dari daftar 10 isian vegetarian mereka.

a. Ada berapa pilihan calzone yang dapat Anda buat?

b. Ada berapa pilihan calzone yang dapat Anda buat jika Anda tidak mau menggunakan paprika hijau sebagai salah satu isiannya?

c. Ada berapa pilihan calzone yang dapat Anda buat jika Anda *mewajibkan* paprika hijau sebagai salah satu isiannya?

Bagaimana hubungan ketiga pertanyaan di atas? Dapatkah Anda melihat mengapa hubungan tersebut masuk akal?

8. Ada berapa subhimpunan 6-elemen dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?
Di antara subhimpunan tersebut, ada berapa yang memuat bilangan 1?
Dari seluruh subhimpunan 6-elemen, ada berapa yang TIDAK memuat bilangan 1?

9. Berapakah koefisien x^{14} dalam $(x + 3)^{16}$?

10. Berapakah koefisien x^9 dalam pengembangan $(x + 2)^{17} + x^4(x + 3)^{21}$?

3.1.8 Latihan Tambahan

1. Ada berapa lintasan kisi dari $(0, 0)$ ke $(8, 3)$? Ada berapa lintasan kisi dari $(0, 0)$ ke $(3, 8)$? Mengapa wajar jika kedua bilangan ini sama? Jelaskan penalaran Anda.

2. Misalkan Anda sedang mencacah lintasan kisi dari $(0, 0)$ ke $(4, 3)$. Kita mengetahui bahwa banyaknya lintasan tersebut adalah $\binom{4+3}{4} = \binom{7}{4} = 35$. Berikut cara

lain untuk mencacahnya: perhatikan kasus-kasus berdasarkan letak langkah pertama dalam arah y. Terdapat lima kemungkinan berbeda; hitung banyaknya lintasan untuk setiap kasus.

(a) Ada berapa lintasan dari $(0, 0)$ ke $(4, 3)$ yang langkah pertamanya berada dalam arah y (yaitu lintasan yang melalui titik $(0, 1)$)?

(b) Ada berapa lintasan dari $(0, 0)$ ke $(4, 3)$ yang mula-mula bergerak satu langkah dalam arah x, lalu satu langkah dalam arah y (sehingga melalui titik $(1, 0)$ lalu $(1, 1)$)?

(c) Tuliskan tiga kasus yang tersisa beserta banyaknya lintasan untuk setiap kasus.

(d) Verifikasi bahwa jumlah banyaknya lintasan dari semua kasus adalah 35. Kemudian, jelaskan letak semua bilangan ini pada segitiga Pascal. Temukan contoh lain dari pola tersebut dan verifikasi bahwa pola itu berlaku.

3. Jelaskan mengapa koefisien x^5y^3 sama dengan koefisien x^3y^5 dalam pengembangan $(x + y)^8$.

4. Perhatikan pengembangan $(x + y)^5$.

(a) Gunakan teorema binomial untuk menuliskan pengembangan $(x + y)^5$.

(b) Dengan menggunakan bentuk pengembangan $(x + y)^5$, kalikan $(x + y)^5 \cdot (x + y)$ menggunakan sifat distributif. Sederhanakan jawaban Anda, tetapi tunjukkan semua langkahnya.

(c) Bagaimana hubungan jawaban Anda sebelumnya dengan hasil yang diperoleh ketika teorema binomial diterapkan pada $(x + y)^6$?

3.2 Menggabungkan Hasil

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menerapkan prinsip penjumlahan dan prinsip perkalian untuk mencacah banyaknya hasil suatu kejadian.
2. Menyelesaikan persoalan pencacahan dengan menggabungkan prinsip penjumlahan dan prinsip perkalian.
3. Menjustifikasi prinsip perkalian berdasarkan prinsip penjumlahan.

3.2.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Satu set kartu remi standar memuat 52 kartu. Terdapat empat jenis: keriting, wajik, hati, dan sekop. Setiap jenis memuat kartu dengan 13 nilai: As, 2, 3, ..., 10, Jack, Ratu, dan Raja.

Kartu hati dan wajik disebut **kartu merah** (sedangkan kartu keriting dan sekop disebut **kartu hitam**). Pada setiap jenis, Jack, Ratu, dan Raja disebut **kartu bergambar** (kartu lainnya disebut **kartu angka**).

Misalkan Anda mengambil dua kartu dari satu set kartu. Ada berapa kombinasi berbeda dengan kartu pertama berupa kartu merah dan kartu kedua berupa kartu bergambar?

Kombinatorika membahas pencacahan, tetapi jika memperhatikan namanya, kita melihat bahwa bidang ini sebenarnya membahas cara berbagai hal *dikombinasikan*. Dalam bagian ini, kita akan menelaah dua cara yang sangat berbeda untuk menggabungkan hasil-hasil yang dicacah dalam persoalan kombinatorika.

Kegiatan Pratinjau

1. Sebuah restoran menawarkan 8 hidangan pembuka dan 14 hidangan utama. Ada berapa pilihan jika:

a. Anda akan menyantap satu hidangan, berupa hidangan pembuka atau hidangan utama?

b. Anda sangat lapar dan ingin menyantap hidangan pembuka sekaligus hidangan utama?

2. Pikirkan metode yang Anda gunakan untuk menyelesaikan pertanyaan tentang hidangan pembuka dan hidangan utama. Dapatkah metode tersebut dirumuskan sebagai aturan untuk menggabungkan dua banyak objek dalam pencacahan? Tuliskan aturan-aturan bagi metode tersebut.

3. Apakah aturan Anda berlaku? Untuk memeriksanya, mari terapkan aturan tersebut pada persoalan pencacahan lain. Dengan mengetahui bahwa satu set kartu remi standar memiliki 12 kartu bergambar dan 26 kartu merah, jawablah pertanyaan berikut.

(a) Ada berapa cara memilih kartu yang merupakan kartu bergambar *atau* kartu merah?

(b) Ada berapa cara memilih kartu yang sekaligus merupakan kartu bergambar *dan* kartu merah?

3.2.2 Apa yang Dimaksud dengan *Hasil*?

Sebelum mulai mencacah, mari kita perhatikan sejenak cara persoalan pencacahan diajukan. Persoalan pencacahan sering kali menanyakan berapa banyak cara sesuatu dapat terjadi. Artinya, terdapat suatu **kejadian** yang dapat memberikan berbagai **hasil**, dan hasil-hasil yang berbeda itulah yang dicacah. Sebagai alternatif, kita dapat mengambil sudut pandang yang kurang "aktif" dengan menanyakan banyaknya elemen dalam suatu himpunan, misalnya himpunan string bit dengan panjang dan bobot tertentu. Namun, pertanyaan ini pun dapat dirumuskan kembali sebagai pertanyaan tentang suatu kejadian: jika Anda memilih secara acak salah satu string bit (dari himpunan string bit), ada berapa hal yang dapat terjadi?

Jadi, mencacah elemen dalam suatu himpunan sebenarnya tidak berbeda dengan mencacah banyaknya hasil suatu kejadian. Mari kita pandang setiap persoalan pencacahan sebagai pertanyaan tentang banyaknya elemen dalam suatu *himpunan hasil*.

Pada tingkat paling dasar, pencacahan sama sekali tidak sulit: tuliskan semua hasil dalam daftar bernomor dan lihat berapa banyak nomor yang digunakan. Mari saya ceritakan koleksi dasi kupu-kupu saya. Saya memiliki

1. Sebuah dasi kupu-kupu ungu.
2. Sebuah dasi kupu-kupu hijau.
3. Sebuah dasi kupu-kupu bergaris.
4. Sebuah dasi kupu-kupu bermotif paisley.

Berapa banyak dasi kupu-kupu yang saya miliki (ada berapa cara saya dapat memilih sebuah dasi kupu-kupu)? Bilangan terbesar dalam daftar bernomor saya adalah 4, jadi saya memiliki empat dasi kupu-kupu.[1] Tentu saja, seperti yang kita lihat

[1]Jelas bahwa contoh ini sudah cukup usang; hanya empat dasi kupu-kupu? Anda mengira saya matematikawan macam apa?

pada bagian sebelumnya, kita dapat menggunakan jalan pintas agar tidak perlu menuliskan semua hasil, misalnya menggunakan segitiga Pascal untuk menentukan banyaknya objek dalam daftar.

Pencacahan mulai menarik ketika kita ingin membuat daftar baru yang menggabungkan dua atau lebih daftar yang telah kita cacah. Sebagai contoh, misalkan selain daftar empat dasi kupu-kupu, saya memiliki daftar tujuh pasang kaus kaki unik. Saya dapat menanyakan banyaknya pilihan jika saya ingin mengenakan sebuah dasi kupu-kupu keren atau sepasang kaus kaki unik. Gabungkan kedua daftar tersebut untuk membuat daftar baru dengan 11 objek: mungkin kita menuliskan empat dasi kupu-kupu terlebih dahulu, lalu melanjutkan pencacahan (dimulai dengan nomor 5 untuk pasangan kaus kaki pertama) hingga tujuh objek tambahan selesai dituliskan dan daftar berakhir pada nomor 11.

Dalam contoh ini, kita telah menggabungkan dua himpunan hasil (memilih dasi kupu-kupu dan memilih sepasang kaus kaki) untuk memperoleh himpunan hasil baru (memilih dasi kupu-kupu atau sepasang kaus kaki). Himpunan hasil yang terbentuk memuat 11 elemen.

Sekarang perhatikan pertanyaan berikut: ada berapa pilihan jika saya ingin mengenakan dasi kupu-kupu sekaligus sepasang kaus kaki unik? Sekali lagi, saya perlu menggabungkan dua himpunan hasil untuk memperoleh himpunan hasil baru. Namun, himpunan hasil baru ini akan memuat 28 elemen. Bagaimana saya mengetahui bahwa banyaknya elemen dalam kedua himpunan asal harus dikalikan, bukan dijumlahkan? Sekali lagi kita menggabungkan hasil: himpunan hasil yang terbentuk memuat 28 elemen yang masing-masing terdiri atas sebuah dasi kupu-kupu dan sepasang kaus kaki. Sekarang bacalah kembali paragraf sebelumnya! Keduanya terdengar sangat mirip!

Perbedaan antara kedua skenario tersebut cukup halus. Terdapat dua cara untuk memandang penggabungan hasil:

1. Kita dapat menggabungkan *himpunan-himpunan* hasil.
2. Kita dapat menggabungkan *hasil-hasil* di dalam himpunan.

Kemampuan membedakan kedua operasi ini merupakan keterampilan penting dalam kombinatorika.

Contoh 3.2.1

Misalkan pada pintu lemari es Anda terdapat beberapa magnet berbentuk huruf dan angka: ada lima huruf (A, B, C, D, dan E) serta tiga angka (1, 2, dan 3). Saudara laki-laki Anda mengatakan bahwa jika kedua himpunan magnet ini digabungkan, akan diperoleh koleksi 8 magnet. Saudara perempuan Anda mengatakan bahwa magnet-magnet ini dapat digabungkan dengan 15 cara.

Himpunan hasil apa yang dipikirkan oleh kedua saudara Anda?

Penyelesaian. Saudara laki-laki Anda memikirkan penggabungan himpunan-himpunan hasil. Himpunan hasil untuk huruf adalah $\{A, B, C, D, E\}$, sedangkan himpunan hasil untuk angka adalah $\{1, 2, 3\}$. Himpunan hasil un-

tuk gabungan kedua himpunan magnet adalah $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3\}$, yang memuat 8 elemen.

Saudara perempuan Anda memikirkan penggabungan hasil-hasil itu sendiri. Himpunan hasilnya adalah

$$\{A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D1, D2, D3, E1, E2, E3\},$$

yang memuat 15 elemen.

3.2.3 Prinsip Penjumlahan dan Prinsip Perkalian

Mari kita tuliskan dengan cermat aturan-aturan yang dapat digunakan untuk menggabungkan himpunan-himpunan hasil dan hasil-hasil di dalam himpunan.

Prinsip 3.2.2 Prinsip Penjumlahan.

Jika kejadian A memberikan m hasil dan kejadian B memberikan n hasil yang saling lepas *dari hasil kejadian pertama, maka kejadian "A atau B" memberikan m + n hasil.*

Penting bahwa kedua kejadian tersebut **saling lepas**, yaitu tidak mungkin A dan B terjadi secara bersamaan. Sebagai contoh, satu set kartu remi standar yang terdiri atas 52 kartu memuat 26 kartu merah dan 12 kartu bergambar. Namun, banyaknya cara memilih kartu yang berwarna merah atau merupakan kartu bergambar bukanlah $26 + 12 = 38$. Hal ini karena terdapat 6 kartu yang sekaligus berwarna merah dan merupakan kartu bergambar.

Contoh 3.2.3

Ada berapa "kata" dua huruf yang diawali dengan A atau B? (Sebuah **kata** di sini hanya merupakan barisan huruf; kata itu tidak harus merupakan kata bahasa Inggris, bahkan tidak harus dapat dilafalkan.)

Penyelesaian. Pertama, ada berapa kata dua huruf yang diawali dengan A? Kita hanya perlu memilih huruf kedua, yang dapat dilakukan dengan 26 cara. Jadi, terdapat 26 kata yang diawali dengan A. Terdapat pula 26 kata yang diawali dengan B. Untuk memilih kata yang diawali dengan A atau B, kita dapat memilihnya dari 26 kata pertama atau 26 kata kedua, sehingga seluruhnya terdapat 52 kata.

Kita memiliki dua himpunan hasil: kata-kata yang diawali dengan A dan kata-kata yang diawali dengan B. Kita membuat himpunan hasil baru dengan menggabungkan kedua himpunan itu untuk memperoleh himpunan kata yang diawali dengan A atau B. Menurut prinsip penjumlahan, himpunan baru ini memuat 52 hasil.

Kita sering menggunakan prinsip ini ketika himpunan-himpunan hasil perlu dicacah dengan teknik pencacahan lain.

Contoh 3.2.4

Ada berapa string 10-bit berbobot 6 yang diawali dengan 11 atau 00?

Penyelesaian. Kita telah mempelajari cara mencacah string bit dengan panjang dan bobot tetap dalam Subbab 3.1. Jumlah seluruh string 10-bit berbobot 6 adalah $\binom{10}{6} = 210$ (nilai ini diperoleh menggunakan segitiga Pascal). Namun, kita hanya ingin mencacah string yang diawali dengan 11 atau 00 (bukan yang diawali dengan 10 atau 01).

Karena tidak ada string bit yang sekaligus diawali dengan 11 dan 00, kita dapat menerapkan prinsip penjumlahan. Kita akan menghitung ukuran setiap himpunan hasil, lalu menjumlahkan hasilnya.

Ada berapa string 10-bit berbobot 6 yang diawali dengan 11? Jika string diawali dengan 11, maka di antara delapan bit yang tersisa harus terdapat empat angka 1 agar bobot totalnya 6. Ini sama dengan menanyakan banyaknya string 8-bit berbobot 4, sehingga terdapat $\binom{8}{4} = 70$ string semacam itu. Demikian pula, terdapat $\binom{8}{6} = 28$ string yang diawali dengan 00 (keenam angka 1 harus berada di antara 8 bit yang tersisa). Menurut prinsip penjumlahan, jumlah seluruh string yang ingin kita cacah adalah $70 + 28 = 98$.

Kita juga dapat menggunakan prinsip penjumlahan *secara tidak langsung* dengan cara yang mungkin saja disebut *prinsip pengurangan* (tetapi sebenarnya tidak demikian).

Contoh 3.2.5

Ada berapa string 10-bit berbobot 6 yang memiliki setidaknya satu angka 1 di antara tiga bit pertamanya?

Penyelesaian. Ada banyak cara berbeda bagi sebuah string untuk memiliki setidaknya satu angka 1 di antara tiga bit pertamanya: string itu dapat diawali dengan 100, 010, 001, 101, 110, 011, atau 111. Kita dapat mencacah banyaknya string untuk setiap awalan tersebut, lalu menerapkan prinsip penjumlahan berkali-kali. Namun, kita tidak akan melakukannya.

Misalkan banyaknya string yang ingin kita cacah adalah x. Misalkan y adalah banyaknya string 10-bit berbobot 6 yang *tidak* memiliki angka 1 pada ketiga bit pertamanya. Berapakah $x + y$? Nilai ini adalah jumlah seluruh string 10-bit berbobot 6, yaitu $\binom{10}{6} = 210$. Menentukan y juga mudah: string bit dengan panjang 10 dan bobot 6 yang diawali dengan 000 harus berakhir dengan string bit yang panjangnya 7 dan bobotnya 6. Terdapat $\binom{7}{6} = 7$ string semacam itu.

Dengan demikian, kita memperoleh

$$x + 7 = 210,$$

sehingga $x = 210 - 7 = 203$.

Meskipun kita tidak ingin menggunakan prinsip penjumlahan berulang kali dalam contoh sebelumnya, sebenarnya kita dapat melakukannya. Prinsip penjumlahan berlaku untuk lebih dari dua kejadian. Misalkan, selain empat dasi kupu-kupu dan tujuh pasang kaus kaki, Anda juga dapat memilih satu dari lima kepala ikat pinggang. Sekarang ada berapa pilihan? Anda memiliki $4 + 7 + 5 = 16$ pilihan.

Contoh 3.2.6

Ada berapa kata dua huruf yang diawali dengan salah satu dari 5 huruf vokal?

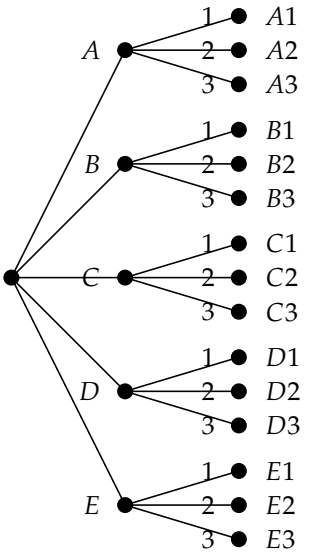
Penyelesaian. Terdapat 26 kata dua huruf yang diawali dengan A, 26 lainnya yang diawali dengan E, dan seterusnya. Menurut prinsip penjumlahan, jumlah seluruh kata adalah $26 + 26 + 26 + 26 + 26 = 130$. Tentu saja, akan lebih mudah jika kita langsung menghitung $5 \cdot 26$.

Perhatikan bahwa dalam contoh sebelumnya, ketika prinsip penjumlahan digunakan pada sejumlah himpunan hasil berukuran sama, perkalian memberikan cara yang lebih cepat. Mari kita manfaatkan pengamatan ini dan menyatakannya sebagai prinsip baru.

Prinsip 3.2.7 Prinsip Perkalian.

Jika kejadian A dapat terjadi dengan m cara, dan setiap kemungkinan bagi A memungkinkan tepat n cara bagi kejadian B, maka kejadian "A dan B" dapat terjadi dengan $m \cdot n$ cara.

Salah satu cara yang baik untuk menggambarkan prinsip perkalian adalah memandang hasil sebagai "tingkat" dalam suatu pohon. Sebagai ilustrasi, perhatikan persoalan pencacahan dalam Contoh 3.2.1: ada berapa cara memilih sebuah huruf dari $\{A, B, C, D, E\}$, kemudian sebuah angka dari $\{1, 2, 3\}$? Diagram pohon berikut menunjukkan prosesnya.



Setiap daun pada pohon bersesuaian dengan satu hasil. Pohon tersebut menunjukkan bahwa ketiga hasil pada tingkat kedua diulang lima kali, masing-masing sekali untuk setiap hasil pada tingkat pertama.

Contoh 3.2.8

Ada berapa kata dua huruf yang diawali dengan salah satu dari 5 huruf vokal? Kali ini gunakan prinsip perkalian untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Penyelesaian. Bagaimana kita dapat memandang pemilihan kata dua huruf sebagai urutan dua kejadian yang keduanya terjadi? Kejadian A adalah "memilih huruf vokal yang mengawali kata." Kejadian B adalah "memilih huruf kedua kata." Menurut prinsip perkalian, terdapat $5 \cdot 26 = 130$ cara bagi kejadian "A dan B" untuk terjadi.

Tentu saja, penyelesaian Contoh 3.2.6 dan Contoh 3.2.8 memberikan hasil yang sama, tetapi hasil yang kita gabungkan dan cara menggabungkannya berbeda.

Ketika menerapkan prinsip penjumlahan, kita menggabungkan lima himpunan hasil yang saling lepas. Salah satu himpunan hasil tersebut adalah

$$\{AA, AB, AC, AD, \ldots, AZ\}$$

dan himpunan lainnya adalah

$$\{EA, EB, EC, ED, \ldots, EZ\}.$$

Dengan kata lain, setiap himpunan hasil merupakan himpunan kata dua huruf yang diawali dengan huruf vokal berbeda. Prinsip penjumlahan menggabungkan kelima himpunan ini untuk membentuk himpunan baru yang memuat tepat elemen-elemen yang sama dengan himpunan-himpunan asal, tetapi semuanya terkumpul dalam satu himpunan.

Sebaliknya, ketika menerapkan prinsip perkalian, kita menggabungkan hasil-hasil dalam dua himpunan. Himpunan pertama adalah

$$\{A, E, I, O, U\}$$

dan himpunan kedua adalah

$$\{A, B, C, D, \ldots, Z\}.$$

Prinsip perkalian menggabungkan elemen-elemen dalam kedua himpunan tersebut untuk membentuk himpunan hasil baru (hasil-hasil yang tidak terdapat dalam himpunan mana pun yang digabungkan).

Seperti halnya prinsip penjumlahan, kita sering menggunakan prinsip perkalian untuk mendefinisikan himpunan-himpunan hasil yang terlebih dahulu perlu dicacah dengan cermat.

Contoh 3.2.9

Ada berapa lintasan kisi dari $(0, 0)$ ke $(10, 10)$ yang melalui titik $(4, 7)$?

Penyelesaian. Kita dapat mencacah lintasan kisi dengan segitiga Pascal, tetapi bagaimana kita memastikan bahwa lintasan melalui suatu titik tertentu? Setiap lintasan yang melalui $(4, 7)$ harus terlebih dahulu bergerak dari $(0, 0)$ ke $(4, 7)$, lalu menyelesaikan perjalanannya dengan lintasan dari $(4, 7)$ ke $(10, 10)$.

Banyaknya lintasan dari $(0, 0)$ ke $(4, 7)$ adalah $\binom{11}{4} = 330$.

Banyaknya lintasan dari $(4, 7)$ ke $(10, 10)$ adalah $\binom{9}{3} = 84$. (Lintasan-lintasan tersebut memiliki panjang 9 dengan 6 langkah dalam arah x.)

Sekarang gabungkan keduanya dengan... tunggu, prinsip yang mana? Untuk memperoleh lintasan dari $(0, 0)$ ke $(10, 10)$ yang melalui $(4, 7)$, kita perlu terlebih dahulu memilih lintasan dari $(0, 0)$ ke $(4, 7)$, kemudian *menyambungkan* lintasan dari $(4, 7)$ ke $(10, 10)$. Jadi, apakah kita menggunakan prinsip penjumlahan?

Bukan! Ingat bahwa prinsip penjumlahan menggabungkan dua himpunan hasil. Jika menerapkan prinsip penjumlahan, kita akan memperoleh himpunan lebih besar yang memuat $330 + 84$ lintasan dari kedua himpunan secara terpisah. Tidak satu pun merupakan lintasan lengkap yang ingin kita cacah. Kita ingin menggabungkan berbagai elemen dalam himpunan-himpunan hasil menurut setiap kombinasi yang mungkin. Karena itulah prinsip perkalian tepat digunakan di sini.

Dengan demikian, jumlah seluruh lintasan yang ingin kita cacah adalah $330 \cdot 84 = 27720$.

Prinsip perkalian juga dapat diperumum untuk lebih dari dua kejadian.

Contoh 3.2.10

Ada berapa pelat nomor yang dapat dibuat dari tiga huruf yang diikuti tiga digit angka?

Penyelesaian. Di sini terdapat enam kejadian: huruf pertama, huruf kedua, huruf ketiga, digit pertama, digit kedua, dan digit ketiga. Masing-masing dari tiga kejadian pertama dapat terjadi dengan 26 cara; masing-masing dari tiga kejadian terakhir dapat terjadi dengan 10 cara. Jadi, menurut prinsip perkalian, jumlah seluruh pelat nomor adalah $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Apakah hal ini masuk akal? Pikirkan cara kita memilih sebuah pelat nomor. Ada berapa pilihan? Pertama, kita harus memilih huruf pertama. Terdapat 26 pilihan. Untuk setiap pilihan tersebut, terdapat 26 pilihan bagi huruf kedua: 26 huruf kedua jika huruf pertama A, 26 huruf kedua jika huruf pertama B, dan seterusnya. Kita menjumlahkan 26 dengan dirinya sendiri sebanyak 26 kali. Atau, dengan lebih cepat: terdapat $26 \cdot 26$ pilihan untuk dua huruf pertama.

Selanjutnya, untuk setiap pilihan dua huruf pertama, kita memiliki 26 pilihan bagi huruf ketiga. Artinya, terdapat 26 pilihan huruf ketiga setelah dua huruf pertama AA, 26 pilihan huruf ketiga setelah awalan AB, dan seterusnya. Terdapat $26 \cdot 26$ kelompok pilihan yang masing-masing berisi 26 pilihan huruf ketiga, sehingga seluruhnya ada $(26 \cdot 26) \cdot 26$ pilihan bagi tiga huruf pertama. Untuk setiap dari $26 \cdot 26 \cdot 26$ pilihan huruf ini, kita memiliki sejumlah pilihan bagi digit-digit yang tersisa.

Bahkan, terdapat tepat 1000 pilihan angka. Kita dapat melihatnya karena terdapat 1000 bilangan tiga digit (000 hingga 999). Terdapat 10 pilihan untuk digit pertama, 10 untuk digit kedua, dan 10 untuk digit ketiga. Menurut prinsip perkalian, kita mengalikannya: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

Secara keseluruhan, terdapat 26^3 pilihan bagi ketiga huruf dan 10^3 pilihan bagi ketiga angka, sehingga kita memiliki total $26^3 \cdot 10^3$ pilihan pelat nomor.

Jawaban contoh sebelumnya menggunakan eksponen. Jadi, adakah **prinsip eksponensial** yang perlu kita pelajari? Kita tidak memisahkannya sebagai prinsip tersendiri karena tidak ada perbedaan dalam cara kita memikirkan pembentukan himpunan hasil. Namun, kita akan sering melihat prinsip perkalian diterapkan pada kejadian yang sama yang diulang beberapa kali. Berikut dua contohnya.

Contoh 3.2.11

Misalkan Anda melempar dadu bersisi 12 sebanyak tujuh kali dan mencatat angka yang muncul setelah setiap lemparan. Ada berapa barisan tujuh hasil lemparan yang mungkin?

Penyelesaian. Setiap lemparan dapat memberikan 12 hasil berbeda, sehingga menurut prinsip perkalian, jumlah seluruh barisan adalah 12^7.

Contoh 3.2.12

Ada berapa piza berbeda yang dapat dibuat jika tersedia 10 pilihan taburan dan Anda boleh menggunakan berapa pun banyaknya taburan pada piza?

Penyelesaian. Jika ingin menerapkan prinsip perkalian, kita harus memandang kejadian majemuk berupa pemilihan piza sebagai hasil penggabungan sejumlah kejadian individual menurut setiap kombinasi yang mungkin. Apa saja kejadian tersebut? Pertanyaan ini memiliki beberapa jawaban, tetapi jawaban berikut paling berguna.

Pertama, putuskan apakah Anda ingin menambahkan ikan teri pada piza. Kejadian ini dapat memberikan dua hasil (ya atau tidak untuk ikan teri). Kedua, putuskan apakah Anda ingin menambahkan zaitun hitam. Kemudian bacon Kanada, tomat potong dadu, dan seterusnya. Setiap kejadian memiliki dua hasil, dan kita harus menggabungkan hasil dari kesepuluh kejadian ini untuk membentuk satu hasil yang bersesuaian dengan satu piza. Jadi, menurut prinsip perkalian, terdapat 2^{10} piza yang mungkin.

Sebagai catatan, pendekatan lain terhadap persoalan ini adalah "mengodekan" setiap piza sebagai string bit, dengan 1 berarti taburan disertakan dan 0 berarti tidak. Dengan demikian, banyaknya piza sama dengan banyaknya string bit yang panjangnya 10. Setiap bit dalam string memiliki dua nilai yang mungkin, sehingga terdapat 2^{10} string 10-bit.

Hati-hati: "dan" tidak berarti "dikali". Sebagai contoh, ada berapa kartu remi yang sekaligus berwarna merah dan merupakan kartu bergambar? Bukan $26 \cdot 12$. Jawabannya adalah 6, dan kita perlu mengetahui sifat kartu remi untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Contoh 3.2.13 Mencacah Fungsi.

Ada berapa fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c, d\}$?

Penyelesaian. Ingat bahwa fungsi memetakan setiap elemen domain ke tepat satu elemen kodomain. Untuk menentukan sebuah fungsi, kita hanya perlu menentukan citra setiap elemen domain. Ke mana 1 dapat dipetakan? Terdapat 4 pilihan. Ke mana 2 dapat dipetakan? Sekali lagi, terdapat 4 pilihan. Di sini kita memiliki 5 "kejadian" (memilih citra suatu elemen domain), yang masing-masing dapat terjadi dengan 4 cara (pilihan bagi citra tersebut). Dengan demikian, terdapat $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ fungsi.

Ini bukan sekadar contoh penggunaan prinsip perkalian dalam suatu persoalan pencacahan tertentu. Di sini kita memperoleh interpretasi umum bagi penerapan tertentu prinsip perkalian dengan menggunakan objek matematika yang didefinisikan secara ketat, yaitu fungsi. Setiap kali suatu persoalan pencacahan menanyakan banyaknya hasil dari kejadian yang diulang, kita dapat menafsirkannya sebagai pertanyaan tentang banyaknya fungsi

dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ (dengan n adalah banyaknya pengulangan kejadian) ke $\{1, 2, \ldots, k\}$ (dengan k adalah banyaknya cara kejadian tersebut dapat terjadi).

3.2.4 Menggabungkan Prinsip

Mari kita kembali ke pertanyaan *Selidiki!* pada bagian ini: ada berapa cara memilih dua kartu dari satu set standar berisi 52 kartu sehingga kartu pertama berwarna merah dan kartu kedua merupakan kartu bergambar?

Persoalan ini agak menyerupai prinsip perkalian karena hasil-hasilnya terdiri atas pasangan kartu. Terdapat 26 kartu merah yang menjadi hasil bagi kejadian pertama dan 12 kartu bergambar yang menjadi hasil bagi kejadian kedua. Namun, jawabannya bukan $26 \cdot 12$. Masalahnya, meskipun kartu pertama dapat dipilih dengan 26 cara, tidak benar bahwa *untuk setiap* pilihan tersebut terdapat 12 cara memilih kartu kedua. Jika kartu pertama sekaligus berwarna merah dan merupakan kartu bergambar, hanya akan tersisa 11 pilihan bagi kartu kedua.

Dalam Subbab 3.3 kita akan mempelajari beberapa cara menyesuaikan pencacahan ketika kejadian-kejadian tidak saling lepas. Namun, dengan berhati-hati, kita dapat menyelesaikan persoalan kartu ini sekarang. Perhatikan seluruh himpunan hasil dua kartu. Dapatkah kita membagi hasil-hasil tersebut menjadi dua himpunan yang saling lepas (agar prinsip penjumlahan dapat diterapkan), sedemikian sehingga setiap himpunan dapat dibentuk menggunakan prinsip perkalian?

Dari semua hasil, pertama-tama kita cacah hasil yang diawali dengan kartu merah yang bukan kartu bergambar. Di antara 26 kartu merah, terdapat 6 kartu bergambar, sehingga terdapat 20 kartu merah yang bukan kartu bergambar. Untuk setiap kartu ini, terdapat 12 kartu bergambar yang dapat dipilih sebagai kartu kedua. Menurut prinsip perkalian, banyaknya hasil dua kartu yang diawali dengan kartu merah bukan bergambar adalah $20 \cdot 12 = 240$.

Sekarang, hasil mana yang belum kita cacah? Tepat hasil dua kartu yang diawali dengan kartu merah bergambar. Terdapat 6 pilihan kartu pertama, dan untuk setiap pilihan terdapat 11 pilihan kartu kedua. Jadi, banyaknya hasil dua kartu yang diawali dengan kartu merah bergambar adalah $6 \cdot 11 = 66$.

Terakhir, terapkan prinsip penjumlahan pada dua himpunan hasil yang saling lepas ini untuk memperoleh jumlah seluruh hasil dua kartu, yaitu $240 + 66 = 306$.

Kita menutup bagian ini dengan dua contoh tambahan tentang penggunaan prinsip penjumlahan dan prinsip perkalian secara bersama-sama dalam satu persoalan pencacahan.

Contoh 3.2.14

Ada berapa lintasan kisi dari $(0, 0)$ ke $(9, 9)$ yang melalui $(2, 6)$ atau $(6, 2)$?

Penyelesaian. Kita beruntung karena tidak ada lintasan dari $(0, 0)$ ke $(9, 9)$ yang melalui $(2, 6)$ sekaligus $(6, 2)$. Artinya, kita dapat menerapkan prinsip

penjumlahan pada dua himpunan hasil: lintasan yang melalui $(2, 6)$ dan lintasan yang melalui $(6, 2)$. Kita akan menerapkan prinsip perkalian untuk menentukan banyaknya lintasan dalam masing-masing himpunan hasil yang saling lepas ini.

Setiap lintasan dari $(0, 0)$ ke $(9, 9)$ yang melalui $(2, 6)$ merupakan konkatenasi lintasan dari $(0, 0)$ ke $(2, 6)$ dan lintasan dari $(2, 6)$ ke $(9, 9)$. Terdapat $\binom{8}{2} = 28$ lintasan untuk bagian pertama dan $\binom{10}{7} = 120$ lintasan untuk bagian kedua. Jadi, penerapan prinsip perkalian memberikan $28 \cdot 120 = 3360$ lintasan yang melalui $(2, 6)$.

Banyaknya lintasan dari $(0, 0)$ ke $(9, 9)$ yang melalui $(6, 2)$ dapat dihitung dengan cara serupa sebagai

$$\binom{8}{6} \cdot \binom{10}{3} = 28 \cdot 120 = 3360$$

(dan setelah dipikirkan, tidak mengherankan bahwa kedua bilangan ini sama karena setiap lintasan yang melalui $(2, 6)$ dapat dicerminkan untuk membentuk lintasan yang melalui $(6, 2)$).

Dengan demikian, jumlah seluruh lintasan yang melalui $(2, 6)$ atau $(6, 2)$ adalah $3360 + 3360 = 6720$.

Contoh 3.2.15

Ada berapa bilangan dua digit yang hanya menggunakan digit dari $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan memiliki *jumlah* digit genap?

Penyelesaian. Pertama, pikirkan himpunan hasilnya. Beberapa bilangan dua digit dengan jumlah digit genap adalah $11, 13, 15, 22, 24, 31, \ldots$. Mungkin tidak terlalu sulit untuk menuliskan semuanya (dan itu merupakan cara yang baik untuk memeriksa pekerjaan kita). Meskipun demikian, mari kita mencoba menggunakan prinsip penjumlahan dan prinsip perkalian.

Apa yang kita perhatikan dari semua bilangan ini? Agar jumlahnya genap, tampaknya kedua digit harus genap atau keduanya harus ganjil. Kita dapat meninjau kedua kasus tersebut dan mencacah setiap kasus menggunakan prinsip perkalian.

Mencacah bilangan "ganjil-ganjil": terdapat tiga pilihan untuk digit pertama dan tiga pilihan untuk digit kedua. Jadi, terdapat $3 \cdot 3 = 9$ bilangan ganjil-ganjil.

Mencacah bilangan "genap-genap": terdapat dua pilihan untuk digit pertama dan dua pilihan untuk digit kedua. Jadi, terdapat $2 \cdot 2 = 4$ bilangan genap-genap.

Jika digabungkan, terdapat $9 + 4 = 13$ bilangan dua digit dengan jumlah digit genap.

3.2.5 Pertanyaan Bacaan

1. Bagaimana Anda menentukan apakah harus menjumlahkan atau mengalikan ketika menggabungkan bilangan dalam suatu persoalan pencacahan? Jelaskan cara Anda memikirkannya saat ini.

2. Sepupu Anda sedang mencoba menyelesaikan persoalan pencacahan tentang banyaknya rute berbeda yang dapat ia tempuh antara asrama dan ruang kuliahnya. Ia memiliki 9 rute yang masuk akal untuk berangkat dan, demikian pula, terdapat 9 rute untuk pulang dari ruang kuliah ke asrama.

Ada berapa perjalanan pergi-pulang yang mungkin? Sepupu Anda mengatakan 18 karena setelah pergi dari asrama ke ruang kuliah, ia harus menyambungkan sebuah rute kembali ke asrama. Apakah ia benar? Mengapa atau mengapa tidak?

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang ingin Anda ketahui lebih lanjut.

3.2.6 Soal Latihan

1. Lemari pakaian Anda berisi 6 kemeja, 3 celana panjang, dan 15 dasi kupu-kupu. Ada berapa setelan pakaian berbeda yang dapat Anda buat?

2. Untuk wawancara masuk perguruan tinggi, Anda harus mengenakan dasi. Anda memiliki 8 dasi panjang biasa dan 3 dasi kupu-kupu yang menarik.

a. Berapa banyak pilihan dasi yang Anda miliki?

b. Ternyata wawancara tersebut diadakan oleh sekolah tinggi badut, sehingga sebaiknya Anda mengenakan satu dasi panjang dan satu dasi kupu-kupu sekaligus. Berapa banyak pilihan yang Anda miliki sekarang?

c. Untuk pakaian lainnya, Anda memiliki 2 kemeja, 7 rok, 3 celana panjang, dan 8 gaun. Anda ingin memilih sebuah kemeja untuk dipadukan dengan rok atau celana panjang, atau cukup mengenakan sebuah gaun. Berapa banyak pilihan pakaian yang tersedia, tanpa menghitung dasi?

3. Biasanya kita menulis bilangan dalam bentuk desimal (atau basis 10), sehingga bilangan dibentuk menggunakan 10 "digit" berbeda, yaitu $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Namun, kadang-kadang berguna untuk menulis bilangan dalam bentuk heksadesimal atau basis 16. Dalam sistem ini terdapat 16 digit berbeda yang dapat digunakan: $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Sebagai contoh, salah satu bilangan heksadesimal tiga digit adalah 2B8.

a. Ada berapa bilangan heksadesimal 3 digit yang digit pertamanya E atau F?

b. Ada berapa bilangan heksadesimal 6 digit yang diawali huruf (A–F) dan diakhiri angka (0–9)?

c. Ada berapa bilangan heksadesimal 4 digit yang diawali huruf (A–F), diakhiri angka (0–9), atau memenuhi keduanya?

4. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a. Berapa banyak himpunan bagian yang dimiliki S?

b. Berapa banyak himpunan bagian yang memuat $\{2, 3, 5\}$ sebagai himpunan bagian?

c. Berapa banyak himpunan bagian yang memuat sedikitnya satu bilangan ganjil?

d. Berapa banyak himpunan bagian yang memuat tepat satu bilangan genap?

5. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a. Ada berapa subhimpunan dengan kardinalitas 4?

b. Ada berapa subhimpunan dengan kardinalitas 4 yang memuat $\{2, 3, 5\}$ sebagai subhimpunan?

c. Ada berapa subhimpunan dengan kardinalitas 4 yang memuat setidaknya satu bilangan ganjil?

d. Ada berapa subhimpunan dengan kardinalitas 4 yang memuat tepat satu bilangan genap?

6. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Ada berapa subhimpunan dari A?

(b) Ada berapa subhimpunan dari A yang memuat tepat 5 elemen?

(c) Ada berapa subhimpunan dari A yang hanya memuat bilangan genap?

(d) Ada berapa subhimpunan dari A yang memiliki banyak elemen genap?

7. Anda membuka celengan dan menemukan banyak koin Amerika bernilai satu sen dan lima sen. Anda mulai menyusunnya dalam barisan yang masing-masing terdiri atas 4 koin.

a. Anda membuat barisan yang memuat sama banyak koin satu sen dan koin lima sen. Anda ingin menyusun sekaligus semua barisan berbeda yang mungkin. Berapa banyak koin yang diperlukan?

b. Berapa banyak koin yang diperlukan untuk menyusun sekaligus semua barisan berbeda yang mungkin dari 4 koin, tanpa mensyaratkan jumlah kedua jenis koin sama?

8. Berapa banyak string 11 bit yang memuat sedikitnya 4 angka 1?

9. Berapa banyak himpunan bagian dari $\{0, 1, \ldots, 9\}$ yang memiliki kardinalitas sedikitnya 7?

10. Berapa banyak lintasan kisi terpendek yang berawal di $(5, 5)$ dan

a. berakhir di $(12, 12)$?

b. berakhir di $(12, 12)$ dan melalui $(8, 9)$?

c. berakhir di $(12, 12)$ tanpa melalui $(8, 9)$?

3.2.7 Latihan Tambahan

1. Koleksi Blu-ray Anda terdiri atas 9 film komedi dan 7 film horor. Berikan contoh pertanyaan yang jawabannya adalah:

(a) 16.

(b) 63.

2. Bilangan 735000 dapat difaktorkan sebagai $2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$. Ada berapa pembagi bilangan tersebut? Jelaskan jawaban Anda menggunakan prinsip perkalian.

3.3 Hasil yang Tidak Saling Lepas

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menggunakan diagram Venn untuk menghitung banyaknya hasil dalam gabungan himpunan-himpunan yang tidak saling lepas.
2. Menerapkan prinsip inklusi–eksklusi untuk dua dan tiga himpunan.
3. Menjelaskan mengapa prinsip inklusi–eksklusi berlaku.

3.3.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Sebuah kampanye pemasaran dari mulut ke mulut yang baru-baru ini dilakukan oleh *The Pie Hole* menyurvei para pelanggan mengenai pai yang mereka sukai. Mereka ditanya apakah menyukai pai (A) apel, (B) blueberry, atau (C) ceri (responden menjawab ya atau tidak untuk setiap jenis pai, dan boleh menjawab ya untuk lebih dari satu jenis). Tabel berikut menunjukkan hasil survei tersebut.

Pai yang disukai:	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Banyak orang:	20	13	26	9	15	7	5

Berapa banyak responden yang menyukai sedikitnya satu jenis pai? Jelaskan juga mengapa jawabannya bukan 95.

Dalam Subbab 3.2 kita telah mempelajari prinsip penjumlahan sebagai cara menggabungkan dua (atau lebih) himpunan hasil yang *saling lepas*. Apa yang terjadi jika hasil-hasilnya tidak saling lepas?

Kita perlu melakukan sesuatu yang berbeda. Misalnya, ketika menghitung banyaknya kartu permainan yang merupakan kartu bergambar atau kartu merah, kita tidak dapat menerapkan prinsip penjumlahan lalu menyatakan bahwa terdapat $12 + 26 = 38$ kartu. Masalahnya adalah tepat enam kartu sekaligus merupakan kartu bergambar dan kartu merah. Ada beberapa cara untuk menangani hal ini yang akan kita pelajari dalam bagian ini.

Kegiatan Pratinjau

1. Perhatikan delapan string bit berpanjang 3. Mari kita tentukan banyaknya string yang diawali dengan 1 atau berbobot 2 (yakni, memuat tepat dua angka 1).

(a) Daftarkan semua string bit berpanjang 3 yang diawali dengan 1.

(b) Daftarkan semua string bit berpanjang 3 yang berbobot 2.

(c) Sekarang daftarkan semua string bit berpanjang 3 yang diawali dengan 1 atau berbobot 2. Namun, bekerjalah dengan hemat: jangan menyusunnya dari awal. Gunakan daftar Anda dari kedua tugas di atas.

(d) Berapa banyak string dalam daftar-daftar tersebut?

- String yang diawali dengan 1: _____
- String berbobot 2: _____
- String yang diawali dengan 1 atau berbobot 2: _____
- String yang diawali dengan 1 *dan* berbobot 2: _____

2. Bagaimana Anda menggabungkan kedua daftar di atas? Jelaskan cara Anda melakukannya. Kemudian pikirkan metode lain yang dapat digunakan, dan jelaskan bagaimana metode itu berbeda.

3. Xiang dan Omari sedang membahas matematikawan favorit mereka sepanjang sejarah. Xiang memiliki daftar 7 matematikawan favorit, sedangkan Omari memiliki daftar 5 matematikawan. Mereka mendapati bahwa 3 matematikawan terdapat dalam kedua daftar. Berapa banyak matematikawan dalam daftar gabungan mereka?

3.3.2 Menghitung dengan Diagram Venn

Untuk memahami cara menangani penggabungan himpunan hasil yang tidak saling lepas, akan berguna jika kita memakai beberapa notasi dari teori himpunan, yang akan kita tinjau secara singkat di sini.

Misalkan A adalah himpunan hasil untuk kejadian pertama dan B adalah himpunan hasil untuk kejadian kedua. Ketika kita menanyakan banyaknya cara salah satu kejadian dapat terjadi, himpunan hasil yang baru terdiri atas semua hasil yang berada dalam A, atau B, atau keduanya. Himpunan ini tidak lain adalah **gabungan** dari himpunan A dan B, yang ditulis $A \cup B$.

Prinsip penjumlahan hanya berlaku ketika tidak ada hasil yang termasuk dalam kedua kejadian. Elemen-elemen yang terdapat dalam himpunan A maupun B merupakan elemen-elemen dalam **irisan** keduanya, yang ditulis $A \cap B$. Irisan dua himpunan itu sendiri merupakan suatu himpunan. Jika himpunan A dan B **saling lepas**, maka *tidak ada* elemen dalam irisannya, sehingga irisan tersebut merupakan **himpunan kosong**, yang ditulis $\emptyset$.

Kita menghitung *banyaknya* hasil, sehingga yang benar-benar kita perhatikan adalah **ukuran** (atau **kardinalitas**) himpunan-himpunan tersebut. Ukuran suatu himpunan X kita tulis sebagai $|X|$.

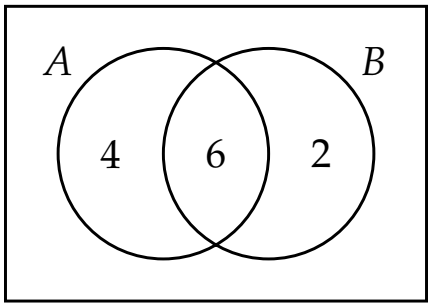
Dengan notasi ini, kita dapat menyatakan kembali prinsip penjumlahan sebagai berikut.

Prinsip 3.3.1 Prinsip Penjumlahan (dengan himpunan).

Diberikan dua himpunan A dan B, jika $A \cap B = \emptyset$, maka

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Sekarang perhatikan apa yang terjadi pada prinsip penjumlahan ketika himpunan-himpunannya TIDAK saling lepas. Misalkan kita ingin menentukan $|A \cup B|$ dan mengetahui bahwa $|A| = 10$ serta $|B| = 8$. Jika kita mengetahui bahwa kedua himpunan itu saling lepas, maka $|A \cup B|$ akan bernilai 18. Namun, jika kedua himpunan itu tidak diketahui saling lepas, kita memerlukan informasi tambahan. Kita harus mengetahui berapa banyak dari 8 elemen dalam B yang juga merupakan elemen A. Misalkan kita juga mengetahui bahwa $|A \cap B| = 6$. Sekarang kita dapat mengatakan secara tepat berapa banyak elemen yang berada dalam A, dan, di antara elemen-elemen tersebut, berapa banyak yang berada dalam B dan berapa banyak yang tidak (6 dari 10 elemen berada dalam B, sehingga 4 berada dalam A tetapi tidak dalam B). Kita dapat mengisi diagram Venn sebagai berikut:



Ini menyatakan bahwa terdapat 6 elemen dalam $A \cap B$, 4 elemen dalam A tetapi tidak dalam B (yang dapat kita tulis sebagai $|A \setminus B| = 4$), dan 2 elemen dalam B tetapi tidak dalam A (ditulis $|B \setminus A| = 2$). Sekarang *ketiga* himpunan ini memang *saling lepas*, sehingga kita dapat menggunakan prinsip penjumlahan untuk menentukan banyaknya elemen dalam $A \cup B$. Banyaknya adalah $6 + 4 + 2 = 12$.

Contoh 3.3.2

Berapa banyak string bit berpanjang 7 dan berbobot 4 yang diawali dengan 11 atau diakhiri dengan 00, atau keduanya?

Penyelesaian. Misalkan A adalah himpunan string bit berpanjang 7 dan berbobot 4 yang diawali dengan 11. Kita memiliki $|A| = \binom{5}{2} = 10$. Misalkan

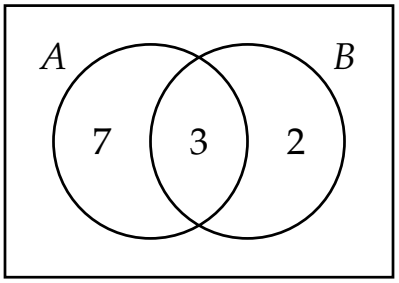
B adalah himpunan string bit berpanjang 7 dan berbobot 4 yang diakhiri dengan 00. Kita memiliki $|B| = \binom{5}{4} = 5$.

Namun, tidak benar bahwa $|A \cup B| = 10 + 5 = 15$, sebab string seperti 1101100 diawali dengan 11 sekaligus diakhiri dengan 00. String itu termasuk dalam 10 string yang diawali dengan 11 dan lima string yang diakhiri dengan 00. Kita harus menentukan banyaknya string yang termasuk dalam A sekaligus B. Kita memiliki

$$|A \cap B| = \binom{3}{2} = 3$$

(dan memang terdapat tiga string dalam irisan: 1111000, 1110100, dan 1101100).

Sekarang kita dapat mengisi diagram Venn:



Lingkaran untuk A memuat total 10 elemen, yaitu 3 elemen yang juga termasuk dalam B dan 7 elemen lain yang hanya termasuk dalam A. Lingkaran untuk B memuat total 5 elemen, yaitu 3 elemen yang juga termasuk dalam A dan 2 elemen lain yang hanya termasuk dalam B. Banyaknya elemen dalam $A \cup B$ adalah jumlah elemen di setiap daerah

$$|A \cup B| = 7 + 3 + 2 = 12.$$

Kita dapat melakukan hal serupa untuk tiga himpunan.

Contoh 3.3.3

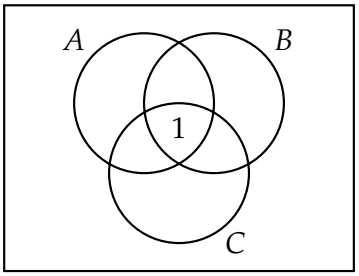
Sebanyak 41 mahasiswa mengikuti ujian dalam tiga mata kuliah, yaitu Aljabar, Biologi, dan Kimia. Tabel berikut menunjukkan banyaknya mahasiswa yang tidak lulus dalam setiap mata kuliah dan dalam berbagai kombinasinya:

Mata kuliah:	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Tidak lulus:	12	5	8	2	6	3	1

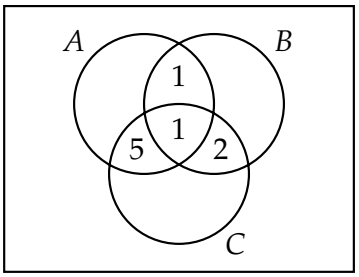
Berapa banyak mahasiswa yang tidak lulus sedikitnya satu mata kuliah?

Penyelesaian. Jawabannya bukan 37, meskipun jumlah bilangan-bilangan di atas adalah 37. Sebagai contoh, meskipun 12 mahasiswa tidak lulus Aljabar,

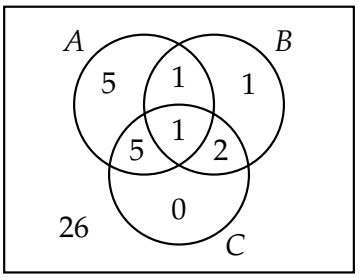
2 di antaranya juga tidak lulus Biologi, 6 juga tidak lulus Kimia, dan 1 di antaranya tidak lulus ketiga mata kuliah tersebut. Bahkan, 1 mahasiswa yang tidak lulus ketiga mata kuliah itu dihitung sebanyak 7 kali dalam total 37. Untuk memperjelas, mari kita anggap mahasiswa yang tidak lulus Aljabar sebagai elemen himpunan A, dan demikian pula untuk himpunan B dan C. Satu mahasiswa yang tidak lulus ketiga mata kuliah merupakan satu-satunya elemen himpunan $A \cap B \cap C$. Jadi, dalam diagram Venn:



Sekarang mari kita isi irisan-irisan lainnya. Kita mengetahui bahwa $A \cap B$ memuat 2 elemen, tetapi 1 elemen sudah dihitung. Jadi, kita harus menempatkan angka 1 di daerah tempat A dan B beririsan (tetapi tidak dengan C). Dengan cara serupa, kita menghitung kardinalitas $(A \cap C) \setminus B$, dan $(B \cap C) \setminus A$:



Selanjutnya, kita menentukan bilangan-bilangan yang harus ditempatkan di daerah-daerah yang tersisa, termasuk di luar ketiga lingkaran. Bilangan terakhir ini adalah banyaknya mahasiswa yang lulus semua mata kuliah:



Kita memperoleh angka 5 untuk daerah "hanya A" karena seluruh lingkaran untuk A harus memuat total 12, sedangkan 7 sudah diperhi-

tungkan. Dengan cara serupa, kita menghitung bahwa daerah "hanya B" memuat hanya 1 mahasiswa dan daerah "hanya C" tidak memuat mahasiswa.

Jadi, banyaknya mahasiswa yang tidak lulus sedikitnya satu mata kuliah adalah 15 (jumlah bilangan dalam ketujuh daerah saling lepas yang berada di dalam gabungan ketiga himpunan). Banyaknya mahasiswa yang lulus ketiga mata kuliah adalah 26: jumlah seluruh mahasiswa, 41, dikurangi 15 mahasiswa yang tidak lulus sedikitnya satu mata kuliah.

Perhatikan bahwa kita juga dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan lain. Misalnya, berapa banyak mahasiswa yang hanya tidak lulus Kimia? Tidak ada. Berapa banyak yang lulus Aljabar tetapi tidak lulus Biologi maupun Kimia? Ini bersesuaian dengan daerah di dalam B dan C tetapi di luar A, yang memuat 2 mahasiswa.

Berikut suatu fakta matematika yang menarik.

$$12 + 5 + 8 - 2 - 6 - 3 + 1 = 15.$$

Apakah sekadar kebetulan bahwa cara menggabungkan banyaknya mahasiswa yang tidak lulus setiap mata kuliah dalam contoh di atas menghasilkan banyaknya mahasiswa yang tidak lulus sedikitnya satu mata kuliah? Hal ini menunjukkan bahwa mungkin ada cara yang lebih sederhana untuk menentukan ukuran gabungan himpunan-himpunan yang tidak saling lepas.

3.3.3 Prinsip Inklusi–Eksklusi

Akan berguna jika kita dapat menuliskan sebuah rumus aljabar yang merangkum apa yang telah kita lakukan dalam contoh-contoh sebelumnya. Lebih baik lagi jika rumus aljabar ini merupakan perumuman dari kasus ketika himpunan-himpunannya memang *saling lepas*.

Perhatikan kembali contoh dengan $|A| = 10$, $|B| = 8$, dan $|A \cap B| = 6$. Kita menyatakan bahwa $|A \cup B| = 12$, yang diperoleh dengan menjumlahkan $4 + 6 + 2$.

Jika A dan B saling lepas, maka $|A \cup B|$ akan bernilai $|A| + |B| = 10 + 8 = 18$. Kita melihat bahwa hasil itu lebih besar tepat sebesar 6, yang kebetulan sama dengan $|A \cap B|$. Jadi, kita dapat menduga,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|\,.$$

Ini masuk akal! Ketika kita menambahkan banyaknya elemen dalam A dengan banyaknya elemen dalam B, kita telah menghitung enam elemen yang termasuk dalam kedua himpunan tepat dua kali. Jadi, jika kita mengurangkannya sekali, setiap elemen tersebut terhitung tepat satu kali.

Dengan kata lain, kita memperoleh:

Teorema 3.3.4 Kardinalitas Gabungan (2 Himpunan).

Untuk sembarang himpunan hingga A dan B,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Contoh 3.3.5

Berapa banyak string bit berpanjang 7 dan berbobot 4 yang diawali dengan 11 atau diakhiri dengan 00, atau keduanya? Gunakan Teorema 3.3.4 dan bandingkan dengan Contoh 3.3.2.

Penyelesaian. Kita memiliki $|A| = \binom{5}{2} = 10$, $|B| = \binom{5}{4} = 5$, dan $|A \cap B| = \binom{3}{2} = 3$. Oleh karena itu:

$$|A \cup B| = 10 + 5 - 3 = 12.$$

Ini masuk akal karena tiga string bit yang diawali dengan 11 dan diakhiri dengan 00 terhitung dalam 10 string yang diawali dengan 11 dan sekali lagi dalam 5 string yang diakhiri dengan 00. Jadi, sebelum mengurangkannya, kita telah menghitung string-string tersebut satu kali terlalu banyak.

Untuk tiga himpunan, kita juga dapat menghitung elemen-elemen dalam gabungannya dengan secara cermat mengurangi elemen-elemen yang telah kita hitung beberapa kali. Karena ada lebih banyak cara himpunan-himpunan tersebut dapat bertumpang tindih, rumusnya lebih rumit.

Teorema 3.3.6 Kardinalitas Gabungan (3 Himpunan).

Untuk sembarang himpunan hingga A, B, dan C,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Untuk menentukan berapa banyak elemen yang berada dalam sedikitnya salah satu dari A, B, atau C, kita menjumlahkan semua elemen dalam masing-masing himpunan tersebut. Namun, ketika melakukan itu, setiap elemen yang berada dalam A dan B dihitung dua kali. Demikian pula, setiap elemen yang berada dalam A dan C dihitung dua kali, begitu juga elemen dalam B dan C, sehingga kita mengurangi setiap kelompok tersebut satu kali dari jumlah kita. Namun, bagaimana dengan elemen-elemen yang berada dalam $A \cap B \cap C$ (dalam ketiga himpunan)? Kita telah menambahkannya tiga kali, tetapi juga mengurangkannya tiga kali. Elemen-elemen tersebut belum terhitung. Jadi, pada akhir perhitungan kita menambahkannya kembali.

Contoh 3.3.7

Berapa banyak bilangan dalam $\{1, 2, \ldots, 50\}$ yang merupakan kelipatan 2, 3, atau 5?

Penyelesaian. Di antara bilangan dalam $\{1, 2, \ldots, 50\}$, misalkan A adalah himpunan kelipatan 2, B adalah himpunan kelipatan 3, dan C adalah himpunan kelipatan 5. Kita memiliki $|A| = 25$, $|B| = 16$, dan $|C| = 10$. (Bilangan-bilangan ini dapat diperoleh melalui pembagian; misalnya, karena sepertiga bilangan merupakan kelipatan tiga, kita dapat menghitung $50/3 = 16.66$, sehingga terdapat 16 kelipatan 3 dalam himpunan tersebut.) Beberapa bilangan dalam himpunan tersebut merupakan kelipatan 2 sekaligus 3, seperti $6, 12, 18, \ldots$, yakni semua kelipatan 6. Terdapat $|A \cap B| = 8$ bilangan semacam itu. Dengan cara serupa, terdapat $|A \cap C| = 5$ kelipatan 2 sekaligus 5 (kelipatan 10), dan $|B \cap C| = 3$ kelipatan 3 sekaligus 5 (kelipatan 15). Terdapat $|A \cap B \cap C| = 1$ kelipatan ketiganya (hanya bilangan 30).

Dengan menggunakan Teorema 3.3.6, kita memperoleh:

$$|A \cup B \cup C| = 25 + 16 + 10 - 8 - 5 - 3 + 1 = 36.$$

Mari kita gunakan contoh ini untuk memahami teorema tersebut dengan lebih baik. Perhatikan bilangan 21. Dalam himpunan mana bilangan ini dihitung? Bilangan tersebut berada dalam B, tetapi tidak dalam A ataupun C, sehingga dihitung di antara 16 kelipatan 3 dan tidak dihitung dalam himpunan lain. Dengan demikian, bilangan itu terhitung tepat sekali dalam hitungan lengkap kita. Hal yang sama berlaku bagi semua bilangan lain yang merupakan kelipatan hanya salah satu dari 2, 3, atau 5.

Bilangan 18 berada dalam himpunan A dan B, sehingga juga berada dalam $A \cap B$. Bilangan ini dihitung di antara 25 kelipatan 2, 16 kelipatan 3, dan 8 kelipatan 6. Jadi, bilangan ini ditambahkan dua kali ke dalam total kita dan dikurangkan sekali, yang berarti bilangan tersebut terhitung tepat satu kali. Hal yang sama berlaku bagi semua bilangan yang termasuk dalam tepat dua dari masing-masing himpunan.

Bagaimana dengan 30? Bilangan ini termasuk dalam semua himpunan. Oleh karena itu, bilangan ini ditambahkan ke dalam total kita tiga kali, ketika kita menambahkan kelipatan 2, 3, dan 5. Namun, bilangan ini juga dikurangkan tiga kali, satu kali untuk setiap pasangan dari ketiga himpunan. Jadi, bilangan ini sama sekali tidak terhitung dalam total kita... sampai kita menambahkannya kembali pada langkah terakhir, sehingga akhirnya terhitung tepat sekali.

Proses menambahkan, kemudian mengurangkan, lalu menambahkan kembali, dan seterusnya disebut **Prinsip Inklusi–Eksklusi**, atau cukup disebut **PIE**. Prinsip ini dapat diterapkan pada berapa pun banyaknya himpunan, tetapi rumusnya menjadi semakin rumit seiring bertambahnya himpunan. Sebagai contoh, berikut

bentuk PIE untuk empat himpunan.

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| .\end{aligned}$$

Fiuh! Untuk lima himpunan, rumusnya adalah... hanya bercanda. Meskipun tidak menuliskannya, semoga kita semua dapat membayangkan apa yang *harus* ditulis. Dalam praktiknya, PIE untuk lebih dari tiga himpunan hanya digunakan ketika kita dapat menyederhanakan perhitungan dengan mengenali bahwa, misalnya, semua irisan dua himpunan akan berukuran sama. Beberapa contoh mengenai hal ini dipelajari dalam Subbab 3.8.

3.3.4 Tumpang Tindih dan Prinsip Perkalian

Semua yang telah kita bahas sejauh ini dalam bagian ini berkaitan dengan cara prinsip penjumlahan diterapkan ketika himpunan-himpunan hasil tidak saling lepas. Apakah kita perlu mencemaskan tumpang tindih dengan cara serupa ketika menerapkan prinsip perkalian?

Tidak juga.

Salah satu kegunaan prinsip perkalian adalah menghitung peluang, dan dalam konteks tersebut kita memang membedakan kejadian yang **saling bebas** dan yang **saling bergantung**. Kita akan mempelajari hal ini lebih lanjut dalam Subbab 3.7. Pada dasarnya, untuk menentukan peluang terjadinya dua kejadian, kita dapat mengalikan peluang masing-masing jika dan hanya jika kedua kejadian tersebut *saling bebas*: hasil salah satu kejadian tidak memengaruhi hasil kejadian lainnya.

Meskipun menentukan peluang berkaitan erat dengan menghitung hasil, prinsip perkalian itu sendiri tidak mensyaratkan bahwa himpunan-himpunan hasil harus saling lepas atau membedakan kejadian yang saling bergantung dan yang saling bebas. Yang *penting* adalah banyaknya hasil untuk kejadian kedua tidak berubah berdasarkan hasil mana yang terjadi pada kejadian pertama.

Salah satu pembedaan yang *memang* sering kita buat ketika menerapkan prinsip perkalian adalah apakah hasil suatu kejadian dapat "diulang." Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.3.8

Berapa banyak kata 3 huruf (barisan tiga huruf) yang ada jika,

1. pengulangan diperbolehkan?
2. pengulangan tidak diperbolehkan?

Penyelesaian. Dengan menerapkan prinsip perkalian secara cermat, kita menggabungkan tiga kejadian: A adalah kejadian memilih huruf pertama, B adalah kejadian memilih huruf kedua, dan C adalah kejadian memilih huruf

ketiga. Jika kita ingin menghitung banyaknya kata ketika huruf dalam kata boleh diulang, maka setiap kejadian memuat 26 hasil. Jadi, banyaknya kata 3 huruf adalah $26^3 = 17,576$ ketika pengulangan diperbolehkan.

Ketika pengulangan tidak diperbolehkan, banyaknya hasil untuk kejadian A tetap 26, tetapi banyaknya hasil untuk B hanya 25. Apa pun hasil kejadian A, huruf tersebut tidak dapat dipilih untuk posisi kedua dalam kata. Demikian pula, apa pun hasil kejadian A dan B, banyaknya hasil untuk kejadian C selalu 24, yaitu sembarang huruf yang tidak dipilih dalam dua kejadian pertama. Jadi, banyaknya kata 3 huruf tanpa huruf berulang adalah $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15,600$.

Agak aneh bahwa himpunan hasil yang sebenarnya untuk kejadian B berbeda bagi setiap kemungkinan hasil kejadian A. Namun, hal ini tidak menjadi masalah selama *ukuran* himpunan hasilnya tidak berubah.

Selanjutnya, kita akan mempelajari masalah seperti contoh sebelumnya secara jauh lebih mendalam dalam Subbab 3.4. Namun sebelumnya, berikut contoh terakhir ketika prinsip perkalian TIDAK dapat digunakan dengan mudah.

Contoh 3.3.9

Jelaskan mengapa prinsip perkalian TIDAK berlaku untuk pertanyaan pencacahan berikut: Berapa banyak kata 3 huruf yang huruf-hurufnya tersusun menurut urutan alfabet?

Penyelesaian. Hal pertama yang mungkin kita coba adalah menjadikan kejadian A sebagai pemilihan huruf pertama, B sebagai pemilihan huruf kedua, dan C sebagai pemilihan huruf ketiga. Terdapat 26 hasil untuk kejadian A. Berapa banyak hasil untuk kejadian B? Jika kita memilih w sebagai huruf pertama, kita dapat memilih satu huruf dari himpunan $\{w, x, y, z\}$ sebagai huruf kedua, sehingga tampaknya terdapat 4 hasil untuk kejadian B. Namun, jika kita memilih a sebagai huruf pertama, sembarang huruf dapat digunakan sebagai huruf kedua, sehingga kejadian B memiliki 26 hasil. Celaka!

Masalahnya adalah banyaknya hasil untuk huruf kedua (dan ketiga) dalam kata berubah bergantung pada hasil kejadian sebelumnya. Kejadian-kejadian tersebut tidak saling bebas, dan lebih dari itu, *banyaknya* hasil pada setiap tahap juga bergantung pada hasil sebelumnya, sehingga prinsip perkalian tidak berlaku.

Kita akan melihat cara menjawab masalah pencacahan di atas ketika huruf boleh diulang dalam Subbab 3.5. Jika kita membatasi pertanyaannya lebih lanjut dan mensyaratkan bahwa huruf-hurufnya berbeda (serta tersusun menurut urutan alfabet), kita sudah mengetahui cara menjawabnya. Karena untuk sembarang *himpunan* tiga huruf terdapat tepat satu kata 3 huruf yang menyusun huruf-huruf tersebut menurut urutan alfabet, kita cukup menghitung banyaknya himpunan tiga huruf. Banyaknya adalah $\binom{26}{3}$. Lalu kita tinggal melihat segitiga Pascal untuk mendapatkan nilainya... aduh. Segitiga kita tidak sampai sejauh itu. Sepertinya

kita perlu memikirkan cara menghitung nilainya tanpa segitiga tersebut. Mari lanjutkan!

3.3.5 Pertanyaan Bacaan

1. Manakah di antara pilihan berikut yang paling tepat menggambarkan kegunaan Prinsip Inklusi–Eksklusi?

A. Untuk menghitung ukuran gabungan dua atau lebih himpunan yang tidak harus saling lepas.

B. Untuk menghitung ukuran gabungan dua atau lebih himpunan, asalkan semuanya saling lepas.

C. Untuk menghitung ukuran irisan himpunan hasil dari dua atau lebih kejadian yang saling bebas.

D. Untuk menentukan ukuran irisan himpunan hasil dari kejadian-kejadian yang saling bergantung.

2. Mengapa Prinsip Inklusi–Eksklusi *menambahkan* ukuran irisan tiga himpunan, bukan mengurangkannya? Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang bagian ini yang membuat Anda ingin tahu lebih lanjut.

3.3.6 Soal Latihan

1. Misalkan Anda memiliki himpunan A dan B dengan $|A| = 9$ dan $|B| = 19$.

(a) Berapakah nilai terbesar yang mungkin untuk $|A \cap B|$?

(b) Berapakah nilai terkecil yang mungkin untuk $|A \cap B|$?

(c) Apa saja nilai yang mungkin untuk $|A \cup B|$?

2. Jika $|A| = 5$ dan $|B| = 2$, berapakah $|A \cup B| + |A \cap B|$?

3. Sekelompok mahasiswa ditanya tentang kebiasaan mereka menonton televisi. Di antara mahasiswa yang disurvei, 30 mahasiswa menonton *The Walking Dead*, 24 menonton *The Blacklist*, dan 28 menonton *Game of Thrones*. Selain itu, 18 menonton *The Walking Dead* dan *The Blacklist*, 10 menonton *The Walking Dead* dan *Game of Thrones*, serta 12 menonton *The Blacklist* dan *Game of Thrones*. Ada 7 mahasiswa yang menonton ketiga acara tersebut. Berapa banyak mahasiswa yang disurvei menonton sedikitnya satu dari ketiga acara itu?

4. Dalam sebuah survei baru-baru ini, 100 mahasiswa menyatakan apakah mereka menyukai kentang tumbuk, kentang goreng, atau kentang panggang dua kali. Sebanyak 54 mahasiswa menyukai kentang tumbuk, 39 menyukai kentang

goreng, dan 51 menyukai kentang panggang dua kali. Selain itu, 18 mahasiswa menyukai kentang tumbuk dan kentang goreng, 28 menyukai kentang goreng dan kentang panggang dua kali, 29 menyukai kentang tumbuk dan kentang panggang dua kali, serta 11 menyukai ketiga olahan tersebut. Berapa banyak mahasiswa yang *sama sekali tidak menyukai* kentang? Jelaskan mengapa jawaban Anda benar.

5. Berapa banyak string bit sepanjang 13 yang memenuhi syarat berikut?

a. Diawali substring 011.

b. Berbobot 8 (yaitu, memuat tepat 8 angka 1) dan diawali substring 011.

c. Diawali 011 atau diakhiri 01 (atau keduanya).

d. Berbobot 8 dan diawali 011 atau diakhiri 01 (atau keduanya).

6. Ada berapa banyak $n \in \{1, 2, \ldots, 715\}$ yang merupakan kelipatan dari sedikitnya salah satu di antara 4, 3, dan 5?

7. Berapa banyak bilangan bulat positif yang kurang dari 1400 dan merupakan kelipatan dari 4, 7, atau 9? Gunakan prinsip inklusi–eksklusi.

8. Kita ingin membentuk "kata" sepanjang 13 huruf dengan hanya menggunakan $n = 12$ huruf pertama dalam alfabet. Sebagai contoh, jika $n = 5$, kita dapat menggunakan 5 huruf pertama, $\{a, b, c, d, e\}$. (Ingat, kata di sini hanyalah untaian huruf dan tidak harus berupa kata yang benar-benar ada dalam bahasa Inggris.)

a. Ada berapa kata seluruhnya?

b. Ada berapa kata yang tidak memuat huruf berulang?

c. Ada berapa kata yang diawali subkata "ade"?

d. Ada berapa kata yang diawali "ade", diakhiri "be", atau memenuhi keduanya?

e. Di antara kata-kata tanpa huruf berulang, ada berapa yang juga tidak memuat subkata "bed"?

9. Gridtown, AS, selain memiliki toko donat yang sangat baik, terkenal karena kisi jalan dan jalan rayanya yang tertata tepat. Jalan membentang dari timur ke barat, sedangkan jalan raya dari utara ke selatan, di seluruh kota tanpa berbelok dan tanpa terputus oleh taman, sekolah, atau semacamnya.

Misalkan Anda tinggal di persimpangan Jalan ke-4 dan Jalan Raya ke-4, serta bekerja di persimpangan Jalan ke-19 dan Jalan Raya ke-19. Jadi, agar sampai di tempat kerja secepat mungkin, Anda harus menempuh 30 blok.

a. Ada berapa rute berbeda yang dapat Anda tempuh ke tempat kerja jika ingin sampai secepat mungkin?

a. Sekarang misalkan Anda ingin singgah membeli donat dalam perjalanan

ke tempat kerja, di toko donat favorit Anda di persimpangan Jalan Raya ke-18 dan Jalan ke-16. Ada berapa rute ke tempat kerja yang melewati toko donat itu dan tetap merupakan rute terpendek?

a. Bencana melanda Gridtown: ada lubang di Jalan Raya ke-7, di antara Jalan ke-6 dan Jalan ke-7. Ada berapa rute ke tempat kerja yang dapat Anda tempuh sambil menghindari ruas jalan yang buruk (dan berbahaya) itu?

a. Lubang itu telah diperbaiki (syukurlah!) dan sebuah toko donat baru dibuka di persimpangan Jalan Raya ke-7 dan Jalan ke-6. Ada berapa rute ke tempat kerja yang melewati salah satu atau kedua toko donat? Petunjuk: gunakan prinsip inklusi-eksklusi (PIE).

3.3.7 Latihan Tambahan

1. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan.

(a) Tentukan $|(A \cup C) \setminus B|$ jika diketahui $|A| = 50$, $|B| = 45$, $|C| = 40$, $|A \cap B| = 20$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 23$, dan $|A \cap B \cap C| = 12$.

(b) Nyatakan suatu himpunan menggunakan A, B, dan C yang berkardinalitas 26.

2. Ada berapa banyak bilangan tiga digit (100 hingga 999) yang *jumlah digit-digitnya* genap? (Sebagai contoh, 343 memiliki jumlah digit yang genap: $3 + 4 + 3 = 10$, yang merupakan bilangan genap.) Tentukan jawabannya dan jelaskan mengapa jawaban itu benar dengan sedikitnya dua cara yang *berbeda*.

3.4 Kombinasi dan Permutasi

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menentukan dengan tepat apakah harus menggunakan kombinasi atau permutasi ketika menyelesaikan masalah pencacahan.
2. Menerapkan kombinasi atau permutasi yang tepat untuk menyelesaikan masalah pencacahan.
3. Menjelaskan hubungan antara kombinasi dan permutasi serta alasan rumus-rumusnya benar.

3.4.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Anda memutuskan untuk menghias tongkat sihir dengan pita perekat berbagai warna. Tersedia 10 warna berbeda, dan Anda akan menggunakan lima di antaranya untuk membuat lima garis warna yang berbeda. Berapa banyak desain tongkat berbeda yang mungkin?

Prinsip perkalian memberi kita cara untuk menghitung banyaknya hasil ketika setiap hasil dibentuk dengan menggabungkan bagian-bagian yang lebih kecil. Contoh umum adalah menghitung banyaknya "kata" tiga huruf; setiap hasil (kata) yang kita hitung tersusun dari gabungan tiga bagian yang lebih kecil (huruf). Karena terdapat 26 pilihan untuk setiap bagian yang lebih kecil, terdapat $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$ hasil yang mungkin.

Prinsip perkalian tidak mensyaratkan bahwa setiap bagian yang digabungkan harus dipilih dari himpunan berukuran sama. Kita akan menggunakan pengamatan ini untuk membuat cara baku menghitung hasil ketika bagian-bagiannya dipilih dari suatu himpunan tetap, tetapi tanpa memperbolehkan bagian mana pun digunakan lebih dari sekali. Sebagai contoh, kita dapat menanyakan berapa banyak kata 3 huruf yang memuat huruf-huruf berbeda.

Susunan-susunan ini disebut **permutasi**. Kita juga akan membahas teknik pencacahan lain yang menghitung **kombinasi**, yang berkaitan dengan permutasi tetapi menghitung sesuatu yang berbeda. Kita akan mempelajari hubungan antara kedua teknik pencacahan tersebut dan cara menggunakannya untuk menyelesaikan beragam masalah pencacahan.

Kegiatan Pratinjau

Anda memiliki sekumpulan keping poker dalam lima warna berbeda: merah (R), biru (B), hijau (G), ungu (P), dan kuning (Y).

1. Berapa banyak tumpukan dua keping yang mungkin jika keping paling bawah harus berwarna merah atau biru?

(a) Daftarkan semua tumpukan dua keping yang mungkin. Sebagai contoh, tumpukan dengan keping merah di bawah dan keping hijau di atas dapat ditulis sebagai "RG".

(b) Dengan menggunakan prinsip penjumlahan, kita melihat bahwa terdapat _____ tumpukan yang memiliki keping biru di bawah dan _____ tumpukan lain yang memiliki keping merah di bawah, sehingga seluruhnya terdapat _____ tumpukan yang mungkin.

(c) Jika kita menggunakan prinsip perkalian, terdapat _____ pilihan untuk keping paling bawah dan _____ pilihan untuk keping paling atas, sehingga terdapat _____ tumpukan yang mungkin.

2. Berapa banyak tumpukan tiga keping berbeda yang mungkin jika keping paling bawah harus berwarna merah atau biru dan keping paling atas harus berwarna hijau, ungu, atau kuning?

Petunjuk. Bagaimana pertanyaan ini berkaitan dengan pertanyaan sebelumnya? Adakah sesuatu yang dapat kita lakukan pada 10 tumpukan dua keping untuk mengubahnya menjadi tumpukan tiga keping?

3. Berapa banyak tumpukan tiga keping berbeda yang tidak mengulang warna apa pun?

(a) Pertama, berapa banyak tumpukan tiga keping tanpa warna berulang yang memiliki keping biru di bawah dan keping hijau di tengah?

Lalu, berapa banyak tumpukan tiga keping tanpa warna berulang yang memiliki keping biru di bawah dan keping kuning di tengah?

Bahkan, untuk sembarang tumpukan dengan keping biru di bawah dan suatu warna lain di tengah, terdapat _____ tumpukan yang mungkin.

(b) Jika kita mensyaratkan keping biru berada di bawah, berapa banyak pilihan warna untuk keping tengah?

Dengan menggabungkan hasil ini dengan jawaban pertanyaan sebelumnya, berapa banyak tumpukan tiga keping tanpa warna berulang yang memiliki keping biru di bawah?

(c) Tentu saja, kita tidak harus memulai dengan keping biru di bawah. Berapa banyak pilihan warna untuk keping paling bawah?

Jadi, berapa banyak tumpukan tiga keping tanpa warna berulang yang ada?

(d) Berapa banyak tumpukan empat keping tanpa warna berulang yang ada?

4. Misalkan Anda ingin mengambil tiga keping dengan warna berbeda dan memasukkannya ke dalam saku.

(a) Salah satu hasilnya adalah mengambil keping biru, hijau, dan ungu. Berapa banyak tumpukan tiga keping berwarna berbeda yang bersesuaian dengan satu isi saku ini?

Petunjuk. Dengan ketiga warna ini, berapa banyak pilihan untuk keping yang berada di bawah? Di tengah? Di atas?

(b) Berapa banyak tumpukan keping berbeda yang dapat terbentuk dengan mengambil keping merah, kuning, dan hijau?

(c) Jadi, dari _____ tumpukan tiga keping yang mungkin, kita dapat mengelompokkannya ke dalam kelompok berukuran _____, dengan setiap kelompok bersesuaian dengan isi saku yang sama. Berapa banyak isi saku berbeda yang ada?

(d) Berapa banyak isi saku berbeda yang ada jika Anda mengambil empat keping?

3.4.2 Mencacah Barisan

Suatu **permutasi** adalah salah satu susunan ulang yang mungkin dari sejumlah objek. Sebagai contoh, terdapat 6 permutasi huruf a, b, c:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Dalam konteks struktur diskret kita, setiap permutasi sebenarnya merupakan *barisan* atau *tupel* dengan panjang tetap.

Kita mengetahui bahwa semua permutasi telah didaftarkan di atas —terdapat 3 pilihan huruf yang ditempatkan pertama, lalu 2 pilihan untuk huruf berikutnya, sehingga tersisa hanya 1 pilihan untuk huruf terakhir. Prinsip perkalian menyatakan bahwa kita mengalikan $3 \cdot 2 \cdot 1$.

Contoh 3.4.1

Berapa banyak barisan (permutasi) yang dapat dibentuk dari huruf a, b, c, d, e, f?

Penyelesaian. Kita TIDAK ingin mencoba mendaftarkan semua barisan panjang 6 dari huruf-huruf tersebut. Namun, jika kita melakukannya, mula-mula kita perlu memilih huruf yang akan ditulis pertama. Terdapat 6 pilihan untuk huruf tersebut. Untuk setiap pilihan huruf pertama, terdapat 5 pilihan untuk huruf kedua (kita tidak dapat mengulang huruf pertama; kita sedang menyusun ulang huruf dan hanya memiliki satu dari setiap huruf), dan untuk setiap pilihan itu terdapat 4 pilihan untuk huruf ketiga, 3 pilihan untuk huruf

keempat, 2 pilihan untuk huruf kelima, dan akhirnya hanya 1 pilihan untuk huruf terakhir. Jadi, terdapat $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ permutasi dari 6 huruf tersebut.

Sebuah notasi berguna di sini: $n!$, dibaca "n faktorial", adalah hasil kali semua bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan n (demi kemudahan, kita juga mendefinisikan $0!$ sebagai 1). Jadi, banyaknya permutasi 6 huruf, seperti yang terlihat dalam contoh sebelumnya, adalah $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Hal ini dapat diperumum:

Teorema 3.4.2 Permutasi n Elemen.

Terdapat $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ *permutasi dari n elemen (berbeda).*

Contoh 3.4.3 Mencacah Fungsi Bijektif.

Berapa banyak fungsi $f : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 8\}$ yang *bijektif*?

Penyelesaian. Ingat kembali arti fungsi bijektif: Setiap elemen dalam kodomain harus menjadi citra dari tepat satu elemen domain. Dengan menggunakan notasi dua baris, kita dapat menuliskan salah satu bijeksi ini sebagai

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Yang sebenarnya kita lakukan hanyalah menyusun ulang elemen-elemen kodomain, sehingga kita membentuk suatu permutasi 8 elemen. Bahkan, "permutasi" merupakan istilah lain yang digunakan untuk menyebut fungsi bijektif dari suatu himpunan hingga ke dirinya sendiri.

Jika Anda menerima penalaran ini, maka Anda melihat bahwa jawabannya haruslah $8! = 8 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 1 = 40320$. Kita juga dapat melihatnya secara langsung: untuk setiap elemen domain, kita harus memilih elemen kodomain yang berbeda sebagai petanya. Terdapat 8 pilihan untuk memetakan 1, lalu 7 pilihan untuk memetakan 2, dan seterusnya. Kita mengalikannya dengan menggunakan prinsip perkalian.

Kadang-kadang kita tidak ingin mempermutasikan semua huruf/bilangan/elemen yang diberikan.

Contoh 3.4.4

Berapa banyak "kata" empat huruf yang dapat Anda bentuk dari huruf a sampai g, tanpa huruf berulang?

Penyelesaian. Masalah ini serupa dengan mempermutasikan empat huruf,

hanya saja sekarang kita memiliki lebih banyak pilihan untuk setiap huruf. Untuk huruf pertama, terdapat 7 pilihan. Untuk setiap pilihan itu, terdapat 6 pilihan untuk huruf kedua. Kemudian terdapat 5 pilihan untuk huruf ketiga dan 4 pilihan untuk huruf terakhir. Jumlah seluruh kata adalah $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Nilai ini bukan 7! karena kita tidak pernah mengalikan dengan 3, 2, atau 1. Meskipun demikian, kita dapat menuliskannya menggunakan 7! jika kita mencoret 3, 2, dan 1. Jadi, kita dapat menuliskan jawabannya sebagai

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

Secara umum, kita dapat menanyakan berapa banyak permutasi dari k objek yang dipilih dari kumpulan lebih besar berisi n objek. (Dalam contoh di atas, $k = 4$, dan $n = 7$.) Bilangan ini kita tulis $P(n, k)$ dan kadang-kadang kita sebut sebagai **permutasi-k dari n elemen**.

Dari contoh di atas, kita melihat bahwa untuk menghitung $P(n, k)$, kita harus menerapkan prinsip perkalian pada k bilangan, dimulai dari n lalu menghitung mundur. Sebagai contoh,

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

Perhatikan bahwa $P(10, 4)$ pada awalnya tampak seperti 10!, tetapi kita berhenti setelah 7. Secara formal, kita dapat menjelaskan "penghentian" ini dengan membagi bagian faktorial yang tidak kita inginkan:

$$P(10, 4) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{6!}.$$

Hati-hati: Faktorial dalam penyebut bukan 4!, melainkan $(10 - 4)!$.

Definisi 3.4.5 Permutasi-k dari n Elemen.

$P(n, k)$ adalah banyaknya **permutasi-k dari n elemen**, yaitu banyaknya cara untuk *menyusun* k objek yang dipilih dari n objek berbeda.

Teorema 3.4.6

Banyaknya permutasi-k dari n elemen adalah

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)).$$

Perhatikan bahwa ketika $n = k$, kita memperoleh $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$ (karena kita mendefinisikan 0! sebagai 1). Hal ini masuk akal —kita telah mengetahui bahwa $n!$ menyatakan banyaknya permutasi dari seluruh n objek.

Contoh 3.4.7 Mencacah Fungsi Injektif.

Berapa banyak fungsi $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ yang *injektif*?

Penyelesaian. Perhatikan bahwa tidak masuk akal untuk menanyakan banyaknya *bijeksi* di sini, karena memang tidak ada (karena kodomain lebih besar daripada domain, tidak ada surjeksi). Namun, agar suatu fungsi bersifat injektif, kita hanya tidak boleh menggunakan suatu elemen kodomain lebih dari sekali.

Kita perlu memilih suatu elemen dari kodomain sebagai citra 1. Terdapat 8 pilihan. Kemudian, kita perlu memilih salah satu dari 7 elemen yang tersisa sebagai citra 2. Akhirnya, salah satu dari 6 elemen yang tersisa harus menjadi citra 3. Jadi, jumlah seluruh fungsi adalah $8 \cdot 7 \cdot 6 = P(8, 3)$.

Secara umum, hal ini menunjukkan bahwa banyaknya injeksi $f : A \to B$, dengan $|A| = k$ dan $|B| = n$, adalah $P(n, k)$.

3.4.3 Mencacah Himpunan

Mari kita pertimbangkan cara lain untuk mencacah barisan: pertama cacah himpunannya, lalu susun elemen-elemennya.

Contoh 3.4.8

Tim bola basket Anda memiliki 12 pemain. Dengan menganggap setiap pemain dapat bermain di setiap posisi, ada berapa cara untuk memilih 5 pemain yang berada di lapangan pada saat yang sama?

Penyelesaian. Pertanyaan ini sebenarnya terlalu samar. Apakah yang dimaksud adalah banyaknya cara memilih lima pemain? Ataukah banyaknya cara memilih lima pemain untuk mengisi lima posisi?[2] Mari kita jawab kedua pertanyaan tersebut.

Pertama, jika kita hanya ingin memilih lima dari 12 pemain, hal itu sama seperti memilih lima dari 12 taburan piza (meskipun kurang lezat). Kita mengetahui bahwa terdapat $\binom{12}{5}$ cara untuk melakukannya, dan dari segitiga Pascal kita mengetahui bahwa nilainya 792.

Di sisi lain, jika kita ingin memilih lima pemain untuk lima posisi berbeda,... kita dapat memulai dengan memilih salah satu dari 792 *himpunan* berbeda yang masing-masing terdiri atas lima pemain, lalu mempermutasikan mereka ke dalam lima posisi. Dari lima pemain di lapangan, kita memilih satu sebagai pengatur serangan, lalu satu dari empat pemain yang tersisa sebagai bek penembak, dan seterusnya. Ini memberi kita $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ cara untuk menyusun para pemain. Jadi, jumlah seluruh cara memilih lima pemain untuk lima posisi adalah

$$\binom{12}{5} \cdot 5! = 792 \cdot 120 = 95,040.$$

Tunggu. Kita sebenarnya dapat memperoleh bilangan tersebut secara langsung. Tanpa memilih kelima pemain terlebih dahulu, kita memiliki 12 pilihan untuk pengatur serangan, lalu 11 pilihan untuk bek penembak, dan seterusnya. Jadi, jumlah seluruh cara memilih lima pemain untuk lima posisi hanyalah permutasi

$$P(12,5) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95,040.$$

Syukurlah jawabannya sama!

Contoh di atas menggambarkan cara kedua untuk menghitung banyaknya permutasi-k dari n elemen: pertama pilih k elemen yang akan berada dalam permutasi, lalu hitung banyaknya cara menyusunnya. Setelah memilih himpunan yang terdiri atas k objek, kita mengetahui bahwa terdapat $k!$ cara untuk menyusun (mempermutasikan) objek-objek tersebut. Namun, bagaimana cara memilih k objek dari n objek? Anda memiliki n objek dan perlu *memilih* k di antaranya. Anda dapat melakukannya dengan $\binom{n}{k}$ cara.

Dengan menggunakan prinsip perkalian untuk menggabungkan kedua langkah tersebut, kita memperoleh rumus lain untuk $P(n,k)$:

$$P(n,k) = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

Ini hasil yang SANGAT PENTING!

Kita sudah memiliki rumus tertutup untuk $P(n,k)$. Kita dapat menyubstitusikannya:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

Jika kemudian kita membagi kedua ruas dengan $k!$, kita memperoleh rumus tertutup untuk $\binom{n}{k}$.

Teorema 3.4.9 Rumus Tertutup untuk $\binom{n}{k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}.$$

Nama lain untuk kumpulan objek yang dicacah oleh $\binom{n}{k}$ adalah **kombinasi**. Kita mengatakan bahwa $\binom{n}{k}$ menghitung banyaknya kombinasi k elemen dari n elemen. Kadang-kadang kita bahkan menggunakan notasi $C(n,k)$ sebagai pengganti $\binom{n}{k}$.

Jelas bahwa kombinasi dan permutasi berkaitan sangat erat. Rumus untuk menghitung keduanya sangat mirip; hanya terdapat faktor tambahan $k!$ dalam penyebut $\binom{n}{k}$. Faktor tambahan $k!$ ini memperhitungkan fakta bahwa $\binom{n}{k}$ tidak

[2]Konon, kelima posisi itu disebut pengatur serangan, bek penembak, penyerang kecil, penyerang kuat, dan pemain tengah. Siapa sangka?

membedakan berbagai urutan kemunculan k objek tersebut. Kita hanya memilih k objek, bukan menyusunnya.

Contoh 3.4.10

Anda memutuskan untuk mengadakan jamuan makan malam. Meskipun Anda sangat populer dan memiliki 14 teman berbeda, kursi yang tersedia hanya cukup untuk mengundang 6 di antaranya.

1. Berapa banyak pilihan untuk menentukan 6 teman yang akan diundang?
2. Bagaimana jika Anda tidak hanya perlu menentukan teman-teman yang akan diundang, tetapi juga tempat duduk mereka di sepanjang meja panjang? Berapa banyak pilihan yang Anda miliki sekarang?

Penyelesaian.

1. Anda cukup memilih 6 teman dari kelompok berisi 14 orang. Ini dapat dilakukan dengan $\binom{14}{6}$ cara. Kita dapat memperoleh bilangan ini menggunakan segitiga Pascal atau rumus tertutup: $\frac{14!}{8!\cdot 6!} = 3003$.
2. Di sini Anda harus menghitung semua cara mempermutasikan 6 teman yang dipilih dari kelompok berisi 14 orang. Jadi, jawabannya adalah $P(14, 6)$, yang dapat dihitung sebagai $\frac{14!}{8!} = 2162160$.

   Perhatikan bahwa kita dapat memandang masalah pencacahan ini sebagai pertanyaan tentang pencacahan fungsi: Berapa banyak fungsi injektif dari himpunan 6 kursi ke himpunan 14 teman Anda (fungsi-fungsi tersebut injektif karena satu kursi tidak dapat diberikan kepada dua teman sekaligus).

Bagaimana hubungan antara bilangan-bilangan ini? Perhatikan bahwa $P(14, 6)$ *jauh* lebih besar daripada $\binom{14}{6}$. Hal ini masuk akal. $\binom{14}{6}$ memilih 6 teman, sedangkan $P(14, 6)$ memilih sekaligus menyusun keenam teman tersebut. Bahkan, kita dapat mengatakan secara tepat seberapa besar $P(14, 6)$ dibandingkan dengan banyaknya kombinasi. Dalam kedua masalah pencacahan, kita memilih 6 dari 14 teman. Untuk masalah pertama, kita berhenti di sana, pada 3003 cara. Namun, untuk masalah pencacahan kedua, masing-masing dari 3003 pilihan 6 teman dapat disusun dengan tepat 6! cara. Jadi, sekarang kita memiliki $3003 \cdot 6!$ pilihan, dan nilainya tepat 2162160.

Sebagai alternatif, pandanglah masalah pertama dengan cara lain. Kita ingin memilih 6 dari 14 teman, tetapi kita tidak memedulikan urutan pemilihannya. Untuk memilih 6 dari 14 teman, kita mungkin mencoba perhitungan berikut:

$$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9.$$

Dugaan ini wajar, karena kita memiliki 14 pilihan untuk tamu pertama, lalu 13 untuk tamu kedua, dan seterusnya. Namun, dugaan ini salah (sebenarnya,

hasil kali tersebut tepat sama dengan $2162160 = P(14, 6)$). Perhitungan itu membedakan urutan-urutan berbeda dalam mengundang para tamu. Untuk memperbaikinya, kita dapat membagi dengan banyaknya susunan berbeda dari 6 tamu (sehingga semua susunan ini dihitung sebagai satu hasil saja). Terdapat tepat 6! cara untuk menyusun 6 tamu, sehingga jawaban yang benar untuk pertanyaan pertama adalah

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6!}.$$

Perhatikan bahwa cara lain untuk menuliskannya adalah

$$\frac{14!}{8! \cdot 6!}.$$

yang sama dengan hasil awal kita.

Mungkin istilah "kombinasi" dapat menyesatkan. Yang kita maksud bukan seperti kombinasi pada kunci kombinasi (yang jelas sangat bergantung pada urutan). Perumpamaan yang lebih baik mungkin adalah kombinasi rasa — Anda hanya perlu menentukan rasa mana yang akan dipadukan, bukan urutan memadukannya.

Jadi, bagaimana Anda mengetahui kapan harus menggunakan kombinasi dan kapan harus menggunakan permutasi?

Apakah Urutan Berpengaruh? Hampir setiap sumber tentang kombinasi dan permutasi yang Anda baca akan menyampaikan suatu variasi dari pernyataan berikut.

> Gunakan permutasi ketika urutan berpengaruh, dan gunakan kombinasi ketika urutan tidak berpengaruh.

Apa sebenarnya arti pernyataan ini? Dan mengapa pernyataan itu merupakan cara yang sangat buruk untuk membedakan kedua teknik pencacahan tersebut? Mari kita selidiki melalui sebuah contoh.

Misalkan Anda mengusulkan permainan lotre baru. Dalam permainan ini, lima bola bernomor akan dilontarkan secara acak dari mesin yang memuat bola bernomor 1 sampai 52. Jika seorang pemain memilih dengan benar kelima angka yang keluar, ia memenangkan hadiah utama.

Tentu saja, kita ingin mengetahui peluang memenangkan permainan lotre ini, yang mengharuskan kita mengetahui berapa banyak hasil berbeda yang ada. Bola-bola keluar dari mesin secara acak, sehingga salah satu hasilnya mungkin berupa bola-bola

$$26, 5, 42, 17, 33.$$

Jika Anda memegang tiket dengan angka $5, 17, 26, 33, 42$, apakah Anda berharap telah menang? Kebanyakan permainan lotre akan menyatakan bahwa Anda menang, karena Anda memiliki angka-angka yang sama, hanya dalam urutan berbeda.

Dalam pengertian ini, *urutan* angka tidak berpengaruh. Cara yang lebih baik untuk mengatakannya adalah bahwa *sembarang* urutan dari angka-angka yang sama dianggap sebagai hasil yang sama dan hanya dihitung sekali. Jadi, sebenarnya kita menghitung *himpunan* yang terdiri atas lima angka, bukan *barisan* lima angka. Setiap hasil merupakan suatu kombinasi, sehingga banyaknya hasil seharusnya $C(52, 5) = \binom{52}{5}$.

Di sisi lain, jika kita harus memilih angka dalam urutan yang sama dengan urutan keluarnya dari mesin, sebenarnya kita mencocokkan suatu barisan angka dengan barisan angka lainnya. Banyaknya barisan adalah $P(52, 5)$. Dalam kasus ini, kita akan mengatakan bahwa urutan berpengaruh.

Baik, sejauh ini semuanya berjalan lancar. Namun, bagaimana dengan contoh berikut?

Contoh 3.4.11

Berapa banyak "kata" tiga huruf yang memenuhi ketentuan berikut?

1. huruf-hurufnya muncul dalam urutan alfabet?
2. huruf-huruf dalam kata dapat muncul dalam urutan apa pun?

Penyelesaian. Apakah "urutan berpengaruh" untuk pertanyaan pertama? Dalam satu pengertian, tentu saja! Kita hanya ingin menghitung kata yang huruf-hurufnya berada dalam urutan yang benar. Namun, menurut pengertian baku urutan berpengaruh dalam kombinasi/permutasi, urutan tidak berpengaruh.

Akan jauh lebih baik jika kita bertanya apakah setiap hasil seharusnya direpresentasikan sebagai himpunan huruf atau barisan huruf. Memang benar bahwa kata merupakan barisan huruf, tetapi apakah kita menghitung semua barisan yang mungkin? Tidak, hanya satu barisan untuk setiap himpunan huruf. Nah, tepat, himpunan huruf. Setiap hasil bersesuaian tepat dengan satu himpunan yang terdiri atas tiga huruf. Kita mencacah himpunan, sehingga kita menghitung kombinasi. Banyaknya hasil adalah $C(26, 3) = \binom{26}{3}$.

Untuk pertanyaan kedua, tampaknya urutan seharusnya tidak berpengaruh. Memang, urutan tidak berpengaruh bagi mesin yang mengeluarkan huruf-huruf tersebut, tetapi akan berpengaruh jika kita mencoba mencocokkan huruf-hurufnya. Sebaiknya kita berpikir seperti ini: Apakah kita menghitung setiap barisan huruf yang mungkin? Ya! Jadi, hasil-hasil ini merupakan permutasi, dan banyaknya hasil adalah $P(26, 3)$.

Penggunaan urutan lain yang dapat menyesatkan muncul ketika mencacah string bit. Ingatlah bahwa string bit berpanjang n dan berbobot k adalah string yang terdiri atas n bit (0 dan 1), dengan k bit bernilai 1. Sebagai contoh, string bit berpanjang 4 dan berbobot 2 adalah

$$1100,\ 1010,\ 1001,\ 0110,\ 0101,\ 0011.$$

Apakah urutan berpengaruh untuk string bit? Tentu saja! Urutan adalah satu-satunya hal yang berpengaruh. Semua string di atas memuat banyaknya 0 dan 1 yang tepat sama; string-string tersebut hanya dibedakan oleh urutan bitnya.

Meskipun demikian, banyaknya string bit berpanjang n dan berbobot k adalah $\binom{n}{k}$ dan BUKAN permutasi. Apa yang terjadi di sini?

Tidak ada yang keliru; kita hanya belum memikirkan objek yang tepat untuk mempertimbangkan urutannya. Ketika kita *memilih* k dari n hal untuk suatu string bit, yang kita pilih adalah *posisi* (untuk diisi dengan 1, misalnya). Urutan pemilihan posisi-posisi itu tidak berpengaruh; yang berpengaruh hanyalah himpunan posisi yang kita pilih. Artinya, string bit 1001 merupakan hasil memilih posisi 1 dan 4 untuk diisi dengan 1. Jika kita memilih posisi 4 lalu 1, kita akan memperoleh string bit yang sama.

Sebagai rangkuman, pertanyaan apakah urutan berpengaruh dapat menyesatkan kita ketika memutuskan antara kombinasi dan permutasi. Sebagai gantinya, kita harus menentukan apakah hasil yang kita cacah merupakan himpunan atau barisan. Jika kita mencacah himpunan, pikirkan kombinasi. Jika kita mencacah barisan, pikirkan permutasi.

3.4.4 Prinsip Hasil Bagi

Kita memiliki dua cara untuk menuliskan hubungan numerik antara banyaknya kombinasi dan permutasi. Dengan menggunakan prinsip perkalian, kita memperoleh,

$$P(n,k) = \binom{n}{k} \cdot k!$$

yang dapat ditulis ulang sebagai,

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!}.$$

Rumus kedua ini menunjukkan bahwa mungkin ada suatu *prinsip hasil bagi* yang dapat kita gunakan untuk membenarkannya.

Mari kita pikirkan arti pembagian. Salah satu cara memandang soal pembagian $24 \div 6 = 4$, misalnya, adalah dengan mengatakan bahwa jika Anda memiliki 24 objek yang dibagi ke dalam kelompok berukuran 6, banyaknya kelompok adalah 4.[3]

Sekarang mari kita lihat semua permutasi-3 dari himpunan berukuran 4: sebagai contoh, semua cara untuk membuat kata 3 huruf menggunakan huruf a, b, c, d. Kita mengetahui bahwa banyaknya kata semacam itu adalah $P(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Akan membantu jika kita benar-benar mendaftarkan semuanya.

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

[3]Cara lain menafsirkan pernyataan ini adalah bahwa jika Anda membagi 24 objek ke dalam enam kelompok, setiap kelompok akan berukuran 4, tetapi penafsiran ini kurang berguna bagi apa yang akan kita lakukan.

Perhatikan baris pertama. Apa kesamaan semua permutasi ini? Permutasi-permutasi tersebut tepat merupakan permutasi yang menggunakan huruf a, b, c dalam urutan berbeda. Tidak mengherankan bahwa terdapat 6 permutasi semacam ini, karena banyaknya cara menyusun tiga elemen adalah $3! = 6$. Dengan cara serupa, baris kedua memuat 6 permutasi yang menggunakan huruf a, b, d dalam urutan berbeda, dan seterusnya.

Intinya, jika kita hanya ingin menghitung banyaknya *himpunan* yang terdiri atas tiga dari empat huruf tersebut, setiap himpunan bersesuaian tepat dengan satu baris dalam tabel. Terdapat 24 elemen dalam tabel dan 6 elemen dalam setiap baris, sehingga harus ada $24 \div 6 = 4$ baris. Tentu saja, hal ini tidak mengejutkan karena $\binom{4}{3} = 4$.

Penjelasan yang lebih ketat secara matematis untuk fenomena ini menggunakan bahasa relasi ekuivalensi dan partisi dari Subbab 2.6. Kita mulai dengan permutasi, lalu mendefinisikan suatu *relasi ekuivalensi* pada permutasi-permutasi tersebut dengan menyatakan bahwa dua permutasi ekuivalen jika keduanya memuat tepat elemen-elemen yang sama. Dari relasi ekuivalensi tersebut, kita memperoleh suatu *partisi* atas himpunan permutasi menjadi *kelas-kelas ekuivalensi*. Kombinasi yang ingin kita cacah tepat merupakan kelas-kelas ekuivalensi tersebut. Karena setiap kelas ekuivalensi berukuran sama, kita dapat menentukan banyaknya kelas dengan membagi banyaknya permutasi dengan ukuran setiap kelas.

Prinsip hasil bagi semacam ini juga berguna untuk menyelesaikan pertanyaan yang jawabannya tidak jelas berupa permutasi ataupun kombinasi.

Contoh 3.4.12

Anda memutuskan untuk menghias tongkat sihir dengan pita perekat berbagai warna. Tersedia 10 warna berbeda, dan Anda akan menggunakan lima di antaranya untuk membuat lima garis warna yang berbeda. Berapa banyak desain tongkat berbeda yang mungkin?

Penyelesaian. Upaya pertama untuk menyelesaikan masalah ini mungkin adalah memandang setiap hasil yang hendak kita cacah sebagai permutasi-5 dari 10 warna. Ini akan memberi kita jawaban $P(10, 5) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30,240$. Lalu mengapa jawaban ini tidak benar? Mari mulai membuat daftar hasil-hasil yang mungkin.

1. Merah, biru, hijau, kuning, jingga.
2. Merah, biru, hijau, kuning, ungu.
3. Biru, hijau, merah, kuning, jingga.
4. Jingga, kuning, hijau, biru, merah.
5. dan seterusnya.

Saat mulai membuat daftar ini, mungkin kita bertanya apakah merah, merah, biru, biru, merah seharusnya masuk dalam daftar, lalu menyadari bahwa

susunan tersebut tidak boleh masuk. Hal lain yang mungkin kita pertimbangkan adalah apakah butir 1 dan 3 benar-benar berbeda. Keduanya memang berbeda, karena satu tongkat memiliki merah sebagai warna terluar, sedangkan yang lain tidak.

Namun, bagaimana dengan butir 1 dan 4? Keduanya memiliki lima warna yang sama, tetapi dalam urutan berbeda. Namun, jika Anda memutar tongkat sihir seperti yang lazim dilakukan pesulap, tongkat 1 dapat dengan mudah tampak seperti tongkat 4. Aha! Kita melihat bahwa setiap tongkat dihitung tepat dua kali dalam daftar permutasi kita: dua permutasi ekuivalen jika keduanya hanya merupakan *kebalikan urutan* satu sama lain.

Karena kita dapat mengelompokkan permutasi ke dalam kelompok berukuran 2 dan setiap kelompok bersesuaian dengan satu tongkat, kita melihat bahwa jawaban yang benar adalah,

$$\frac{P(10,5)}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 15,120.$$

Tara!

3.4.5 Pertanyaan Bacaan

1. Benar atau salah: Banyaknya barisan dua digit berbeda dari 0–9 adalah *dua kali* banyaknya himpunan dua digit berbeda dari 0–9. Jelaskan secara singkat.

2. Benar atau salah: Banyaknya barisan tiga digit berbeda dari 0–9 adalah *3 kali* banyaknya himpunan tiga digit berbeda dari 0–9. Jelaskan secara singkat.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu lebih lanjut.

3.4.6 Soal Latihan

1. Sebuah kedai piza menawarkan 8 jenis topping.

   a. Ada berapa piza dengan 2 jenis topping yang dapat dicantumkan pada menunya? Anggap bahwa satu jenis topping tidak boleh digunakan dua kali.

   b. Ada berapa piza yang mungkin dibuat jika boleh memakai antara nol dan 8 jenis topping, tanpa menggunakan satu jenis topping dua kali?

   c. Kedai piza itu akan mencantumkan 8 jenis topping dalam dua kolom berukuran sama pada menunya. Ada berapa cara untuk menyusun topping pada kolom kiri?

2. Sebuah kunci kombinasi memiliki cakram putar dengan 41 angka. Untuk membukanya, Anda memutar cakram ke kanan hingga mencapai angka

pertama, lalu ke kiri hingga mencapai angka kedua, kemudian ke kanan lagi hingga mencapai angka ketiga. Ketiga angka harus berbeda. Ada berapa kombinasi berbeda yang mungkin?

3. Dengan menggunakan digit 2 hingga 9, tentukan banyak bilangan 7 digit yang berbeda dengan ketentuan berikut:

a. Digit boleh digunakan lebih dari sekali.

b. Digit tidak boleh berulang, tetapi dapat muncul dalam urutan apa pun.

c. Digit tidak boleh berulang dan harus ditulis dalam urutan menaik.

4. Untuk merapikan kamar, Anda membeli rak dinding baru guna menaruh sebagian dari 30 buku yang bertumpuk di sudut. Semua buku tersebut ditulis oleh penulis yang berbeda. Rak baru itu cukup besar untuk menampung 19 buku. Hati-hati: sebelum menjawab dua pertanyaan berikut, pikirkan jawaban mana yang seharusnya lebih besar.

a. Ada berapa cara untuk memilih dan menyusun 19 dari 30 buku pada rak? Perhatikan bahwa buku-buku tersebut boleh tersusun dalam urutan apa pun.

b. Ada berapa cara untuk menyusun 19 dari 30 buku pada rak jika buku-buku itu harus diurutkan menurut abjad nama penulis?

5. Sebuah *anagram* dari suatu kata adalah penyusunan ulang huruf-hurufnya. Ada berapa anagram berbeda dari "ambidextrously"?

6. Ada berapa anagram dari kata "seeded" yang diawali huruf "s"?

7. Ada berapa anagram dari "goggles"?

8. Dalam sebuah acara retret perusahaan, 40 orang dari perusahaan Anda pergi bermain golf.

a. Anda perlu membagi mereka menjadi kelompok berempat (kelompok berisi 4 orang): kelompok pertama, kelompok kedua, dan seterusnya. Ada berapa cara untuk melakukannya?

b. Setelah bekerja keras, Anda menyadari bahwa sebenarnya setiap kelompok berempat harus memuat satu dari 10 anggota dewan (yang sudah termasuk di antara 40 pegolf tersebut). Ada berapa cara untuk melakukannya?

9. Ada berapa susunan tempat duduk berbeda yang mungkin bagi Raja Arthur dan 13 kesatrianya di sekeliling meja bundar mereka?

10. Perhatikan himpunan A dan B dengan $|A| = 13$ dan $|B| = 22$.

a. Ada berapa fungsi $f : A \to B$?

b. Ada berapa fungsi $f : A \to B$ yang injektif?

11. Perhatikan fungsi-fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

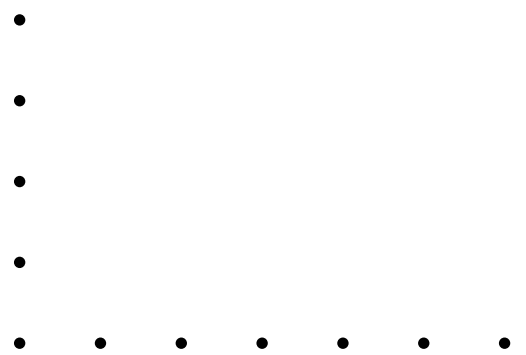
a. Ada berapa fungsi seluruhnya?

b. Ada berapa fungsi yang injektif?

c. Di antara fungsi-fungsi injektif tersebut, ada berapa yang *naik*? Fungsi disebut naik jika $a < b$ mengakibatkan $f(a) < f(b)$,; dengan kata lain, nilai keluaran membesar ketika nilai masukan membesar.

3.4.7 Latihan Tambahan

1. Berapa banyak segitiga yang titik-titik sudutnya dipilih dari titik-titik yang ditunjukkan di bawah ini? Perhatikan bahwa kita tidak memperbolehkan segitiga degenerat – yaitu segitiga yang ketiga titik sudutnya berada pada garis yang sama – tetapi kita memperbolehkan segitiga yang bukan segitiga siku-siku. Jelaskan mengapa jawaban Anda benar.



2. Kita telah melihat bahwa rumus untuk $P(n, k)$ adalah $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Tugas Anda di sini adalah menjelaskan *mengapa* rumus ini benar.

(a) Misalkan Anda memiliki 12 keping, masing-masing dengan warna berbeda. Berapa banyak tumpukan berbeda yang terdiri atas 5 keping yang dapat Anda buat? Jelaskan jawaban Anda dan mengapa hasilnya sama dengan menggunakan rumus untuk $P(12, 5)$.

(b) Dengan kembali menggunakan skenario 12 keping, apa yang dihitung oleh 12!? Apa yang dihitung oleh 7!? Jelaskan.

(c) Jelaskan mengapa masuk akal untuk membagi 12! dengan 7! ketika menghitung $P(12, 5)$ (dalam konteks keping-keping tersebut).

(d) Apakah penjelasan Anda berlaku untuk bilangan selain 12 dan 5? Jelaskan rumus $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ menggunakan variabel n dan k.

3.5 Menghitung Multihimpunan

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Mengidentifikasi masalah pencacahan yang hasilnya dapat direpresentasikan dengan multihimpunan.
2. Merepresentasikan hasil masalah pencacahan dengan multihimpunan dan diagram batang dan batu.
3. Menyelesaikan masalah pencacahan dengan batang dan batu.

3.5.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Skittles tersedia dalam lima "rasa". Ada berapa kemungkinan segenggam 8 Skittles yang berbeda?

Misalkan Anda telah memanggang 8 kue mangkuk identik untuk diberikan kepada lima dosen matematika diskret favorit Anda. Ada berapa cara untuk membagikan kue mangkuk tersebut?

Mengapa jawaban kedua pertanyaan pencacahan di atas sama?

Sekarang kita telah mengetahui cara menyelesaikan berbagai jenis masalah pencacahan. Jika setiap hasil dalam himpunan hasil yang kita cacah dapat direpresentasikan oleh suatu barisan, kita menghitungnya sebagai permutasi (jika suku-suku dalam barisan tidak berulang) atau menggunakan prinsip perkalian (jika berulang). Jika kita mencacah hasil yang susunan suku-sukunya tidak dibedakan (jika urutan tidak penting), kita memandang hasil itu sebagai himpunan dan menghitungnya sebagai kombinasi. Namun, himpunan tidak pernah mengizinkan suatu elemen berulang; setiap elemen berada dalam himpunan atau tidak.

Jadi, terdapat kekosongan yang mencolok dalam perangkat pencacahan kita. Bagaimana jika kita ingin mencacah hasil berupa koleksi suku yang urutan kemunculannya tidak kita bedakan, tetapi dapat memuat suatu suku lebih dari sekali? Dengan kata lain, bagaimana kita dapat melengkapi tabel berikut?

	Susunan Dibedakan?	
	Ya	Tidak
Pengulangan boleh	Barisan Prinsip Perkalian n^k	
Tanpa pengulangan	Barisan Permutasi $P(n,k)$	Himpunan Kombinasi $\binom{n}{k}$

Yang ingin kita cacah adalah sejenis struktur mirip himpunan, tetapi struktur yang *memang* mengizinkan elemen di dalamnya muncul lebih dari sekali. Struktur seperti itu disebut **multihimpunan**.

Definisi 3.5.1

Multihimpunan adalah koleksi elemen tak terurut yang setiap elemennya dapat muncul berapa kali pun. Banyaknya kemunculan suatu elemen disebut **multiplisitas** elemen tersebut.

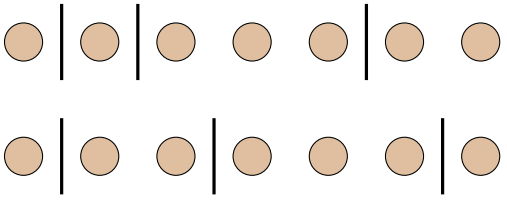
Multihimpunan ditulis dengan notasi yang sama seperti himpunan: daftar yang dipisahkan koma di dalam kurung kurawal, seperti $\{1, 2, 2, 5\}$.

Dalam bagian ini, kita akan menelaah bagaimana multihimpunan dapat digunakan untuk merepresentasikan beragam masalah pencacahan. Kemudian kita akan mengembangkan cara menerjemahkan multihimpunan menjadi jenis khusus string bit agar kita dapat menggunakan bilangan-bilangan dalam Segitiga Pascal untuk menghitung banyaknya multihimpunan.

Kegiatan Pratinjau

1. Carilah koleksi benda-benda identik, misalnya uang logam atau gula batu. Ambil juga beberapa pemisah, yang dapat berupa tusuk gigi, batang korek api, atau pena.

Susun uang logam dalam satu baris. Kita akan membagi baris itu menjadi sejumlah kelompok dengan menempatkan tusuk gigi pada celah di antara uang logam. Kita akan membedakan urutan kelompok-kelompok tersebut. Sebagai contoh, dua cara berbeda untuk membagi 7 uang logam menjadi 4 kelompok akan tampak seperti berikut:



Kita mengizinkan satu atau lebih kelompok tidak berisi uang logam (dengan menempatkan dua tusuk gigi berdampingan, atau menempatkannya sebelum

atau sesudah semua uang logam).

Dengan menyusun uang logam dan batang dalam jumlah yang tepat, hitung banyaknya cara membagi sebaris uang logam menjadi sejumlah kelompok yang diberikan.

(a) Jika Anda ingin membagi sebaris uang logam menjadi 4 kelompok, berapa tusuk gigi yang Anda perlukan?

(b) Ada berapa cara untuk memisahkan sebaris tiga uang logam menjadi dua kelompok?

(c) Ada berapa cara untuk memisahkan sebaris empat uang logam menjadi dua kelompok?

(d) Ada berapa cara untuk memisahkan sebaris lima uang logam menjadi dua kelompok?

(e) Ada berapa cara untuk memisahkan sebaris tiga uang logam menjadi tiga kelompok?

(f) Ada berapa cara untuk memisahkan sebaris empat uang logam menjadi tiga kelompok?

(g) Ada berapa cara untuk memisahkan sebaris lima uang logam menjadi tiga kelompok?

(h) Berdasarkan jawaban Anda di atas, buatlah konjektur tentang banyaknya cara untuk memisahkan sebaris tujuh uang logam menjadi empat kelompok.

Petunjuk. Carilah bilangan-bilangan yang Anda peroleh pada pertanyaan sebelumnya di Segitiga Pascal.

3.5.2 Silakan Ambil Kue

Perhatikan masalah pencacahan berikut:

> Anda memiliki 7 kue untuk diberikan kepada 4 anak. Ada berapa cara untuk melakukannya?

Luangkan waktu sejenak untuk memikirkan cara menyelesaikan masalah ini. Anda boleh menganggap bahwa seorang anak boleh tidak memperoleh kue sama sekali. Selain itu, semua kue identik dan urutan pembagiannya tidak penting (jadi, memberikan kue kepada anak kedua sebelum anak pertama tidak dihitung sebagai hasil yang berbeda dari urutan sebaliknya).

Sebelum menyelesaikan masalah ini, berikut sebuah jawaban yang salah: Anda mungkin menduga bahwa jawabannya adalah 4^7 karena, untuk masing-masing dari 7 kue, terdapat 4 pilihan anak yang dapat menerima kue tersebut. Dugaan ini masuk akal, tetapi salah. Untuk melihat alasannya, perhatikan beberapa kemungkinan hasil:

kita dapat memberikan enam kue pertama kepada anak A dan kue ketujuh kepada anak B. Hasil lain memberikan kue pertama kepada anak B dan enam kue yang tersisa kepada anak A. Kedua hasil itu tercakup dalam jawaban 4^7. Namun, bagi masalah pencacahan kita, kedua hasil itu sebenarnya sama – anak A memperoleh enam kue dan anak B memperoleh satu kue. Jawaban tersebut akan benar jika semua kue berbeda, padahal kue-kue itu identik.

Seperti apa sebenarnya hasil-hasil itu? Bagaimana kita dapat merepresentasikannya? Salah satu pendekatan adalah menuliskan suatu hasil sebagai string empat bilangan seperti berikut:

3112,

yang merepresentasikan hasil ketika anak pertama memperoleh 3 kue, anak kedua dan ketiga masing-masing memperoleh 1 kue, dan anak keempat memperoleh 2 kue. Dalam representasi ini, urutan kemunculan bilangan-bilangannya penting. String 1312 merupakan hasil yang berbeda karena anak pertama memperoleh satu kue, bukan 3. Setiap bilangan dalam string dapat berupa bilangan bulat apa pun dari 0 hingga 7. Namun, jawabannya bukan 7^4. Kita memerlukan *jumlah* bilangan-bilangan itu sama dengan 7.

Cara lain untuk merepresentasikan hasil adalah menuliskan string tujuh huruf:

ABAADCD,

yang merepresentasikan bahwa kue pertama diberikan kepada anak A, kue kedua kepada anak B, kue ketiga dan keempat kepada anak A, dan seterusnya. Sebenarnya, hasil ini identik dengan hasil sebelumnya—A memperoleh 3 kue, B dan C masing-masing memperoleh 1, dan D memperoleh 2. Setiap huruf dalam string tersebut dapat berupa salah satu dari 4 huruf yang mungkin (satu untuk setiap anak), tetapi banyaknya string seperti itu bukan 4^7 karena di sini urutan *tidak* penting. Bahkan, cara lain untuk menuliskan hasil yang sama adalah

AAABCDD.

Inilah representasi hasil yang akan kita utamakan. Karena kita dapat menuliskan huruf-huruf itu dalam urutan apa pun, untuk keperluan pencacahan kita dapat menuliskannya dalam urutan *alfabetis*. Jadi, kita akan menuliskan semua A terlebih dahulu, kemudian semua B, dan seterusnya. Karena kita tidak membedakan susunan yang berbeda, ini sebenarnya seperti menuliskan sebuah himpunan, hanya saja **multihimpunan** ini dapat memuat suatu elemen lebih dari sekali.

Jadi, sekarang kita memiliki dua cara yang berguna untuk memandang hasil-hasil tersebut.

1. Sebagai multihimpunan yang memuat 7 elemen, yang masing-masing merupakan salah satu dari empat anak (atau huruf yang mewakili nama mereka). Sebagai contoh,

   $$\{A, A, A, B, C, D, D\}.$$

   Setiap kemunculan seorang anak dalam multihimpunan berarti anak itu memperoleh satu kue, sehingga **multiplisitas** anak tersebut dalam multihimpunan adalah banyaknya kue yang diperolehnya.

2. Sebagai string 4 bilangan taknegatif yang jumlahnya 7. Sebagai contoh,

$$3112.$$

Posisi bilangan dalam string merepresentasikan anaknya, sedangkan bilangan itu sendiri merepresentasikan banyaknya kue yang diperoleh anak tersebut.

Sebelum memikirkan cara menghitung banyaknya hasil yang direpresentasikan dengan cara ini, perhatikan beberapa contoh lain masalah pencacahan yang dapat kita representasikan dengan kedua cara tersebut.

Contoh 3.5.2

Anda mengambil segenggam sepuluh permen jeli dari kantong yang berisi enam rasa. Tuliskan tiga kemungkinan hasil dengan menggunakan multihimpunan dan string bilangan.

Penyelesaian. Multihimpunan merupakan cara yang lebih alami untuk memandang masalah ini karena setiap genggam merupakan multihimpunan rasa. Sebagai contoh, kita dapat memperoleh

$$\{R, R, G, G, G, B, B, B, B, Y\}$$

yang berarti Anda memperoleh dua permen jeli merah, tiga hijau, empat biru, dan satu kuning (serta tidak memperoleh yang ungu atau jingga), atau

$$\{R, R, R, R, R, R, R, R, R, R\}$$

yang berarti Anda memperoleh sepuluh permen jeli merah. Anda juga dapat memperoleh

$$\{R, G, B, Y, P, O, O, O, O, O\}$$

yang berarti Anda memperoleh masing-masing satu permen jeli merah, hijau, biru, kuning, dan ungu, serta lima permen jeli jingga.

Barisan enam bilangan yang bersesuaian dan berjumlah 10 adalah

$$2, 3, 4, 1, 0, 0; \qquad 10, 0, 0, 0, 0, 0; \qquad 1, 1, 1, 1, 1, 5.$$

(Kita menambahkan koma di antara bilangan karena tidak setiap bilangan hanya terdiri atas satu digit.) Perhatikan bahwa untuk representasi ini kita harus menyepakati urutan rasa yang tetap; dalam hal ini urutannya tidak alfabetis, tetapi sama dengan urutan yang digunakan saat menuliskan multihimpunan.

Contoh 3.5.3

Anda memiliki 12 eksemplar identik buku Matematika Diskret favorit yang ingin Anda letakkan pada 5 rak buku. Tuliskan tiga kemungkinan hasil

dengan menggunakan multihimpunan dan string bilangan.

Penyelesaian. Di sini barisan bilangan lebih alami karena kita cukup menyatakan banyaknya buku pada setiap rak. Kita memerlukan 5 bilangan yang jumlahnya 12. Sebagai contoh, kita dapat memperoleh

1. $3, 3, 3, 2, 1$, yang berarti 3 buku pada rak pertama, 3 pada rak kedua, 3 pada rak ketiga, 2 pada rak keempat, dan 1 pada rak kelima.
2. $0, 0, 12, 0, 0$, yang berarti semua 12 buku berada pada rak tengah.
3. $1, 1, 1, 1, 8$, yang berarti satu buku pada masing-masing dari empat rak pertama dan 8 pada rak terakhir.

Multihimpunan yang bersesuaian adalah

1. $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5\}$, yang berarti rak 1 diberi buku tiga kali, rak 2 diberi buku tiga kali, dan seterusnya. Perhatikan bahwa terdapat 12 elemen dalam multihimpunan, satu untuk setiap buku. Bilangan-bilangan di sini merepresentasikan rak; multiplisitas suatu bilangan adalah banyaknya buku pada rak tersebut.
2. $\{3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3\}$. Satu-satunya rak dalam multihimpunan adalah rak 3, dengan multiplisitas 12, yang berarti rak 3 memperoleh 12 buku.
3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5\}$. Di sini rak 1 memperoleh satu buku, rak 2 satu buku, rak 3 satu buku, rak 4 satu buku, dan rak 5 memperoleh sisanya.

Contoh terakhir ini juga dapat diajukan sebagai pertanyaan tentang penyelesaian persamaan dengan solusi bilangan bulat taknegatif. Secara khusus, kita dapat mencari solusi persamaan $a + b + c + d + e = 12$. Pandang setiap variabel sebagai bilangan yang menyatakan banyaknya buku pada setiap rak. Kita akan mengajukan pertanyaan secara langsung dalam bentuk seperti ini, tetapi mengetahui cara merepresentasikan pertanyaan lain sebagai persamaan semacam itu juga berguna.

3.5.3 Merepresentasikan Multihimpunan dengan String Bit

Sekarang mari kita kembali ke masalah semula, yaitu membagikan 7 kue kepada 4 anak, dan benar-benar menghitung banyaknya hasil.

Ketika mencacah himpunan biasa, kita melihat bahwa bilangan-bilangan dalam Segitiga Pascal memberikan hasil pencacahannya. Hal ini benar karena kita dapat merepresentasikan setiap himpunan sebagai string bit. Setiap kali suatu elemen berada dalam himpunan, kita menandainya dengan 1; jika elemen itu tidak berada dalam himpunan, kita menandai ketidakhadirannya dengan 0.

Pada dasarnya, inilah yang kita lakukan dengan multihimpunan, tetapi kita

harus menggunakan string bilangan taknegatif yang tidak terbatas pada 0 dan 1 karena suatu elemen dalam multihimpunan dapat muncul lebih dari nol atau satu kali. Namun, jika kita dapat menerjemahkan string bilangan tersebut menjadi jenis string bit lain, kita dapat menggunakan Segitiga Pascal untuk menghitung banyaknya multihimpunan.

Berikut cara melakukannya. Diberikan multihimpunan seperti

$$\{A, A, A, B, C, D, D\}$$

kita memiliki representasi barisan bilangan

$$3, 1, 1, 2.$$

Alih-alih menggunakan bilangan satu per satu, tuliskan masing-masing sebagai barisan angka 1 sebanyak bilangan tersebut. Jadi, contoh ini menjadi

$$111, 1, 1, 11.$$

Bentuk ini agak canggung karena kita menggunakan koma untuk memisahkan bilangan. Agar lebih jelas, mari kita beralih ke dua simbol yang berbeda. Kita akan menyebutnya **batang dan batu**, dengan batu merepresentasikan angka 1 dan batang merepresentasikan koma. Jadi, barisan

$$111, 1, 1, 11$$

menjadi

$$\circ\circ\circ|\circ|\circ|\circ\circ.$$

Ini adalah string sepuluh simbol, yang terdiri atas 7 batu dan 3 batang.

Ini luar biasa! Apa pun kedua simbol yang kita gunakan (metode ini mungkin juga disebut **bintang dan batang** atau **bola dan kotak**), kita dapat menggunakan Segitiga Pascal untuk menghitung banyaknya cara menyusun simbol-simbol tersebut. Banyaknya string 10-bit berbobot 3 (atau berbobot 7) adalah $\binom{10}{3} = 120$.

Dalam konteks kue, kita dapat memandang diagram batang dan batu ini sebagai penunjuk setelah berapa kue kita berhenti memberikan kue kepada anak pertama dan mulai memberikannya kepada anak kedua. Lalu setelah berapa kue kita berpindah ke anak ketiga? Dan setelah berapa kue kita berpindah ke anak keempat? Jadi,

$$\circ\circ\circ|\circ|\circ|\circ\circ$$

berarti tiga kue diberikan kepada anak pertama; kemudian kita berpindah dan memberikan satu kue kepada anak kedua, berpindah lagi dan memberikan satu kepada anak ketiga, lalu berpindah dan memberikan dua kepada anak keempat. Perhatikan bahwa kita memerlukan 7 batu dan 3 batang – satu batu untuk setiap kue dan satu batang untuk setiap perpindahan antaranak, sehingga jumlah batang satu lebih sedikit daripada jumlah anak (kita tidak perlu berpindah setelah anak terakhir – kita sudah selesai).

Sekalian, kita juga dapat menjawab pertanyaan terkait: ada berapa cara untuk membagikan 7 kue kepada 4 anak sehingga setiap anak memperoleh sedikitnya satu kue? Apa yang dapat Anda katakan tentang diagram batang dan batu yang bersesuaian? Diagram tersebut harus diawali dan diakhiri dengan sedikitnya satu batu (agar anak A dan D memperoleh kue), dan tidak boleh ada dua batang yang berdampingan (agar anak B dan C tidak dilewati). Salah satu cara untuk memastikan hal ini adalah menempatkan batang hanya pada celah *di antara* batu-batu. Dengan 7 batu, terdapat 6 celah di antaranya, sehingga kita harus memilih 3 dari 6 celah tersebut untuk diisi batang. Jadi, terdapat $\binom{6}{3}$ cara untuk membagikan 7 kue kepada 4 anak dengan memberikan sedikitnya satu kue kepada setiap anak.

Cara lain (dan lebih umum) untuk menangani masalah yang dimodifikasi ini adalah terlebih dahulu memberikan satu kue kepada setiap anak. Kini 3 kue yang tersisa dapat dibagikan kepada 4 anak tanpa batasan. Jadi, kita memiliki 3 batu dan 3 batang, sehingga jumlahnya 6 simbol dan 3 di antaranya harus berupa batang. Sekali lagi, kita melihat bahwa terdapat $\binom{6}{3}$ cara untuk membagikan kue-kue tersebut.

Batang dan batu dapat digunakan dalam masalah pencacahan selain anak dan kue. Berikut beberapa contohnya:

Contoh 3.5.4

Kedai es krim matematis favorit Anda menawarkan 10 rasa. Ada berapa susu kocok yang dapat Anda buat dengan tepat 6 sendok es krim yang tidak harus berbeda? Urutan penambahan rasa tidak penting (semuanya akan diblender), tetapi pengulangan diperbolehkan. Jadi, salah satu susu kocok yang mungkin terdiri atas tiga sendok cokelat, dua sendok ceri, dan satu sendok cokelat keping mint.

Penyelesaian. Kita memperoleh enam sendok, yang masing-masing dapat berupa salah satu dari sepuluh rasa yang mungkin. Representasikan setiap sendok sebagai bintang. Bayangkan Anda menyusuri etalase, satu rasa demi satu: pertama Anda melihat vanila, lalu melewatinya menuju rasa berikutnya, cokelat. Anda mengatakan ya untuk cokelat tiga kali (gunakan tiga batu), kemudian berpindah ke rasa berikutnya. Anda terus melewati rasa hingga tiba pada ceri, dan mengatakan ya dua kali. Berpindah sekali lagi, Anda tiba pada cokelat keping mint. Anda mengatakan ya satu kali. Lalu Anda terus berpindah sampai melewati rasa terakhir tanpa mengatakan ya lagi (karena Anda sudah mengatakan ya enam kali). Terdapat sepuluh rasa yang dapat dipilih, sehingga kita harus berpindah dari satu rasa ke rasa berikutnya sembilan kali. Perpindahan ini direpresentasikan oleh sembilan batang.

Setelah yakin bahwa kita memiliki jumlah batang dan batu yang tepat, kita dapat menjawab pertanyaan dengan mudah: terdapat 6 batu dan 9 batang, sehingga seluruhnya ada 15 simbol. Kita perlu memilih 9 di antaranya sebagai

batang, sehingga banyaknya susu kocok yang mungkin adalah

$$\binom{15}{9}.$$

Contoh 3.5.5

Ada berapa nomor telepon 7 digit yang digit-digitnya takmenaik? Artinya, setiap digit kurang dari atau sama dengan digit sebelumnya.

Penyelesaian. Kita perlu menentukan 7 digit, sehingga kita akan menggunakan 7 batu. Batang akan merepresentasikan perpindahan dari setiap bilangan satu digit yang mungkin ke bilangan lebih kecil berikutnya. Jadi, nomor telepon 866-5221 direpresentasikan oleh diagram batang dan batu

$$|\circ||\circ\circ|\circ|||\circ\circ|\circ|.$$

Terdapat 10 pilihan untuk setiap digit (0–9), sehingga kita harus berpindah di antara pilihan sebanyak 9 kali. Kita memiliki 7 batu dan 9 batang, sehingga jumlah seluruh nomor telepon adalah

$$\binom{16}{9}.$$

Contoh 3.5.6

Ada berapa solusi bilangan bulat untuk persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13.$$

(**Solusi bilangan bulat** suatu persamaan adalah solusi yang peubah takdiketahuinya harus bernilai bilangan bulat.)

1. dengan $x_i \geq 0$ untuk setiap x_i?
2. dengan $x_i > 0$ untuk setiap x_i?
3. dengan $x_i \geq 2$ untuk setiap x_i?

Penyelesaian. Masalah ini sama seperti memberikan 13 kue kepada 5 anak. Kita perlu menentukan berapa dari 13 satuan yang diberikan kepada masing-masing dari 5 variabel. Dengan kata lain, kita memiliki 13 batu dan 4 batang (batang berperan seperti tanda "+" dalam persamaan).

1. Jika x_i dapat bernilai 0 atau lebih, kita berada dalam kasus standar tanpa batasan. Jadi, 13 batu dan 4 batang dapat disusun dalam $\binom{17}{4}$ cara.

2. Sekarang setiap variabel harus bernilai sedikitnya 1. Jadi, berikan satu satuan kepada setiap variabel untuk memenuhi batasan tersebut. Kini tersisa 8 batu dan masih ada 4 batang, sehingga banyaknya solusi adalah $\binom{12}{4}$.

3. Sekarang setiap variabel harus bernilai 2 atau lebih. Jadi, sebelum melakukan pencacahan, berikan 2 satuan kepada setiap variabel. Kini kita memiliki 3 batu yang tersisa dan 4 batang, sehingga terdapat $\binom{7}{4}$ solusi.

Pencacahan dengan Fungsi. Banyak masalah pencacahan dalam bagian ini mula-mula mungkin tampak sebagai contoh pencacahan *fungsi*. Lagi pula, ketika mencoba menghitung banyaknya cara membagikan kue kepada anak-anak, kita memasangkan setiap kue dengan seorang anak, seperti memasangkan elemen domain suatu fungsi dengan elemen kodomainnya. Namun, banyaknya cara membagikan 7 kue kepada 4 anak adalah $\binom{10}{7} = 120$, sedangkan banyaknya fungsi $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{a,b,c,d\}$ adalah $4^7 = 16384$. Apa yang terjadi di sini?

Ketika mencacah fungsi, kita menganggap, misalnya, kedua fungsi berikut berbeda:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & c & c & c & c \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ b & a & c & c & c & c & c \end{pmatrix}.$$

Namun, kedua fungsi ini berkorespondensi dengan pembagian kue yang *sama*: anak a dan b masing-masing memperoleh satu kue, anak c memperoleh sisanya, dan anak d tidak memperoleh kue.

Intinya: elemen-elemen domain dapat dibedakan, sedangkan kue-kue tidak dapat dibedakan. Hal ini analog dengan perbedaan antara permutasi (seperti pencacahan fungsi) dan kombinasi.

3.5.4 Pertanyaan Bacaan

1. Manakah di antara pertanyaan pencacahan berikut yang BUKAN merupakan contoh pertanyaan yang akan Anda selesaikan dengan batang dan batu?

A. Ada berapa cara untuk membagikan enam hadiah berbeda kepada tiga teman?

B. Ada berapa cara untuk membagikan enam hadiah identik kepada tiga teman?

C. Ada berapa kombinasi bilangan berbeda yang dapat Anda peroleh jika Anda melempar tiga dadu identik bersisi 6?

D. Ada berapa susu kocok tiga sendok yang berbeda jika setiap sendok es krim dapat berupa salah satu dari enam rasa berbeda?

2. Ketika Anda mencacah hasil dengan batang dan batu, apakah urutan penting? Apakah pengulangan diperbolehkan? Jelaskan maksud jawaban Anda (urutan dari apa, pengulangan dari apa)?

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu.

3.5.5 Soal Latihan

1. Multihimpunan adalah koleksi objek, sama seperti himpunan, tetapi dapat memuat suatu objek lebih dari sekali (urutan elemennya tetap tidak penting). Sebagai contoh, $\{1, 1, 2, 5, 5, 7\}$ merupakan multihimpunan berukuran 6.

a. Ada berapa *himpunan* berukuran 9 yang dapat dibentuk dengan menggunakan 10 digit 0 sampai 9?

b. Ada berapa *multihimpunan* berukuran 9 yang dapat dibentuk dengan menggunakan 10 digit 0 sampai 9?

2. Dengan menggunakan digit 2 sampai 7, tentukan banyaknya bilangan berbeda yang terdiri atas 5 digit sehingga:

a. Digit tidak boleh berulang dan harus ditulis dalam urutan menaik. (*Menaik* berarti *menaik secara ketat*. Sebagai contoh, digit pada 134 menaik, tetapi digit pada 133 tidak.)

b. Digit *boleh* berulang dan harus ditulis dalam urutan *takmenurun*. (Sekarang digit tidak harus menaik secara ketat; digit pada 133 takmenurun.)

3. Setelah pelajaran olahraga, Anda ditugasi menyimpan 16 bola dodgeball identik ke dalam 10 wadah.

a. Ada berapa cara untuk melakukannya jika tidak ada kendala?

b. Ada berapa cara untuk melakukannya jika setiap wadah harus memuat sedikitnya satu bola dodgeball?

4. Berapakah banyaknya solusi bilangan bulat untuk persamaan $x + y + z = 12$ yang memenuhi

a. x, y, dan z semuanya positif?

b. x, y, dan z semuanya taknegatif?

c. x, y, dan z semuanya lebih besar daripada atau sama dengan -3.

5. Ketika bermain Yahtzee, Anda melempar lima dadu biasa bersisi 6. Ada berapa hasil berbeda yang mungkin diperoleh dari satu lemparan? Urutan dadu tidak penting.

Ketika bermain Super-Yahtzee, Anda melempar 4 dadu biasa bersisi 10.

Sekarang ada berapa hasil berbeda yang mungkin diperoleh dari satu lemparan?

6. Teman Anda mengatakan bahwa ia memegang 9 keping uang logam (hanya koin 1 sen atau *penny*, 5 sen atau *nickel*, 10 sen atau *dime*, dan 25 sen atau *quarter*). Jika Anda menebak banyaknya uang logam dari setiap jenis yang ia miliki, ia akan memberikan semuanya kepada Anda. Jika Anda menebak secara acak, berapakah peluang bahwa tebakan Anda benar?

7. Berapakah banyaknya solusi bilangan bulat untuk $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35$ yang memenuhi $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 4$, $x_3 \geq 1$, dan $x_4 \geq 4$?

8. Perhatikan fungsi-fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

a. Berapa banyak fungsi yang menaik secara ketat? Jelaskan. (Suatu fungsi menaik secara ketat jika $a < b$, maka $f(a) < f(b)$.)

b. Berapa banyak fungsi yang takmenurun? Jelaskan. (Suatu fungsi takmenurun jika $a < b$, maka $f(a) \leq f(b)$.)

9. *Conic*, gerai cepat saji bertema matematika favorit Anda yang melayani pesanan dari kendaraan, menawarkan 28 rasa yang dapat ditambahkan ke soda. Anda mempunyai cukup uang untuk membeli soda besar dengan 7 tambahan rasa. Ada berapa racikan soda berbeda yang dapat Anda pesan jika:

a. Anda tidak mau menggunakan rasa yang sama lebih dari sekali?

b. Anda tidak memperbolehkan pengulangan, tetapi memperhatikan urutan penambahan rasa?

c. Anda memperbolehkan beberapa takaran rasa yang sama?

d. Anda memperbolehkan beberapa takaran rasa yang sama dan memperhatikan urutan penambahan rasa?

3.5.6 Latihan Tambahan

1. Setiap masalah pencacahan di bawah ini dapat diselesaikan dengan batang dan batu. Untuk masing-masing masalah, jelaskan hasil yang direpresentasikan oleh diagram

$$\circ\ \circ\ \circ|\ \circ\ ||\ \circ\ \circ|$$

jika jumlah batang dan batunya tepat untuk masalah tersebut. Jika tidak, jelaskan mengapa diagram itu tidak merepresentasikan hasil apa pun, dan seperti apa diagram yang benar.

(a) Ada berapa cara untuk mengambil segenggam 6 permen jeli dari stoples yang berisi 5 rasa berbeda?

(b) Ada berapa cara untuk membagikan 5 lolipop identik kepada 6 anak?

(c) Ada berapa kata 6 huruf yang dapat Anda bentuk dengan menggunakan 5 huruf vokal dalam urutan alfabetis?

(d) Ada berapa solusi untuk persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$.

2. Selesaikan ketiga masalah pencacahan di bawah ini. Kemudian jelaskan mengapa wajar jika semuanya memiliki jawaban yang sama. Artinya, jelaskan bagaimana masing-masing dapat ditafsirkan sebagai masalah yang lain.

(a) Ada berapa cara untuk membagikan 8 kue kepada 3 anak?

(b) Ada berapa solusi dalam bilangan bulat taknegatif untuk $x + y + z = 8$?

(c) Ada berapa kemasan berbeda yang masing-masing berisi 8 krayon yang dapat Anda buat dengan krayon merah, biru, dan kuning?

3. Kita telah merepresentasikan multihimpunan dengan diagram batang dan batu, lalu menghitung banyaknya diagram batang dan batu untuk memperoleh banyaknya multihimpunan. Proses ini hanya sah jika setiap multihimpunan berkorespondensi dengan tepat satu diagram batang dan batu, dan sebaliknya.

(a) Tuliskan dengan jelas aturan untuk mengubah multihimpunan menjadi diagram batang dan batu. Artinya, deskripsikan fungsi f yang menerima multihimpunan sebagai masukan dan menghasilkan diagram batang dan batu sebagai keluaran.

(b) Buktikan bahwa fungsi f merupakan bijeksi. Artinya, buktikan bahwa setiap diagram batang dan batu berkorespondensi dengan tepat satu multihimpunan, dan sebaliknya.

3.6 Pembuktian Kombinatorial

Tujuan Pembelajaran

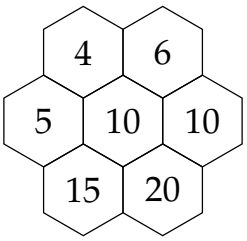
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menuliskan masalah pencacahan yang memiliki jawaban tertentu.
2. Menuliskan dua solusi berbeda untuk suatu masalah pencacahan.
3. Membuktikan identitas binomial dengan pembuktian kombinatorial.

3.6.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Perhatikan sembarang sel di bagian dalam Segitiga Pascal beserta enam bilangan yang mengelilinginya. Sebagai contoh, Anda dapat memperhatikan sel berikut:



Keenam bilangan yang mengelilingi sel pilihan kita akan dibagi menjadi dua kelompok yang masing-masing terdiri atas tiga bilangan, dengan keanggotaan berselang-seling di antara kedua kelompok. Jadi, dalam contoh ini kita memiliki satu kelompok berisi 4, 10, dan 15, serta kelompok kedua berisi 5, 6, dan 20. Namun, perhatikan:

$$4 \cdot 10 \cdot 15 = 600 = 5 \cdot 6 \cdot 20.$$

Apakah ini berlaku untuk sel tengah mana pun yang Anda pilih? Mengapa?

Salah satu hal paling menarik dalam kombinatorika adalah bahwa pertanyaan pencacahan yang sama sering kali dapat dijawab dengan cara yang sangat berbeda. Ketika mengenali hal ini dalam suatu masalah, kita sering dapat menggeneralisasi pertanyaannya untuk memperoleh dua ekspresi berbeda yang harus merepresentasikan kuantitas yang sama. Masalah pencacahan itu sendiri menjadi pembuktian bahwa kedua ekspresi tersebut sama. Gaya pembuktian ini disebut **pembuktian**

kombinatorial.

Kegiatan Pratinjau

Jawaban atas suatu pertanyaan pencacahan sering kali dapat ditemukan dengan dua cara berbeda. Hal ini menghasilkan dua rumus yang memberikan jawaban tersebut; keduanya mungkin tampak berbeda, tetapi harus sama (karena keduanya merupakan jawaban yang benar untuk pertanyaan yang sama). Dengan demikian diperoleh pembuktian bahwa kedua rumus itu sama, yang disebut **pembuktian kombinatorial**.

Mari kita telaah beberapa contoh.

1. Perhatikan himpunan string 7-bit berbobot 3. Artinya, string 0 dan 1 yang panjangnya tujuh karakter dan memuat tepat tiga angka 1. Ada berapa string seperti itu?

(a) Nyatakan jawabannya sebagai satu koefisien binomial.

(b) Sekarang hitung hanya string 7-bit berbobot 3 yang diawali dengan 1. Ada berapa?

(c) Sekarang hitung hanya string 7-bit berbobot 3 yang diawali dengan 01. Ada berapa?

(d) Sekarang hitung hanya string 7-bit berbobot 3 yang diawali dengan 001. Ada berapa?

(e) Lanjutkan proses ini hingga Anda telah menghitung semua string 7-bit berbobot 3 sebagai *jumlah* koefisien-koefisien binomial. Berapakah jumlah ini?

2. Perhatikan pertanyaan pencacahan "Ada berapa cara untuk menyusun ulang huruf-huruf dalam kata *STATISTICS*?" Perhatikan bahwa ini bukan sekadar permutasi karena terdapat huruf yang berulang.

(a) Ada berapa cara untuk memilih tiga dari sepuluh posisi dalam anagram agar ditempati oleh huruf *S*?

(b) Ada berapa cara untuk memilih tiga dari tujuh posisi yang tersisa dalam anagram agar ditempati oleh huruf *T*?

(c) Lanjutkan pendekatan ini hingga Anda menemukan suatu ekspresi bagi banyaknya cara menyusun ulang huruf-huruf dalam *STATISTICS* sebagai hasil kali koefisien-koefisien binomial. Tuliskan hasil kali tersebut.

(d) Sekarang jawab kembali pertanyaan pencacahan tersebut, kali ini dengan terlebih dahulu menanyakan banyaknya cara memilih posisi bagi huruf *A*. Lanjutkan dengan cara apa pun yang Anda sukai hingga Anda menemukan ekspresi lain bagi banyaknya cara menyusun ulang huruf-

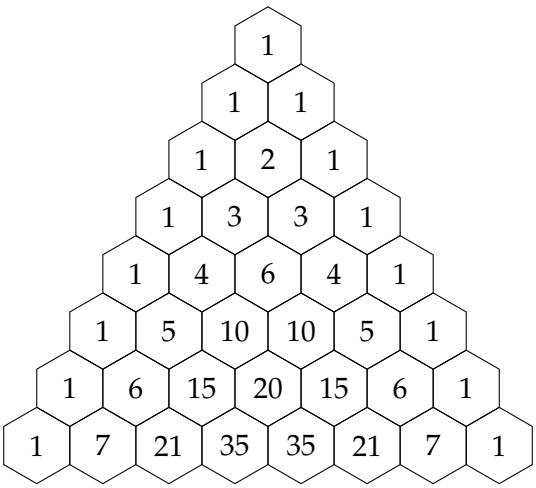
huruf dalam *STATISTICS* sebagai hasil kali koefisien-koefisien binomial. Tuliskan hasil kali tersebut.

(e) Cobalah pendekatan lain lagi. Apa yang salah dengan mengatakan bahwa jawabannya adalah 10!? Nilai ini terlalu besar, tetapi kita dapat memperbaikinya dengan membagi untuk memperhitungkan hasil-hasil yang ekuivalen. Dengan apa Anda harus membaginya?

Tuliskan jawaban Anda sebagai hasil bagi faktorial. Apakah Anda memperoleh jawaban yang sama seperti sebelumnya?

3.6.2 Pola dalam Segitiga Pascal

Perhatikan kembali Segitiga Pascal. Lupakan sejenak dari mana segitiga itu berasal. Pandang saja sebagai objek matematis. Apa yang Anda amati?



Banyak pola tersembunyi dalam segitiga tersebut, bahkan cukup untuk memenuhi sebuah buku berukuran wajar. Berikut beberapa pola yang paling jelas:

1. Semua entri pada batas segitiga bernilai 1.
2. Setiap entri yang tidak berada pada batas merupakan jumlah dua entri di atasnya.
3. Segitiga tersebut simetris. Pada setiap baris, entri-entri di sisi kiri dicerminkan di sisi kanan.
4. Jumlah semua entri pada suatu baris merupakan perpangkatan 2. (Anda perlu memeriksanya!)

Kita ingin menyatakan pengamatan-pengamatan ini dengan lebih tepat, lalu membuktikan bahwa semuanya benar. Setiap entri dalam Segitiga Pascal sebenarnya merupakan koefisien binomial. Angka 1 di puncak segitiga adalah $\binom{0}{0}$. Baris berikutnya (yang akan kita sebut baris 1, meskipun bukan baris paling atas) terdiri

atas $\binom{1}{0}$ dan $\binom{1}{1}$. Baris 4 (baris 1, 4, 6, 4, 1) terdiri atas koefisien-koefisien binomial

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}.$$

Berdasarkan deskripsi elemen-elemen Segitiga Pascal ini, kita dapat menuliskan kembali pengamatan di atas sebagai berikut:

1. $\binom{n}{0} = 1$ dan $\binom{n}{n} = 1$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Masing-masing merupakan contoh **identitas binomial** : identitas (yaitu persamaan) yang melibatkan koefisien binomial.

Tujuan kita adalah membuktikan identitas-identitas ini. Kita ingin membuktikan bahwa identitas tersebut berlaku untuk semua nilai n dan k. Pembuktian ini dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu pilihan adalah memberikan pembuktian aljabar dengan menggunakan rumus $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Berikut cara melakukannya untuk identitas kedua di atas.

Contoh 3.6.1

Berikan pembuktian aljabar untuk identitas binomial

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Penyelesaian.

Bukti. Berdasarkan definisi $\binom{n}{k}$, kita memiliki

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

dan

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}.$$

Jadi, dengan memulai dari ruas kanan persamaan:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!\,k!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!\,k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

Baris kedua (ketika penyebut bersama ditemukan) berlaku karena $k(k-1)! = k!$ dan $(n-k)(n-k-1)! = (n-k)!$. ■

Pembuktian ini tentu sah, tetapi sama sekali tidak berguna untuk menjelaskan alasannya. Meskipun Anda memahami pembuktian tersebut dengan sempurna, pembuktian itu tidak menjelaskan *mengapa* identitasnya benar. Pendekatan yang lebih baik adalah menjelaskan apa $\binom{n}{k}$ *artinya*, lalu menjelaskan mengapa hal itu juga merupakan makna $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Mari kita lihat penerapannya pada empat identitas yang kita amati di atas.

Contoh 3.6.2

Jelaskan mengapa $\binom{n}{0} = 1$ dan $\binom{n}{n} = 1$.

Penyelesaian. Apa yang dinyatakan oleh koefisien-koefisien binomial ini? $\binom{n}{0}$ memberikan banyaknya cara memilih 0 objek dari koleksi n objek. Hanya ada satu cara untuk melakukannya, yaitu tidak memilih objek apa pun. Jadi, $\binom{n}{0} = 1$. Demikian pula, $\binom{n}{n}$ memberikan banyaknya cara memilih n objek dari koleksi n objek. Hanya ada satu cara untuk melakukannya: pilih semua n objek. Jadi, $\binom{n}{n} = 1$.

Sebagai alternatif, kita mengetahui bahwa $\binom{n}{0}$ adalah banyaknya string n-bit berbobot 0. Hanya ada satu string seperti itu, yaitu string yang seluruhnya terdiri atas angka 0. Jadi, $\binom{n}{0} = 1$. Demikian pula, $\binom{n}{n}$ adalah banyaknya string n-bit berbobot n. Hanya ada satu string dengan sifat ini, yaitu string yang seluruhnya terdiri atas angka 1.

Cara lain: $\binom{n}{0}$ memberikan banyaknya subhimpunan berisi 0 elemen dari himpunan berukuran n. Hanya ada satu subhimpunan seperti itu, yaitu himpunan kosong. $\binom{n}{n}$ memberikan banyaknya subhimpunan yang memuat n elemen. Satu-satunya subhimpunan seperti itu adalah himpunan semula (yang berisi semua elemen).

Contoh 3.6.3

Jelaskan mengapa $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Penyelesaian. Cara termudah untuk melihatnya adalah dengan memperhatikan string bit. $\binom{n}{k}$ adalah banyaknya string bit berpanjang n yang memuat k angka 1. Di antara semua string tersebut, sebagian diawali dengan 1 dan sisanya diawali dengan 0. Pertama, perhatikan semua string bit yang diawali dengan 1. Setelah angka 1 tersebut, masih harus ada $n-1$ bit (agar panjang totalnya n), dan tepat $k-1$ di antaranya harus berupa angka 1 (karena kita sudah memiliki satu dan memerlukan total k). Ada berapa string seperti itu? Terdapat tepat $\binom{n-1}{k-1}$ string bit seperti itu. Jadi, di antara semua string bit berpanjang n yang memuat k angka 1, sebanyak $\binom{n-1}{k-1}$ diawali dengan 1. Demikian pula, terdapat $\binom{n-1}{k}$ string yang diawali dengan 0 (kita masih memerlukan $n-1$ bit dan sekarang k di antaranya harus berupa angka 1). Karena terdapat $\binom{n-1}{k}$ string bit yang terdiri atas $n-1$ bit dengan k angka 1, itulah banyaknya string bit berpanjang n dengan k angka 1 yang diawali dengan 0. Oleh karena itu, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Cara lain: perhatikan pertanyaan berikut. Ada berapa cara untuk memilih k taburan pizza dari menu yang menyediakan n pilihan? Salah satu cara menjawabnya langsung menghasilkan $\binom{n}{k}$. Cara lain untuk menjawab pertanyaan yang sama adalah terlebih dahulu memutuskan apakah Anda menginginkan ikan teri. Jika menginginkan ikan teri, Anda masih perlu memilih $k-1$ taburan, kini hanya dari $n-1$ pilihan. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{n-1}{k-1}$ cara. Jika tidak menginginkan ikan teri, Anda masih perlu memilih k taburan dari $n-1$ pilihan (ikan teri tidak lagi menjadi pilihan). Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{n-1}{k}$ cara. Karena pilihan dengan ikan teri saling lepas dari pilihan tanpa ikan teri, jumlah seluruh pilihan adalah $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Namun, tunggu sebentar. Kita telah menjawab pertanyaan yang sama dengan dua cara berbeda, sehingga kedua jawabannya harus sama. Jadi, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Anda juga dapat menjelaskan (membuktikan) identitas ini dengan mencacah subhimpunan atau bahkan lintasan kisi.

Contoh 3.6.4

Buktikan identitas binomial $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Penyelesaian. Mengapa ini benar? $\binom{n}{k}$ menghitung banyaknya cara memilih k benda dari n pilihan. Di pihak lain, $\binom{n}{n-k}$ menghitung banyaknya cara memilih $n-k$ benda dari n pilihan. Apakah keduanya benar-benar sama? Bagaimana jika, alih-alih memilih $n-k$ benda untuk disertakan, Anda memilihnya untuk dikecualikan? Ada berapa cara untuk memilih $n-k$ benda yang akan dikecualikan dari n pilihan? Jelas jawabannya juga $\binom{n}{n-k}$ (setelah benda-bendanya dipilih, tidak penting apakah Anda menyertakan atau mengecualikannya). Jika Anda mengecualikan $n-k$ benda, Anda

menyertakan k benda lainnya. Jadi, himpunan hasilnya sama.

Mari kita gunakan contoh pencacahan pizza seperti di atas. Ada berapa cara untuk memilih k taburan dari daftar n pilihan? Di satu pihak, jawabannya langsung $\binom{n}{k}$. Sebagai alternatif, Anda dapat membuat daftar semua taburan yang tidak Anda inginkan. Agar memperoleh pizza dengan tepat k taburan, Anda perlu memilih $n-k$ taburan yang tidak akan diletakkan di atas pizza. Terdapat $\binom{n}{n-k}$ pilihan untuk taburan yang tidak Anda inginkan. Kedua cara tersebut menghasilkan pizza dengan k taburan, bahkan mencakup semua cara memperoleh pizza dengan k taburan. Jadi, kedua jawaban ini harus sama: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Anda juga dapat membuktikan (menjelaskan) identitas ini dengan menggunakan string bit, subhimpunan, atau lintasan kisi. Argumen string bit cukup menarik: $\binom{n}{k}$ menghitung banyaknya string bit berpanjang n dengan k angka 1. Ini juga merupakan banyaknya string bit berpanjang n dengan k angka 0 (cukup ganti setiap angka 1 dengan 0 dan setiap angka 0 dengan 1). Namun, jika string berpanjang n memiliki k angka 0, string itu harus memiliki $n-k$ angka 1. Terdapat tepat $\binom{n}{n-k}$ string berpanjang n dengan $n-k$ angka 1.

Contoh 3.6.5

Buktikan identitas binomial $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Penyelesaian. Mari kita kembali melakukan "pembuktian pizza". Kita perlu menemukan pertanyaan tentang taburan pizza yang jawabannya 2^n. Bagaimana dengan pertanyaan ini: jika sebuah kedai pizza menawarkan n taburan, ada berapa pizza yang dapat Anda buat dengan menggunakan sembarang banyak taburan, mulai dari tanpa taburan hingga semua taburan, dan menggunakan setiap taburan paling banyak sekali?

Di satu pihak, jawabannya adalah 2^n. Untuk setiap taburan, Anda dapat mengatakan "ya" atau "tidak", sehingga Anda memiliki dua pilihan untuk setiap taburan.

Di pihak lain, bagi semua pizza yang mungkin menjadi kelompok-kelompok saling lepas: pizza tanpa taburan, pizza dengan satu taburan, pizza dengan dua taburan, dan seterusnya. Jika kita tidak menginginkan taburan, hanya ada satu pizza seperti itu (pizza kosong, boleh dikatakan demikian), tetapi bilangan itu lebih baik dipandang sebagai $\binom{n}{0}$ karena kita memilih 0 dari n taburan. Ada berapa pizza yang memiliki 1 taburan? Kita perlu memilih 1 dari n taburan, sehingga banyaknya adalah $\binom{n}{1}$. Kita memperoleh:

- Pizza dengan 0 taburan: $\binom{n}{0}$
- Pizza dengan 1 taburan: $\binom{n}{1}$
- Pizza dengan 2 taburan: $\binom{n}{2}$

- ⋮
- Pizza dengan n taburan: $\binom{n}{n}$.

Jumlah seluruh pizza yang mungkin adalah penjumlahan bilangan-bilangan ini, yang tepat sama dengan ruas kiri identitas yang sedang kita buktikan.

Sekali lagi, kita dapat membuktikan identitas ini dengan menggunakan subhimpunan, string bit, atau lintasan kisi (meskipun argumen lintasan kisi sedikit rumit).

Semoga uraian ini memberi gambaran tentang cara menyusun pembuktian yang menjelaskan identitas binomial. Perlu ditekankan bahwa pembuktian yang lebih tradisional juga dapat indah.[4] Sebagai contoh, perhatikan pembuktian ringkas berikut untuk identitas terakhir.

Jabarkan binomial $(x + y)^n$:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Ambil $x = 1$ dan $y = 1$. Kita memperoleh:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n.$$

Tentu saja, ini menyederhana menjadi:

$$(2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Hal menarik untuk dicoba: ambil $x = 1$ dan $y = 2$. Menarik, bukan?

3.6.3 Pembuktian Lainnya

Pembuktian yang bersifat menjelaskan dalam contoh-contoh di atas biasanya disebut **pembuktian kombinatorial**. Secara umum, untuk memberikan pembuktian kombinatorial bagi identitas binomial, misalnya $A = B$, lakukan langkah-langkah berikut:

1. Temukan masalah pencacahan yang dapat Anda jawab dengan dua cara.
2. Jelaskan mengapa salah satu jawaban untuk masalah pencacahan tersebut adalah A.
3. Jelaskan mengapa jawaban lain untuk masalah pencacahan tersebut adalah B.

[4] Hampir setiap identitas binomial dapat dibuktikan dengan induksi matematika menggunakan definisi rekursif $\binom{n}{k}$. Kita akan membahas induksi dalam Subbab 4.5.

Karena A dan B sama-sama merupakan jawaban untuk pertanyaan yang sama, haruslah $A = B$.

Bagian yang rumit adalah menemukan pertanyaannya. Hal ini tidak selalu jelas, tetapi akan semakin mudah seiring bertambahnya masalah pencacahan yang Anda selesaikan. Anda akan mulai mengenali jenis jawaban sebagai jawaban bagi jenis pertanyaan tertentu. Yang lebih sering terjadi adalah Anda sedang menyelesaikan suatu masalah pencacahan dan kebetulan memikirkan dua cara berbeda untuk menemukan jawabannya. Kini Anda memiliki identitas binomial, dan pembuktiannya sudah tersedia. Pembuktian tersebut *adalah* masalah yang baru saja Anda selesaikan beserta kedua solusinya.

Sebagai contoh, perhatikan pertanyaan pencacahan berikut:

> Ada berapa kata 10 huruf yang menggunakan tepat empat A, tiga B, dua C, dan satu D?

Mari kita mencoba menyelesaikan masalah ini. Kita memiliki 10 posisi untuk ditempati huruf. Empat di antaranya harus ditempati A. Kita dapat memilih empat posisi A dalam $\binom{10}{4}$ cara. Sekarang, di mana kita dapat menempatkan B? Hanya tersisa 6 posisi, dan kita perlu memilih 3 di antaranya. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{6}{3}$ cara. Kedua C harus ditempatkan pada dua dari 3 posisi yang tersisa, sehingga kita memiliki $\binom{3}{2}$ cara untuk melakukannya. Dengan demikian, hanya tersisa satu posisi untuk D, tetapi pilihan tunggal itu dapat kita tuliskan sebagai $\binom{1}{1}$. Jadi, jawabannya adalah:

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}.$$

Namun, mengapa berhenti sampai di situ? Kita juga dapat menemukan jawabannya dengan cara lain. Pertama, mari kita tentukan tempat untuk satu D: kita memiliki 10 posisi dan perlu memilih 1 di antaranya, sehingga hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{10}{1}$ cara. Berikutnya, pilih salah satu dari $\binom{9}{2}$ cara menempatkan kedua C. Kini tersisa 7 posisi, dan tiga di antaranya harus diisi dengan B. Terdapat $\binom{7}{3}$ cara untuk melakukannya. Terakhir, A dapat ditempatkan dalam $\binom{4}{4}$ cara (yaitu hanya satu cara). Jadi, jawaban lain untuk pertanyaan tersebut adalah

$$\binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4}.$$

Menarik. Hal ini memberi kita identitas binomial:

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4}.$$

Berikut beberapa identitas binomial lain beserta pembuktian kombinatorialnya.

Contoh 3.6.6

Buktikan identitas

$$1n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n1 = \binom{n+2}{3}.$$

Penyelesaian. Untuk memberikan pembuktian kombinatorial, kita perlu memikirkan pertanyaan yang dapat dijawab dengan dua cara: satu cara harus menghasilkan ruas kiri identitas, sedangkan cara lainnya harus menghasilkan ruas kanannya. Petunjuk untuk menentukan pertanyaan berasal dari ruas kanan: $\binom{n+2}{3}$ menghitung banyaknya cara memilih 3 benda dari kelompok $n+2$ benda. Mari namai benda-benda itu $1, 2, 3, \ldots, n+2$. Dengan kata lain, kita ingin menemukan subhimpunan 3-elemen dari bilangan-bilangan tersebut (karena urutan tidak penting, subhimpunan merupakan objek yang tepat untuk dipertimbangkan). Kita perlu sedikit cerdik untuk menjelaskan mengapa ruas kiri juga memberikan banyaknya subhimpunan ini. Berikut pembuktiannya.

Bukti. Perhatikan pertanyaan "Ada berapa subhimpunan 3-elemen dari himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, n+2\}$?" Kita menjawabnya dengan dua cara:

Jawaban 1: Kita harus memilih 3 elemen dari koleksi $n+2$ elemen. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{n+2}{3}$ cara.

Jawaban 2: Bagi masalah ini menjadi kasus-kasus berdasarkan bilangan tengah dalam subhimpunan. Misalkan setiap subhimpunan ditulis sebagai $\{a, b, c\}$ dalam urutan menaik. Kita menghitung banyaknya subhimpunan untuk setiap nilai b yang berbeda. Nilai terkecil yang mungkin bagi b adalah 2, sedangkan yang terbesar adalah $n+1$.

Ketika $b = 2$, terdapat $1 \cdot n$ subhimpunan: 1 pilihan untuk a dan n pilihan (3 hingga $n+2$) untuk c.

Ketika $b = 3$, terdapat $2 \cdot (n-1)$ subhimpunan: 2 pilihan untuk a dan $n-1$ pilihan untuk c.

Ketika $b = 4$, terdapat $3 \cdot (n-2)$ subhimpunan: 3 pilihan untuk a dan $n-2$ pilihan untuk c.

Demikian seterusnya. Ketika $b = n+1$, terdapat n pilihan untuk a dan hanya 1 pilihan untuk c, sehingga terdapat $n \cdot 1$ subhimpunan.

Oleh karena itu, jumlah seluruh subhimpunan adalah

$$1n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n1.$$

Karena Jawaban 1 dan Jawaban 2 menjawab pertanyaan yang sama, keduanya harus sama. Oleh karena itu,

$$1n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n1 = \binom{n+2}{3}.$$

■

Contoh 3.6.7

Buktikan identitas binomial

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Penyelesaian. Kita akan memberikan dua pembuktian berbeda untuk fakta ini. Pembuktian pertama sangat mirip dengan contoh sebelumnya (mencacah subhimpunan). Pembuktian kedua sedikit lebih ringkas dan menggunakan lintasan kisi.

Bukti. Perhatikan pertanyaan berikut: "Ada berapa pizza yang dapat Anda buat dengan menggunakan n taburan jika tersedia $2n$ taburan untuk dipilih?"

Jawaban 1: Terdapat $2n$ taburan, dan Anda harus memilih n di antaranya. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{2n}{n}$ cara.

Jawaban 2: Bagi taburan menjadi dua kelompok yang masing-masing berisi n taburan (misalnya n daging dan n sayuran). Setiap pilihan n taburan harus mencakup sejumlah taburan dari kelompok pertama dan sejumlah taburan dari kelompok kedua. Perhatikan setiap kemungkinan banyaknya taburan daging secara terpisah:

0 daging: $\binom{n}{0}\binom{n}{n}$, karena Anda perlu memilih 0 dari n daging dan n dari n sayuran.

1 daging: $\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}$, karena Anda memerlukan 1 dari n daging sehingga perlu memilih $n-1$ dari n sayuran.

2 daging: $\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}$. Pilih 2 daging dan $n-2$ taburan sisanya dari n sayuran.

Demikian seterusnya. Kasus terakhir adalah n daging, yang dapat dipilih dalam $\binom{n}{n}\binom{n}{0}$ cara.

Jadi, jumlah seluruh pizza yang mungkin adalah

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Bentuk ini belum tepat sama dengan ruas kiri .... Perhatikan bahwa $\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$ dan $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$, dan seterusnya, berdasarkan identitas dalam Contoh 3.6.4. Jadi, kita memang memperoleh

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Karena kedua jawaban ini menjawab pertanyaan yang sama, keduanya harus sama, sehingga

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

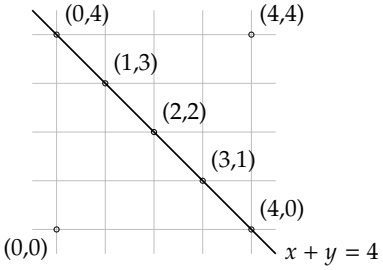
■

Untuk pembuktian alternatif, kita menggunakan lintasan kisi. Hal ini wajar dipertimbangkan karena ruas kanan identitas mengingatkan kita pada banyaknya lintasan dari $(0,0)$ ke (n,n).

Bukti. Perhatikan pertanyaan: ada berapa lintasan kisi dari $(0,0)$ ke (n,n)?

Jawaban 1: Kita harus menempuh $2n$ langkah, dan n di antaranya harus mengarah ke atas. Jadi, terdapat $\binom{2n}{n}$ lintasan.

Jawaban 2: Perhatikan bahwa setiap lintasan dari $(0,0)$ ke (n,n) harus memotong garis $x+y=n$. Artinya, setiap lintasan harus melalui tepat satu di antara titik-titik berikut: $(0,n)$, $(1,n-1)$, $(2,n-2)$, $\ldots$, $(n,0)$. Sebagai contoh, berikut yang terjadi pada kasus $n=4$:



Ada berapa lintasan yang melalui $(0,n)$? Untuk mencapai titik tersebut, Anda harus menempuh n satuan, dan 0 di antaranya mengarah ke kanan, sehingga terdapat $\binom{n}{0}$ cara untuk mencapai $(0,n)$. Perjalanan dari $(0,n)$ ke (n,n) memerlukan n langkah, dan 0 di antaranya mengarah ke atas. Jadi, terdapat $\binom{n}{0}$ cara untuk bergerak dari $(0,n)$ ke (n,n). Oleh karena itu, terdapat $\binom{n}{0}\binom{n}{0}$ lintasan dari $(0,0)$ ke (n,n) yang melalui titik $(0,n)$.

Bagaimana dengan lintasan yang melalui $(1,n-1)$? Terdapat $\binom{n}{1}$ lintasan untuk mencapai titik tersebut (n langkah, 1 ke kanan) dan $\binom{n}{1}$ lintasan untuk menyelesaikan perjalanan ke (n,n) (n langkah, 1 ke atas). Jadi, terdapat $\binom{n}{1}\binom{n}{1}$ lintasan dari $(0,0)$ ke (n,n) yang melalui $(1,n-1)$.

Secara umum, untuk mencapai (n,n) melalui titik $(k,n-k)$, kita memiliki $\binom{n}{k}$ lintasan menuju titik tengah tersebut, lalu $\binom{n}{k}$ lintasan dari titik tengah ke (n,n). Jadi, terdapat $\binom{n}{k}\binom{n}{k}$ lintasan dari $(0,0)$ ke (n,n) yang melalui $(k,n-k)$.

Dengan demikian, jumlah seluruh lintasan dari $(0,0)$ ke (n,n) yang melalui tepat satu dari titik-titik tengah ini adalah

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2.$$

Karena kedua jawaban ini menjawab pertanyaan yang sama, keduanya harus sama, sehingga

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

■

3.6.4 Pertanyaan Bacaan

1. Manakah di antara pilihan berikut yang mendeskripsikan strategi umum pembuktian kombinatorial?

A. Ajukan pertanyaan pencacahan yang dapat dijawab dengan dua cara (dan jawablah pertanyaan itu).

B. Ajukan dua pertanyaan pencacahan yang keduanya dapat dijawab dengan cara yang sama (dan jawablah kedua pertanyaan itu).

C. Sederhanakan ekspresi aljabar pada setiap ruas identitas kombinatorial.

D. Anggap identitas gagal berlaku untuk suatu nilai terkecil, lalu peroleh kontradiksi dengan memperhatikan nilai yang lebih kecil.

2. Tuliskan pertanyaan pencacahan yang dapat Anda gunakan untuk membuktikan identitas:

$$\binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}.$$

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang membuat Anda ingin tahu.

3.6.5 Soal Latihan

1. Buatlah pembuktian kombinatorial untuk identitas $10 + 10 = 2 \cdot 10$.

- Salah satu:
  Perhatikan pertanyaan, "Ada berapa bilangan dua digit yang diawali dengan 3 atau 4?"
  Atau:
  Perhatikan pertanyaan, "Ada berapa pizza dengan 2 taburan yang dapat Anda buat dengan memilih dari 10 taburan?"
- Cara pertama untuk menjawab pertanyaan ini menghasilkan $10 + 10$.
- Salah satu:
  Hal ini karena terdapat 10 bilangan yang diawali dengan 3 dan 10 bilangan lainnya yang diawali dengan 4.
  Atau:
  Hal ini karena terdapat 10 pilihan untuk taburan pertama dan 10 pilihan untuk taburan kedua.
- Jawaban kedua untuk pertanyaan tersebut adalah $2 \cdot 10$.
- Salah satu:
  Hal ini karena Anda memiliki 2 pilihan untuk digit pertama dan 10 pilihan untuk digit kedua.

Atau:

Hal ini karena Anda harus memilih 2 taburan yang identik atau dua taburan yang berbeda.

- Karena kedua ekspresi menjawab pertanyaan yang sama, keduanya harus sama. Jadi, $10 + 10 = 2 \cdot 10$.

2. Jika Anda diminta memberikan pembuktian kombinatorial untuk identitas $\binom{n}{2}\binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{2}$, manakah di antara pertanyaan berikut yang layak digunakan?

A. Ada berapa cara untuk memilih 2 rasa es krim dari n pilihan dan k taburan untuk sundae Anda?

B. Ada berapa cara untuk memilih k dasi kupu-kupu yang akan dimasukkan ke bagasi tercatat dan 2 dasi kupu-kupu lainnya yang akan dimasukkan ke bagasi kabin, dari koleksi n dasi kupu-kupu?

C. Ada n siswa dalam Klub Matematika. Ada berapa cara untuk memilih suatu subhimpunan berukuran 2 atau k yang akan menjalankan penggalangan dana musim gugur?

D. Dari kelas yang terdiri atas n siswa, ada berapa cara untuk memilih 2 siswa sebagai pengawas dan k siswa lainnya sebagai anggota panitia perencana pesta?

3.6.6 Latihan Tambahan

1. Berikan pembuktian kombinatorial untuk identitas $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$.

2. Misalkan Anda memiliki x fez dan y dasi kupu-kupu. Tentu saja, x dan y keduanya lebih besar dari 1.

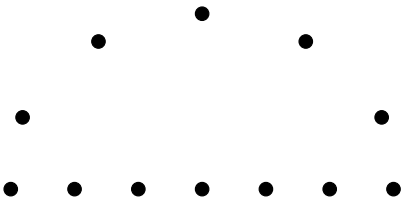
(a) Ada berapa kombinasi fez dan dasi kupu-kupu yang dapat Anda buat? Anda hanya dapat mengenakan satu fez dan satu dasi kupu-kupu pada satu waktu. Jelaskan.

(b) Jelaskan mengapa jawabannya *juga* $\binom{x+y}{2} - \binom{x}{2} - \binom{y}{2}$. (Jika ini adalah jawaban yang Anda berikan pada bagian (a), cobalah lagi.)

(c) Gunakan jawaban Anda pada bagian (a) dan (b) untuk memberikan pembuktian kombinatorial bagi identitas

$$\binom{x+y}{2} - \binom{x}{2} - \binom{y}{2} = xy.$$

3. Ada berapa segitiga yang dapat Anda gambar dengan menggunakan titik-titik di bawah ini sebagai simpul?

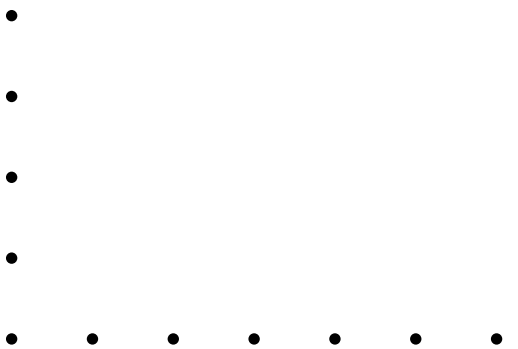


(a) Temukan ekspresi untuk jawaban yang berupa jumlah tiga suku yang melibatkan koefisien binomial.

(b) Temukan ekspresi untuk jawaban yang berupa selisih dua koefisien binomial.

(c) Generalisasikan hasil di atas untuk menyatakan dan membuktikan suatu identitas binomial dengan pembuktian kombinatorial. Misalkan Anda memiliki x titik pada sumbu horizontal dan y titik pada setengah lingkaran.

4. Perhatikan semua segitiga yang dapat Anda buat dengan menggunakan titik-titik di bawah ini sebagai simpul. Perhatikan bahwa kita tidak mengizinkan segitiga degenerat (yang ketiga simpulnya berada pada garis yang sama), tetapi kita mengizinkan segitiga yang bukan segitiga siku-siku.



(a) Tentukan banyaknya segitiga, dan jelaskan mengapa jawaban Anda benar.

(b) Tentukan kembali banyaknya segitiga dengan menggunakan metode yang berbeda. Jelaskan mengapa metode baru Anda berhasil.

(c) Nyatakan identitas binomial yang dibuktikan oleh kedua jawaban Anda di atas (yaitu, berikan identitas binomial yang dibuktikan oleh kedua jawaban tersebut). Kemudian generalisasikan dengan menggunakan m dan n.

5. Seorang perempuan akan menikah. Ia memiliki 15 sahabat, tetapi hanya dapat memilih 6 di antaranya sebagai pengiring pengantin, dan salah seorang di antaranya harus menjadi pengiring pengantin utama. Ada berapa cara untuk melakukannya?

(a) Bagaimana jika ia terlebih dahulu memilih 6 pengiring pengantin, lalu memilih salah seorang di antaranya sebagai pengiring pengantin utama?

(b) Bagaimana jika ia terlebih dahulu memilih pengiring pengantin utama, lalu 5 pengiring pengantin lainnya?

(c) Jelaskan mengapa $6\binom{15}{6} = 15\binom{14}{5}$.

6. Perhatikan identitas berikut:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(a) Apakah identitas ini benar? Cobalah untuk beberapa nilai n dan k.

(b) Gunakan rumus $\binom{n}{k}$ untuk memberikan pembuktian aljabar bagi identitas tersebut.

(c) Berikan pembuktian kombinatorial bagi identitas tersebut.

7. Berikan pembuktian kombinatorial bagi identitas $\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k}\binom{k}{2}$.

8. Perhatikan identitas binomial

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

(a) Berikan pembuktian kombinatorial bagi identitas ini. Petunjuk: Bagaimana jika sejumlah orang dari kelompok beranggotakan n orang ingin pergi ke ruang teka-teki, dan salah seorang yang pergi harus menjadi kapten tim?

(b) Berikan pembuktian alternatif dengan menjabarkan $(1 + x)^n$ dan menurunkan kedua ruas.

9. Berikan pembuktian kombinatorial bagi identitas $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$.

10. Perhatikan string bit dalam $\mathbf{B}_2^6$ (string bit berpanjang 6 dan berbobot 2).

(a) Ada berapa string bit tersebut yang diawali dengan 1?

(b) Ada berapa string bit tersebut yang diawali dengan 01?

(c) Ada berapa string bit tersebut yang diawali dengan 001?

(d) Apakah ada string lain yang belum kita hitung? String mana saja, dan ada berapa?

(e) Berapa jumlah seluruh string bit dalam $\mathbf{B}_2^6$?

(f) Identitas binomial apa yang baru saja Anda buktikan secara kombinatorial?

11. Mari kita menghitung string digit **terner**, yaitu string yang setiap digitnya dapat berupa 0, 1, atau 2.

(a) Ada berapa string digit terner yang memuat tepat n digit?

(b) Ada berapa string digit terner yang memuat tepat n digit dan n angka 2?

(c) Ada berapa string digit terner yang memuat tepat n digit dan $n-1$ angka 2? (Petunjuk: Di mana Anda dapat menempatkan digit yang bukan 2, dan nilai apa yang dapat dimilikinya?)

(d) Ada berapa string digit terner yang memuat tepat n digit dan $n-2$ angka 2? (Petunjuk: Lihat petunjuk sebelumnya.)

(e) Ada berapa string digit terner yang memuat tepat n digit dan $n-k$ angka 2?

(f) Ada berapa string digit terner yang memuat tepat n digit dan tidak memuat angka 2? (Petunjuk: String jenis apa ini?)

(g) Gunakan bagian-bagian di atas untuk memberikan pembuktian kombinatorial bagi identitas

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 2^3\binom{n}{3} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n.$$

12. Ada berapa cara untuk menyusun ulang huruf-huruf dalam kata "rearrange"? Jawab pertanyaan ini dengan sedikitnya dua cara berbeda untuk membuktikan suatu identitas binomial.

13. Buktikan identitas di bawah ini dengan pembuktian kombinatorial.

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = \binom{n+3}{5}.$$

14. Dalam Contoh 3.6.5 kita telah membuktikan bahwa jumlah sembarang baris dalam Segitiga Pascal merupakan perpangkatan dua. Secara khusus,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Argumen yang diberikan di sana menggunakan pertanyaan pencacahan, "Ada berapa pizza yang dapat Anda buat dengan menggunakan sembarang banyak dari n taburan berbeda?" Untuk berlatih, berikan pembuktian baru bagi identitas ini dengan menggunakan pertanyaan yang berbeda.

(a) Gunakan pertanyaan tentang pencacahan subhimpunan.

(b) Gunakan pertanyaan tentang pencacahan string bit.

(c) Gunakan pertanyaan tentang pencacahan lintasan kisi.

15.

(a) Pemenang Piala Stanley ditentukan melalui seri terbaik dari 7 pertandingan antara dua tim. Ada berapa cara tim Anda dapat menang? Mari kita jawab pertanyaan ini dengan dua cara:

i. Berapa dari 7 pertandingan yang harus dimenangi tim Anda? Ada berapa cara hal ini dapat terjadi?

ii. Bagaimana jika seri berlangsung hingga seluruh 7 pertandingan? Berarti Anda memenangi pertandingan terakhir. Ada berapa kemungkinan hasil untuk 6 pertandingan pertama?

iii. Bagaimana jika seri hanya berlangsung 6 pertandingan? Ada berapa cara hal ini dapat terjadi? Bagaimana jika 5 pertandingan? 4 pertandingan?

iv. Apa dua cara berbeda untuk menghitung banyaknya cara tim Anda dapat menang? Tuliskan persamaan yang melibatkan koefisien binomial (yaitu $\binom{n}{k}$). Pola apa dalam Segitiga Pascal yang dicontohkan oleh persamaan ini?

(b) Generalisasikan. Bagaimana jika aturannya berubah dan Anda memainkan seri terbaik dari 9 pertandingan (memerlukan 5 kemenangan)? Bagaimana jika Anda memainkan seri n pertandingan dengan k kemenangan yang diperlukan untuk menjadi juara?

16. Misalkan $k_1, k_2, \ldots, k_j$ merupakan daftar bilangan bulat positif yang jumlahnya n (yaitu, $\sum_{i=1}^{j} k_i = n$). Gunakan dua graf yang memuat n simpul untuk menjelaskan mengapa

$$\sum_{i=1}^{j} \binom{k_i}{2} \leq \binom{n}{2}.$$

3.7 Penerapan pada Peluang

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menggunakan teknik pencacahan untuk menghitung peluang kejadian.
2. Memahami aturan-aturan dasar peluang.
3. Menghitung peluang kejadian majemuk, baik yang saling bebas maupun yang saling bergantung.

3.7.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Misalkan Anda, seperti bangsawan Prancis abad ke-17 Chevalier de Mere, gemar berjudi berdasarkan hasil pelemparan dadu bersisi 6 yang adil (masing-masing bernomor 1 sampai 6). Bersediakah Anda bertaruh bahwa ia tidak akan memperoleh sedikitnya satu angka 6 dalam empat kali pelemparan satu dadu? Bagaimana jika Anda bertaruh bahwa ia tidak akan memperoleh sedikitnya satu pasangan angka 6 dalam 24 kali pelemparan dua dadu?

Untuk membuat keputusan ini, kita perlu menentukan

1. Seberapa besar peluang munculnya sedikitnya satu angka 6 dalam empat kali pelemparan satu dadu?
2. Seberapa besar peluang munculnya sedikitnya satu pasangan angka 6 dalam 24 kali pelemparan dua dadu?
3. Karena rasio 4 : 6 sama dengan rasio 24 : 36, apakah peluang kedua kejadian ini seharusnya sama? Itulah yang dipikirkan Chevalier de Mere. Apakah Anda sependapat?

Berikut sebuah skrip Python yang dapat membantu Anda memperoleh gambaran tentang pertanyaan-pertanyaan di atas. Anda dapat beralih di antara kedua pertanyaan dengan menjadikan baris yang sesuai sebagai komentar atau mengaktifkannya kembali (baris yang diawali # adalah komentar). Cobalah dan lihat seberapa beruntung Anda!

```
import random

for i in range(4):
    die = random.randint(1,6)
    print(f"Anda memperoleh angka {die}")

#for i in range(24):
#    die1 = random.randint(1,6)
#    die2 = random.randint(1,6)
#    print(f"Anda memperoleh angka {die1} dan {die2}")
```

Jika Anda memahami sedikit Python, Anda mungkin ingin mengubah skrip tersebut untuk menjalankan percobaan 1000 kali dan melihat berapa banyak di antaranya yang merupakan "kemenangan".

Kita dapat memperoleh pemahaman tentang peluang secara *empiris* dengan mengamati seberapa sering suatu kejadian terjadi ketika sebuah percobaan diulang berkali-kali. Seperti yang dialami Chevalier de Mere, intuisi kita tentang peluang sering kali tidak sepenuhnya tepat. Dengan menggunakan teknik pencacahan yang telah kita pelajari, kita dapat menjelaskan mengapa intuisi tersebut keliru dan menentukan peluang yang sebenarnya.

Sebagian besar pertanyaan pencacahan yang telah kita bahas dalam bab ini juga dapat diajukan sebagai pertanyaan tentang peluang. Sebagai contoh: Berapa banyak kata sandi sepanjang 8 karakter yang dapat dibuat hanya dengan huruf kecil? Berapa peluang bahwa pemilihan 8 huruf kecil secara acak menghasilkan kata sandi Anda?

Meskipun kajian peluang sangat luas dan kompleks, dasar-dasar peluang diskret pada hakikatnya tidak lebih dari pencacahan. Karena itu, di sini kita akan meninjau secara singkat bagaimana pencacahan dapat membantu kita memahami peluang.

Kegiatan Pratinjau

Misalkan Anda berada di kelas yang terdiri atas 30 mahasiswa. Seberapa besar peluang bahwa sedikitnya dua mahasiswa lahir pada tanggal yang sama dalam setahun?

Anggaplah setiap tanggal memiliki peluang yang sama dan tidak ada seorang pun yang lahir pada 29 Februari. Apakah menurut Anda jawabannya lebih dari 25%? Lebih dari 50%? Lebih dari 70%? Mari kita cari jawabannya.

1. Pertama, apa yang kita maksud dengan peluang? Jika Anda melempar dadu bersisi enam yang adil, berapa peluang memperoleh angka 6?
Berapa peluang memperoleh bilangan genap?

2. Kita akan mendefinisikan peluang suatu kejadian sebagai banyaknya cara kejadian itu dapat terjadi dibagi dengan banyaknya seluruh hasil yang mungkin terjadi.

(a) Misalkan Anda melempar dua dadu (satu merah dan satu hijau). Berapa banyak seluruh hasil yang mungkin?

(b) Di antara hasil-hasil tersebut, berapa banyak yang menunjukkan angka *berbeda* pada kedua dadu?

Petunjuk. Berapa banyak barisan dua bilangan berbeda yang dapat Anda buat dengan menggunakan bilangan 1 sampai 6?

(c) Dengan menggabungkan kedua bilangan yang Anda temukan di atas, berapa peluang bahwa kedua dadu menunjukkan angka yang berbeda?

(d) Berapa peluang memperoleh tiga angka yang berbeda ketika melempar tiga dadu? (Anggaplah ketiga dadu memiliki warna yang berbeda.)

3. Sekarang kita beralih ke ulang tahun. Dalam setahun terdapat 365 hari.

(a) Berapa banyak barisan 30 tanggal lahir yang mungkin?

(b) Berapa banyak barisan 30 tanggal lahir yang tidak memuat pengulangan?

(c) Berapa peluang bahwa 30 orang memiliki tanggal lahir yang semuanya berbeda?

(d) Di antara 30 orang tersebut, semua tanggal lahir mereka berbeda atau sedikitnya dua orang memiliki tanggal lahir yang sama. Karena salah satu di antara kedua kemungkinan ini pasti terjadi, peluangnya adalah 1. Jadi, berapa peluang bahwa sedikitnya dua dari 30 orang tersebut memiliki tanggal lahir yang sama?

(e) Berapa banyak orang paling sedikit yang diperlukan agar peluang sedikitnya dua orang memiliki tanggal lahir yang sama lebih besar dari 90%?

3.7.2 Menghitung Peluang

Pikirkan bagaimana kita menggunakan bahasa peluang dalam kehidupan sehari-hari. Kita mungkin mengatakan bahwa pelemparan sebuah koin memiliki peluang 50% menghasilkan sisi kepala. Atau bahwa ketika melempar dua dadu, jumlah 7 lebih mungkin diperoleh daripada jumlah 2. Kasino tentu mengandalkan kenyataan bahwa pasangan kartu tertentu secara konsisten lebih mungkin muncul daripada pasangan lainnya ketika menetapkan pembayaran dalam Blackjack. Semua ini mengandaikan adanya unsur *keacakan* dalam suatu kejadian dan, bahkan di tengah keacakan itu, adanya *keteraturan* tertentu pada apa yang mungkin terjadi. Kita akan menggunakan model kenyataan ini.

Proses yang dapat kita beri nilai peluang disebut **percobaan acak**. Percobaan semacam itu dapat memiliki berbagai **hasil** yang mungkin. Kita menyebut *himpunan berhingga* semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan acak sebagai **ruang sampel** (biasanya himpunan ini kita nyatakan dengan S). Menurut definisi, pelaksanaan suatu percobaan acak selalu menghasilkan tepat satu hasil dari ruang sampel.

Di seluruh bagian ini, kita selalu mengasumsikan **distribusi peluang seragam**, yang berarti bahwa setiap hasil dalam ruang sampel memiliki peluang yang sama. Dengan demikian, peluang setiap hasil tertentu dalam ruang sampel S tepat sama

dengan $\frac{1}{|S|}$.

Keterangan 3.7.1 Distribusi peluang seragam merupakan asumsi yang umum dan masuk akal, tetapi asumsi ini membuat beberapa pertanyaan tidak dapat kita ajukan. Sebagai contoh, lemparan anak panah ke papan sasaran tidak berdistribusi seragam; begitu pula pelemparan dadu berbobot. Berapa peluang sebuah paku payung jatuh dengan ujung runcing menghadap ke atas? Bagaimana kita dapat mulai menjawab pertanyaan seperti ini? Kita harus membuat sejumlah asumsi tentang peluang sebenarnya dari setiap hasil (mungkin berdasarkan percobaan yang diulang berkali-kali).

Ada berbagai alasan lain untuk mempelajari distribusi peluang yang berbeda-beda, dan hal ini merupakan topik utama dalam mata kuliah teori peluang.

Contoh 3.7.2

Misalkan Anda melempar dua koin yang adil (koin satu sen dan lima sen). Apa ruang sampel dari hasil-hasil yang mungkin? Berapa peluang memperoleh dua sisi kepala?

Penyelesaian. Ruang sampel adalah himpunan semua hasil percobaan yang mungkin, yang dalam kasus ini ialah $\{HH, HT, TH, TT\}$, dengan H menyatakan sisi kepala dan T menyatakan sisi ekor. Dengan demikian, peluang memperoleh dua sisi kepala adalah $\frac{1}{4}$. Bahkan, setiap hasil memiliki peluang $\frac{1}{4}$ karena ruang sampelnya memuat 4 hasil.

Menentukan peluang suatu *hasil* memang semudah ini. Hal-hal menjadi lebih menarik ketika kita mencari peluang suatu **kejadian**, yaitu sebuah himpunan bagian dari ruang sampel. Untuk suatu percobaan acak tertentu, kita dapat menanyakan berbagai kejadian, dan kejadian-kejadian itu tidak harus saling lepas. Suatu kejadian juga dapat berupa himpunan yang hanya memuat satu hasil atau bahkan tidak memuat hasil apa pun.

Sebagai contoh, misalkan Anda melempar dadu bersisi 6 yang adil. Ruang sampelnya memuat enam hasil, yaitu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Beberapa kejadian yang mungkin kita perhatikan meliputi memperoleh bilangan genap (himpunan bagian $\{2, 4, 6\}$), memperoleh bilangan yang kurang dari 3 (himpunan $\{1, 2\}$), atau memperoleh bilangan yang kurang dari 10 (himpunan bagian $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Kita sekarang mengetahui bahwa tepat ada $2^6 = 64$ kejadian berbeda yang dapat ditanyakan, karena ruang sampel memiliki 64 himpunan bagian.

Apa yang disiratkan intuisi kita tentang kejadian-kejadian di atas? Memperoleh bilangan genap seharusnya sama mungkin dengan memperoleh bilangan ganjil, sehingga kita berharap peluang memperoleh bilangan genap adalah $\frac{1}{2}$. Demikian pula, peluang memperoleh bilangan yang kurang dari 3 seharusnya $\frac{1}{3}$ karena sepertiga hasil yang mungkin bernilai kurang dari 3. Bagaimana dengan memperoleh

bilangan yang kurang dari 10? Hal ini *pasti* terjadi, sehingga peluangnya 100%, yang dalam bentuk pecahan sama dengan 1.

Sesuai dengan intuisi tersebut, kita mendefinisikan peluang suatu kejadian sebagai berikut.

Definisi 3.7.3

Misalkan suatu percobaan acak memiliki ruang sampel S. **Peluang** kejadian E adalah banyaknya hasil dalam E dibagi dengan banyaknya hasil dalam S. Kita menuliskannya sebagai $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$.

Contoh 3.7.4

Misalkan Anda melempar dadu bersisi 6 biasa (setiap sisi memuat sebuah bilangan dari 1 sampai 6). Berapa peluang Anda memperoleh bilangan genap?

Penyelesaian. Ruang sampelnya adalah himpunan kemungkinan hasil pelemparan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kejadian memperoleh bilangan genap, yang kita namai E, adalah himpunan hasil $\{2, 4, 6\}$. Dengan demikian, peluang terjadinya E adalah

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Kita telah mencurahkan banyak usaha untuk mempelajari cara mencacah banyaknya anggota himpunan. Pengetahuan ini dapat kita gunakan untuk menghitung peluang dengan mencacah banyaknya anggota ruang sampel dan kejadian.

Contoh 3.7.5

Jika Anda mengambil 5 kartu dari setumpuk kartu standar yang berisi 52 kartu, berapa peluang memperoleh empat kartu berperingkat sama?

Penyelesaian. Pertama, mari kita cacah ruang sampelnya, yang terdiri atas semua tangan berisi 5 kartu. Urutan kartu dalam sebuah tangan tidak penting, sehingga kita cukup mencacah himpunan bagian beranggota 5 dari 52 kartu. Jadi, ruang sampel memuat $\binom{52}{5}$ anggota. (Bilangan ini sedikit kurang dari 2,6 juta, tepatnya 2, 598, 960.)

Sekarang, berapa banyak di antaranya yang memuat empat kartu berperingkat sama? Kita dapat mencacahnya dengan terlebih dahulu memilih satu dari 13 peringkat yang akan muncul empat kali; pilihan ini dapat dilakukan dengan $\binom{13}{1} = 13$ cara. Bagaimana dengan kartu lain dalam tangan tersebut? Ada 48 kartu lain yang mungkin, sehingga banyaknya tangan dengan empat kartu berperingkat sama adalah $13 \cdot 48 = 624$.

Jadi, peluang memperoleh empat kartu berperingkat sama adalah

$$P(\text{empat kartu berperingkat sama}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \approx 0.00024.$$

Ada satu hal penting yang perlu diperhatikan: ketika mencacah banyaknya anggota ruang sampel dan kejadian, kita harus memastikan bahwa kita benar-benar mencacah banyaknya anggota *dari* ruang sampel yang termasuk dalam kejadian tersebut. Secara khusus, jika kita mencacah *himpunan bagian* kartu dalam ruang sampel (menggunakan kombinasi, bukan permutasi untuk mencacah barisan kartu), kita juga harus mencacah banyaknya *himpunan bagian* kartu dalam kejadian.

Menariknya, kita juga dapat menentukan peluang memperoleh empat kartu berperingkat sama dengan menggunakan permutasi. Banyaknya barisan 5 kartu adalah $P(52, 5) = 311,875,200$. Mencacah barisan yang memuat empat kartu berperingkat sama sedikit lebih rumit. Ada 13 kemungkinan peringkat untuk keempat kartu tersebut dan 48 kemungkinan kartu kelima. Namun, kelima kartu itu dapat disusun dengan 5! cara berbeda. Jadi, banyaknya barisan yang memuat empat kartu berperingkat sama adalah $13 \cdot 48 \cdot 5!$. Dengan demikian,

$$P(\text{empat kartu berperingkat sama}) = \frac{13 \cdot 48 \cdot 5!}{P(52, 5)} \approx 0.00024.$$

Apakah hasil ini mendekati jawaban sebelumnya? Hasilnya *tepat* sama (hal ini dapat diverifikasi dengan memperhatikan faktor tambahan 5! pada pembilang dan penyebut).

Meskipun memilih kombinasi atau permutasi akan memberikan peluang yang sama selama pilihan yang sama digunakan untuk ruang sampel dan kejadian, kesetaraan semacam ini tidak selalu berlaku, sebagaimana akan Anda selidiki dalam beberapa latihan tambahan.

3.7.3 Aturan Peluang

Berikut beberapa fakta dasar tentang peluang yang langsung mengikuti definisi peluang dan pemahaman kita tentang pencacahan. Meskipun kita masih mengasumsikan bahwa semua hasil dalam ruang sampel memiliki peluang yang sama (distribusi peluang seragam), aturan-aturan ini berlaku untuk semua distribusi peluang.

Pertama, kita sering tertarik pada peluang bahwa suatu kejadian *tidak* terjadi. Kita menyebutnya **komplemen** kejadian tersebut. Ingatlah bahwa kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel; tidak berada "di dalam" kejadian berarti berada dalam komplemen himpunan bagian tersebut. Dengan menggunakan notasi yang sama seperti untuk himpunan, komplemen kejadian E ditulis $\overline{E}$. Berikut hubungan antara peluang suatu kejadian dan peluang komplemennya.

Teorema 3.7.6

Peluang komplemen suatu kejadian E adalah

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

Bukti. Ingat bahwa $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$, yaitu banyaknya hasil dalam kejadian E dibagi dengan banyaknya seluruh hasil. Lalu, berapa banyak hasil yang *tidak* berada dalam E? Semua hasil lainnya. Dengan demikian,

$$\left|\overline{E}\right| = |S| - |E|.$$

Oleh karena itu,

$$P(\overline{E}) = \frac{\left|\overline{E}\right|}{|S|} = \frac{|S| - |E|}{|S|} = \frac{|S|}{|S|} - \frac{|E|}{|S|} = 1 - P(E).$$

Mari kita ilustrasikan pembuktian ini dengan sebuah contoh.

Contoh 3.7.7

Misalkan Anda melempar sebuah koin yang adil sebanyak 10 kali. Berapa peluang memperoleh sedikitnya satu sisi kepala?

Penyelesaian. Ada banyak cara untuk memperoleh sedikitnya satu sisi kepala, tetapi hanya ada satu cara untuk tidak memperoleh sisi kepala sama sekali (yaitu, semua hasilnya sisi ekor). Karena itu, masuk akal untuk menghitung peluang yang diminta sebagai komplemen dari peluang yang lebih mudah dihitung.

Ruang sampelnya adalah himpunan semua barisan hasil 10 pelemparan. Berapa banyak barisan tersebut? Setiap suku dalam barisan dapat berupa sisi kepala (H) atau sisi ekor (T), sehingga terdapat $2^{10} = 1024$ barisan yang mungkin.

Kita ingin menentukan peluang memperoleh sedikitnya satu sisi kepala. Anggaplah ini sebagai pertanyaan pencacahan: berapa banyak barisan 10 pelemparan yang memuat sedikitnya satu sisi kepala? Semua 1024 barisan kecuali satu barisan yang seluruhnya sisi ekor. Jadi, terdapat 1023 barisan yang memuat sedikitnya satu sisi kepala. Dengan demikian, peluang memperoleh sedikitnya satu sisi kepala adalah $\frac{1023}{1024}$.

Tunggu, apakah kita menggunakan Teorema 3.7.6? Tidak secara eksplisit, tetapi pada dasarnya kita menggunakannya. Dengan teorema tersebut, kita akan mengatakan bahwa peluang memperoleh sedikitnya satu sisi kepala adalah

$$1 - P(\text{semua sisi ekor}) = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

Perhatikan bahwa perhitungan kita mengharuskan pengurangan pecahan:

$$1 - \frac{1}{1024} = \frac{1024}{1024} - \frac{1}{1024} = \frac{1024 - 1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

Jadi, baik kita melakukan pengurangan untuk menghitung banyaknya anggota komplemen maupun menggunakan rumus komplemen lalu mengurangkan pecahan, kita memperoleh jawaban yang sama.

Peluang komplemen sangat berguna untuk menjawab pertanyaan historis tentang dadu.

Contoh 3.7.8

Berapa peluang memperoleh sedikitnya satu angka 6 dalam empat kali pelemparan dadu bersisi 6 yang adil?

Apakah peluang ini sama dengan peluang memperoleh sedikitnya satu pasangan angka 6 dalam 24 kali pelemparan dua dadu?

Penyelesaian. Kejadian komplemennya adalah melempar dadu empat kali dan *tidak pernah* memperoleh angka 6. Dari 6^4 kemungkinan barisan pelemparan, terdapat 5^4 yang tidak memuat angka 6. Jadi, peluang memperoleh sedikitnya satu angka 6 dalam empat kali pelemparan adalah

$$P(\text{sedikitnya satu angka 6}) = 1 - P(\text{tanpa angka 6}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.5177.$$

Untuk variasi pasangan angka 6 dalam 24 pelemparan, kita juga menggunakan kejadian komplemen: berapa peluang tidak memperoleh pasangan angka 6? Artinya, pada setiap pelemparan kita memperoleh salah satu dari 35 pasangan lainnya.

$$P(\text{sedikitnya satu pasangan 6}) = 1 - P(\text{tanpa pasangan 6}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0.4914.$$

Chevalier de Mere memang memperhatikan bahwa ketika memainkan permainan dengan dua dadu, dalam jangka panjang ia cenderung kehilangan uang. Kepada siapa ia meminta bantuan? Tentu saja Blaise Pascal!

Cara lain memahami peluang komplemen adalah melalui persamaan

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1.$$

Peluang 1 berarti bahwa kejadian tersebut pasti, sehingga persamaan ini dapat dipandang sebagai peluang bahwa kejadian E terjadi atau tidak terjadi. Inilah makna yang kita inginkan ketika menjumlahkan peluang.

Teorema 3.7.9

Misalkan A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas. *Peluang terjadinya A atau B adalah*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Jika A dan B tidak saling lepas, peluang terjadinya A atau B adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pembuktian fakta ini menjadi salah satu latihan dalam bagian ini. Namun, cara kerjanya akan tampak jelas melalui sebuah contoh.

Contoh 3.7.10

Misalkan Anda melempar dadu bersisi 6 yang adil. Berapa peluang memperoleh bilangan yang genap atau kurang dari 3?

Penyelesaian. Kita tidak memerlukan teorema untuk menjawab pertanyaan ini. Ruang sampelnya adalah $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan kejadiannya adalah himpunan bagian $E = \{1, 2, 4, 6\}$. Jadi, $P(E) = \frac{4}{6}$.

Untuk melihat asal bilangan 4, misalkan A adalah kejadian memperoleh bilangan genap (jadi $A = \{2, 4, 6\}$) dan B adalah kejadian memperoleh bilangan yang kurang dari 3 (jadi $B = \{1, 2\}$). Perhatikan bahwa notasi $P(E) = P(A \cup B)$ masuk akal karena, sebagai himpunan, memang berlaku $E = A \cup B$.

Jika kita kembali pada definisi peluang suatu kejadian, diperoleh

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{|A \cup B|}{|S|}.$$

Kita harus menentukan banyaknya anggota himpunan $A \cup B$. Namun, kita tahu cara menentukan banyaknya anggota gabungan himpunan yang tidak saling lepas: gunakan prinsip inklusi–eksklusi! Jadi, $|A \cup B| = 3 + 2 - 1 = 4$.

Seperti yang ditunjukkan contoh tersebut, pada dasarnya kita telah menerjemahkan prinsip penjumlahan ke dalam bahasa peluang. Dapatkah kita melakukan hal yang sama untuk prinsip perkalian?

Kita menggunakan prinsip perkalian untuk menentukan banyaknya cara dua kejadian dapat terjadi secara berurutan. Banyak pertanyaan peluang menanyakan peluang kejadian **majemuk** semacam ini. Mari kita perhatikan sebuah contoh untuk memahami apa yang terjadi.

Contoh 3.7.11

Berapa peluang memperoleh bilangan genap ketika melempar dadu bersisi 6 dan memperoleh sisi kepala ketika melempar koin?

Penyelesaian. Pertama, kita akan menentukan peluang langsung dari definisinya. Ruang sampel terdiri atas semua pasangan hasil dadu dan koin, sehingga

$$S = \{(1,H),(1,T),(2,H),(2,T),(3,H),(3,T),\\ (4,H),(4,T),(5,H),(5,T),(6,H),(6,T)\}.$$

Tanpa mendaftarkan semuanya, kita dapat menghitung banyaknya anggota ruang sampel menggunakan prinsip perkalian: $|S| = 6 \cdot 2 = 12$. Kejadian yang kita perhatikan adalah himpunan hasil $E = \{(2,H),(4,H),(6,H)\}$. Himpunan ini jelas beranggota 3, yang juga dapat kita peroleh sebagai $3 \cdot 1$. Jadi, peluang kejadian ini adalah $P(E) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Sekarang perhatikan kedua kejadian secara terpisah. Misalkan A adalah kejadian memperoleh bilangan genap dan B adalah kejadian memperoleh sisi kepala ketika melempar koin. Peluang kejadian pertama adalah $P(A) = \frac{3}{6}$. Peluang kejadian kedua adalah $P(B) = \frac{1}{2}$. Tampaknya cara yang tepat untuk menggabungkan kedua peluang ini adalah mengalikannya:

$$P(E) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Sangatlah sesuai bahwa perkalian pecahan dilakukan dengan mengalikan pembilang dan penyebut secara terpisah; hal ini sama dengan menerapkan prinsip perkalian pada pembilang dan penyebut pecahan tersebut.

Contoh di atas berhasil karena kedua kejadian tersebut **saling bebas**. Secara intuitif, ini berarti bahwa hasil kejadian pertama tidak memengaruhi hasil kejadian kedua. Sebenarnya, seperti halnya prinsip perkalian, kita menggunakan prinsip ini untuk *mendefinisikan* kebebasan.

Definisi 3.7.12

Diberikan dua kejadian A dan B, kita mengatakan bahwa keduanya **saling bebas** jika peluang kedua kejadian terjadi sama dengan hasil kali peluang masing-masing kejadian:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Perhatikan bahwa dalam definisi tersebut, kejadian bahwa A dan B sama-sama terjadi dinyatakan sebagai irisan $A \cap B$. Karena kejadian merupakan himpunan, penggunaan irisan masuk akal. Irisan dua himpunan memuat semua anggota yang berada dalam kedua himpunan, tepat seperti yang kita perlukan di sini.

Hal ini memperjelas perbedaan penting antara definisi tersebut dan prinsip perkalian. Kita menggunakan prinsip perkalian untuk membentuk himpunan hasil baru dengan menggabungkan hasil dari dua himpunan. Penggabungan ini meng-

hasilkan jenis hasil yang baru. Sebagai contoh, prinsip perkalian menggabungkan himpunan

$$\{1,2,3\} \text{ dan } \{H,T\} \text{ menjadi } \{1H,1T,2H,2T,3H,3T\}.$$

Himpunan ini *bukan* irisan dua himpunan (sebenarnya, ini adalah hasil kali Kartesius: $A \times B = \{(a,b) : a \in A; b \in B\}$). Definisi kebebasan melibatkan peluang relatif terhadap suatu himpunan hasil yang tetap. Jadi, anggota A dan B dalam definisi kebebasan sudah berupa barisan seperti yang akan kita bentuk dengan prinsip perkalian.

Jika kita lebih cermat dalam Contoh 3.7.11, ketika kita melempar dadu dan koin, kejadian A berupa perolehan bilangan genap seharusnya dinyatakan sebagai himpunan

$$A = \{(2,H),(2,T),(4,H),(4,T),(6,H),(6,T)\}$$

dan kejadian B berupa perolehan sisi kepala seharusnya dinyatakan sebagai himpunan

$$B = \{(1,H),(2,H),(3,H),(4,H),(5,H),(6,H)\}.$$

Dengan demikian, $P(A) = \frac{6}{12}$ dan $P(B) = \frac{6}{12}$, sehingga hasil kalinya $P(A)P(B) = \frac{6}{12}\frac{6}{12} = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$. Jadi, penyelesaian dalam contoh tersebut benar tetapi dapat menyesatkan. Kejadian A dan B memang saling bebas karena

$$A \cap B = \{(2,H),(4,H),(6,H)\}$$

sehingga $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Contoh 3.7.13

Misalkan Anda melempar dadu bersisi 12 (bernomor 1 sampai 12). Perhatikan kejadian-kejadian berikut:

- A adalah kejadian memperoleh bilangan kelipatan 3.
- B adalah kejadian memperoleh bilangan kelipatan 4.
- C adalah kejadian memperoleh bilangan yang kurang dari 7.

Apakah kejadian A dan B saling bebas? Bagaimana dengan A dan C? Bagaimana dengan B dan C?

Penyelesaian. Ruang sampelnya adalah himpunan $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Kejadian A adalah himpunan $\{3,6,9,12\}$, B adalah himpunan $\{4,8,12\}$, dan C adalah himpunan $\{1,2,3,4,5,6\}$. Jadi, peluang masing-masing kejadian adalah

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Untuk menentukan apakah kejadian A dan B saling bebas, kita mencari $P(A \cap B)$. Peluang irisan kejadian A dan B (artinya bilangan yang diperoleh

merupakan kelipatan 3 sekaligus 4) adalah $\frac{1}{12}$ karena satu-satunya anggota irisan tersebut adalah 12. Kita membandingkannya dengan $P(A)P(B) = \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Karena keduanya sama, kedua kejadian tersebut saling bebas.

Namun, kejadian B dan C *tidak* saling bebas. Karena $B \cap C = \{4\}$, kita mempunyai $P(B \cap C) = \frac{1}{12}$. Akan tetapi, $P(B)P(C) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Karena keduanya tidak sama, kedua kejadian tersebut tidak saling bebas. Hal ini masuk akal karena di antara bilangan yang kurang dari 7, proporsi kelipatan 4 berbeda dari proporsinya dalam seluruh ruang sampel.

Terakhir, A dan C saling bebas: $P(A \cap C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ dan $P(A)P(C) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ketika dua kejadian tidak saling bebas, muncul sebuah pertanyaan baru yang menarik: berapa peluang suatu kejadian *dengan syarat* kejadian lain telah terjadi? Hal ini disebut ...

3.7.4 Peluang Bersyarat

Masalah peluang terkenal yang dikenal sebagai masalah Monty Hall menyajikan teka-teki berikut. Anda tampil dalam acara kuis *Let's Make a Deal* dan akan memenangkan apa pun yang berada di balik salah satu dari tiga pintu yang Anda pilih untuk dibuka. Di balik satu pintu terdapat mobil; di balik dua pintu lainnya terdapat kambing. Anda memilih sebuah pintu, tetapi sebelum pintu itu dibuka, pembawa acara (Monty Hall) membuka salah satu pintu lain yang menyembunyikan kambing. Kemudian Anda diberi kesempatan untuk berpindah pintu. Haruskah Anda berpindah? Jika berpindah, berapa peluang memperoleh mobil?

Omong-omong... Masalah ini mungkin merupakan salah satu masalah matematika pertama yang "menjadi viral", meskipun hal itu terjadi setelah masalah tersebut dimuat dalam majalah surat kabar Minggu *Parade*. Setelah penerbitannya, sekitar 10.000 pembaca (termasuk hampir 1.000 pemegang gelar doktor) menulis surat untuk menyatakan bahwa penulisnya, Marilyn vos Savant, keliru. Ia tidak keliru.

Anda mungkin tergoda untuk mengatakan bahwa peluang memperoleh mobil jika berpindah pintu adalah $\frac{1}{2}$. Lagi pula, tersisa dua pintu dan mobil berada di balik salah satunya. Namun, kita harus menanyakan peluang memperoleh mobil *dengan syarat* Monty telah memperlihatkan kambing di balik pintu lain yang tidak dipilih.

Definisi 3.7.14

Diberikan dua kejadian A dan B, **peluang bersyarat** A dengan syarat B adalah

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Apakah definisi ini sesuai dengan intuisi kita tentang makna peluang bersyarat? Mari kita pikirkan ruang sampelnya. Kita ingin mengetahui peluang terjadinya A dengan asumsi bahwa B telah terjadi. Dengan kata lain, kita hanya memperhatikan anggota ruang sampel yang termasuk dalam B.

Jika B menjadi ruang sampel, satu-satunya hasil dari A yang mungkin terjadi adalah hasil yang berada dalam A *dan* B. Jadi, mungkin definisi peluang bersyarat seharusnya

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Sayangnya, saya tidak berwenang menetapkan definisi peluang. Namun, ternyata definisi baku sama baiknya. Alasannya,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Syukurlah. Satu krisis lagi berhasil dihindari.

Contoh 3.7.15

Misalkan Anda melempar dua dadu bersisi 6 dengan mata tertutup. Teman Anda berkata, "Lihat, sedikitnya salah satu dadu Anda menunjukkan angka 4." Berapa peluang bahwa jumlah kedua dadu itu adalah 7?

Penyelesaian. Pertama, perhatikan bahwa peluang memperoleh jumlah 7 adalah $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, sebab dari 36 pasangan bilangan yang mungkin muncul, terdapat enam pasangan yang jumlahnya 7: $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. Namun, sekarang kita mengetahui bahwa sedikitnya salah satu dadu menunjukkan angka 4. Hal ini membatasi ruang sampel menjadi 11 pasangan yang memuat angka 4 (kita dapat mencacahnya dengan prinsip inklusi–eksklusi sebagai $6+6-1$). Di antaranya, hanya dua yang jumlahnya 7: $\{(3,4),(4,3)\}$. Jadi, peluang memperoleh jumlah 7 dengan syarat salah satu dadu menunjukkan angka 4 adalah $\frac{2}{11}$.

Jika kita menggunakan definisi peluang bersyarat, perhitungannya sedikit berbeda tetapi menghasilkan jawaban yang sama. Misalkan A adalah kejadian bahwa jumlahnya 7 dan B adalah kejadian bahwa sedikitnya salah satu dadu menunjukkan angka 4. Maka $P(B) = \frac{11}{36}$ dan $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$. Jadi, $P(A|B) = \frac{2}{11}$.

Perhatikan bahwa peluang memperoleh jumlah 7 dengan syarat dadu *merah* menunjukkan angka 4 (anggaplah kedua dadu berbeda warna) akan berbeda! Peluangnya $\frac{1}{6}$, sebab sebenarnya kita hanya menanyakan peluang bahwa dadu lainnya menunjukkan angka 3.

Contoh 3.7.16

Misalkan Anda mengambil dua kartu dari setumpuk kartu standar yang berisi 52 kartu. Berapa peluang bahwa kartu kedua adalah kartu bergambar

dengan syarat kartu pertama berwarna merah?

Berapa peluang bahwa kartu pertama berwarna merah dengan syarat kartu kedua adalah kartu bergambar?

Penyelesaian. Ruang sampel kita terdiri atas $52 \cdot 51$ barisan dua kartu. Kejadian A terdiri atas pasangan yang kartu pertamanya berwarna merah. Kejadian B terdiri atas pasangan yang kartu keduanya merupakan kartu bergambar.

Kita mencari $P(A|B)$ dan $P(B|A)$, sehingga kita perlu menentukan $P(A)$, $P(B)$, dan $P(A \cap B)$. Terdapat $26 \cdot 51$ pasangan dalam A (pilih satu dari 26 kartu merah, lalu salah satu dari 51 kartu yang tersisa), sehingga

$$P(A) = \frac{26 \cdot 51}{52 \cdot 51} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

Terdapat $12 \cdot 51$ pasangan dalam B (pilih satu dari 12 kartu bergambar, lalu salah satu dari 51 kartu yang tersisa), sehingga

$$P(B) = \frac{12 \cdot 51}{52 \cdot 51} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

Menentukan banyaknya anggota irisan sedikit lebih menantang (kita pernah melakukannya dalam subbagian Menggabungkan Prinsip). Terdapat $20 \cdot 12$ pasangan yang diawali kartu merah bukan kartu bergambar dan diakhiri kartu bergambar, serta $6 \cdot 11$ pasangan lain yang diawali kartu bergambar merah dan diakhiri kartu bergambar. Jadi,

$$P(A \cap B) = \frac{20 \cdot 12 + 6 \cdot 11}{52 \cdot 51} = \frac{306}{2652} = \frac{3}{26}.$$

Jadi, peluang bahwa kartu kedua merupakan kartu bergambar dengan syarat kartu pertama berwarna merah adalah

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{26}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{13}.$$

Peluang bahwa kartu pertama berwarna merah dengan syarat kartu kedua merupakan kartu bergambar adalah

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{26}}{\frac{3}{13}} = \frac{1}{2}.$$

Tunggu sebentar! Apa? Peluang bahwa kartu pertama berwarna merah dengan syarat kartu kedua merupakan kartu bergambar ternyata sama dengan peluang bahwa kartu pertama berwarna merah? Tampaknya $P(A|B) = P(A)$ dan $P(B|A) = P(B)$. Apa artinya?

Perhatikan apa yang terjadi ketika kita menghilangkan penyebut dalam definisi peluang bersyarat

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

menjadi

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

Bentuk ini hampir sama dengan definisi dua kejadian yang saling bebas, kecuali bahwa faktor $P(A)$ kini digantikan oleh $P(A|B)$. Namun, apa arti $P(A|B)$ jika A dan B saling bebas? Jika kedua kejadian saling bebas, A tidak seharusnya menjadi lebih atau kurang mungkin terjadi setelah B terjadi. Jadi, seharusnya $P(A|B) = P(A)$. Inilah yang tepatnya kita lihat dalam contoh terakhir.

3.7.5 Pertanyaan Bacaan

1. Manakah di antara pernyataan berikut yang benar tentang persamaan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

A. Pernyataan ini benar selama kejadian A dan B saling lepas.

B. Pernyataan ini benar selama kejadian A dan B saling bebas.

C. Pernyataan ini selalu benar.

D. Pernyataan ini tidak pernah benar.

2. Manakah di antara hubungan berikut yang berlaku untuk sembarang dua kejadian A dan B?

A. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

B. $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

C. $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$

D. $P(A \cap B) = P(A)P(A|B)$

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki setelah membaca bagian ini? Ajukan sedikitnya satu pertanyaan tentang materi yang membuat Anda penasaran.

3.7.6 Soal Latihan

1. Anda melempar sebuah koin yang adil sebanyak tiga kali dan mencatat apakah koin tersebut menghasilkan sisi kepala (H) atau sisi ekor (T).

(a) Daftarkan semua anggota ruang sampel. Sebagai contoh, salah satu hasilnya adalah HHT.

(b) Misalkan Anda bertaruh dengan seorang teman bahwa Anda akan memperoleh lebih banyak sisi kepala daripada sisi ekor. Daftarkan semua anggota kejadian ini.

(c) Berapa peluang memperoleh lebih banyak sisi kepala daripada sisi ekor?

(d) Berapa peluang memperoleh tepat dua sisi kepala?

Berapa peluang memperoleh tepat tiga sisi kepala?

2. Misalkan Anda melempar sebuah koin yang adil sebanyak 15 kali.

(a) Berapa banyak anggota ruang sampelnya?

(b) Berapa banyak anggota kejadian memperoleh tepat 8 sisi kepala?

Jadi, berapa peluang memperoleh tepat 8 sisi kepala?

(c) Berapa banyak anggota kejadian bahwa Anda TIDAK memperoleh tepat 8 sisi kepala?

Berapa peluang bahwa Anda TIDAK memperoleh tepat 8 sisi kepala? Gunakan definisi peluang dan jawaban sebelumnya.

Berapa peluang yang Anda peroleh untuk kejadian yang sama jika menggunakan fakta bahwa peluang suatu kejadian sama dengan 1 dikurangi peluang komplemennya?

3. Misalkan Anda melempar sebuah koin yang adil sebanyak 16 kali.

(a) Berapa banyak anggota ruang sampelnya?

(b) Berapa banyak anggota kejadian memperoleh tepat 4 sisi kepala?

Berapa banyak anggota kejadian memperoleh tepat 12 sisi kepala?

Berapa banyak anggota kejadian memperoleh tepat 4 sisi kepala ATAU tepat 12 sisi kepala?

(c) Berapa jumlah peluang memperoleh tepat 4 sisi kepala dan peluang memperoleh tepat 12 sisi kepala?

_____ + _____ = _____

Berapa peluang memperoleh tepat 4 sisi kepala ATAU tepat 12 sisi kepala? Hitunglah dengan membagi banyaknya anggota kejadian dengan banyaknya anggota ruang sampel.

_____ ÷ _____ = _____.

4. Anda memiliki sekantong M&M bertema matematika. Menurut keterangan pada kemasan, di dalamnya terdapat 5 M&M biru, 4 merah, 1 jingga, 1 hijau, 2 cokelat, dan 3 kuning.

Tentukan peluang kejadian-kejadian berikut.

(a) Jika Anda mengambil satu M&M, berapa peluang bahwa M&M tersebut berwarna biru atau kuning?

(b) Jika Anda mengambil dua M&M sekaligus, berapa peluang memperoleh satu M&M biru dan satu M&M kuning?

(c) Jika Anda mengambil dua M&M satu per satu, berapa peluang memperoleh M&M biru terlebih dahulu lalu M&M kuning?

5. Dalam setumpuk kartu standar yang berisi 52 kartu, terdapat 26 kartu merah dan 26 kartu hitam. Jadi, peluang mengambil kartu merah adalah 0.5.

(a) Berapa peluang memperoleh sisi ekor pada kedua pelemparan ketika sebuah koin dilempar dua kali?

(b) Jika Anda dibagikan dua kartu dari setumpuk kartu standar, berapa peluang bahwa kedua kartu tersebut berwarna merah?

6. Misalkan Anda hanya mengambil delapan kartu permainan, yaitu empat kartu merah dan empat kartu hitam. Anda juga memiliki sebuah koin yang adil dan dapat melemparkannya sebanyak yang Anda inginkan.

(a) Bandingkan peluang memperoleh sisi ekor ketika melempar koin sekali dengan peluang mengambil satu kartu merah.

P(sisi ekor) =_____; P(kartu merah) = _____. Selisih: _____

(b) Bandingkan peluang memperoleh dua sisi ekor ketika melempar koin dua kali dengan peluang mengambil dua kartu merah (tanpa pengembalian).

P(2 sisi ekor) =_____; P(2 kartu merah) = _____. Selisih: _____

(c) Bandingkan peluang memperoleh tiga sisi ekor ketika melempar koin tiga kali dengan peluang mengambil tiga kartu merah (tanpa pengembalian).

P(3 sisi ekor) =_____; P(3 kartu merah) = _____. Selisih: _____

(d) Bandingkan peluang memperoleh empat sisi ekor ketika melempar koin empat kali dengan peluang mengambil empat kartu merah (tanpa pengembalian).

P(4 sisi ekor) =_____; P(4 kartu merah) = _____. Selisih: _____

(e) Bandingkan peluang memperoleh lima sisi ekor ketika melempar koin lima kali dengan peluang mengambil lima kartu merah (tanpa pengembalian).

P(5 sisi ekor) =_____; P(5 kartu merah) = _____. Selisih: _____

7. Misalkan Anda memiliki tiga dadu: dadu bersisi 4, dadu bersisi 6, dan dadu bersisi 8. Setiap dadu adil dan bernomor dari 1 sampai banyaknya sisi dadu tersebut. Anda melempar ketiga dadu.

(a) Berapa peluang bahwa jumlah angka pada ketiga dadu adalah 3?

(b) Berapa peluang bahwa jumlah angka pada ketiga dadu adalah 6?

(c) Berapa peluang bahwa ketiga dadu menunjukkan angka yang sama?

(d) Berapa peluang bahwa ketiga dadu menunjukkan angka yang sama *dengan syarat* jumlah angka pada ketiga dadu adalah 6?

8. Anda melempar 3 dadu bersisi 6 yang adil. Berapa peluang bahwa ketiga dadu menunjukkan angka yang berbeda?

Berapa peluang bahwa ketiga dadu menunjukkan angka yang sama?

Apakah mungkin angka pada ketiga dadu tidak semuanya sama dan juga tidak semuanya berbeda? Berapa peluang terjadinya hal tersebut?

3.7.7 Latihan Tambahan

1. Dalam poker lima kartu, **full house** adalah tangan yang memuat tiga kartu dengan satu peringkat dan dua kartu dengan peringkat lain. Sebagai contoh, Anda dapat memiliki tiga kartu berperingkat 7 dan dua kartu berperingkat 4.

Tentukan peluang dibagikan sebuah full house dengan dua cara berbeda:

(a) Anggaplah kelima kartu dibagikan sekaligus, sehingga ruang sampelnya memiliki $\binom{52}{5}$ anggota.

(b) Anggaplah kartu dibagikan satu per satu, sehingga ruang sampelnya memiliki $P(52, 5)$ anggota.

Apakah kedua jawaban tersebut sama? Mengapa hal ini masuk akal?

2. Sebuah pembangkit bilangan acak memilih bilangan satu digit (0 sampai 9) dengan peluang yang sama. Misalkan pembangkit tersebut menghasilkan lima bilangan.

Berapa peluang bahwa kelima bilangan tersebut semuanya berbeda? Jawablah pertanyaan ini dengan dua cara:

(a) Anggaplah bilangan keluar dari pembangkit dalam suatu barisan, sehingga ruang sampelnya memiliki 10^5 anggota.

(b) Anggaplah bilangan keluar sebagai sebuah multihimpunan, atau secara ekuivalen, bilangan-bilangan tersebut harus muncul dalam urutan tak menurun. Gunakan metode batang dan batu untuk mencacah banyaknya anggota ruang sampel.

Apakah kedua jawaban tersebut sama? Mengapa hal ini masuk akal?

3. Buktikan Teorema 3.7.9.

4. Masing-masing dari 10 orang teman memiliki setumpuk kartu yang telah mereka kocok dengan saksama. Setiap orang mengambil satu kartu dari tumpukannya. Berapa peluang bahwa sedikitnya sepasang teman mengambil kartu yang sama?

5. Berapa banyak orang yang harus berada dalam sebuah ruangan agar peluang sedikitnya dua orang memiliki tanggal lahir yang sama mencapai 50%?

Anggaplah semua tanggal lahir memiliki peluang yang sama dan tidak ada seorang pun yang lahir pada hari kabisat (29 Februari).

6. Pada reuni sekolah menengah Anda yang ke-20, Anda bertemu seorang teman lama yang sudah bertahun-tahun tidak terdengar kabarnya. Anda berbicara tentang hewan peliharaan, khususnya kucing dan anjing. Ia memberi tahu bahwa ia memiliki dua hewan peliharaan dan sedikitnya salah satunya adalah kucing. Berapa peluang bahwa kedua hewan tersebut adalah kucing? (Anggaplah memiliki kucing atau anjing sama mungkinnya.)

7. Seorang teman lama lain mendengar percakapan Anda tentang hewan peliharaan dan mengatakan bahwa ia juga memiliki dua hewan peliharaan, serta bahwa hewan yang telah paling lama dipeliharanya adalah kucing. Berapa peluang bahwa kedua hewan tersebut adalah kucing? Mengapa jawaban ini berbeda dari jawaban pertanyaan sebelumnya?

8. Anda memainkan permainan tebak cangkir dengan tiga cangkir. Di bawah satu cangkir terdapat dua bola hijau, di bawah cangkir lain terdapat dua bola merah, dan di bawah cangkir ketiga terdapat satu bola hijau serta satu bola merah. Anda menutup mata, lalu teman Anda mengatur ulang letak cangkir-cangkir tersebut. Kemudian Anda membuka mata dan memilih satu cangkir secara acak. Anda melihat bahwa cangkir tersebut memuat sebuah bola hijau. Berapa peluang bahwa bola lainnya di bawah cangkir itu juga berwarna hijau? Jelaskan jawaban Anda menggunakan peluang bersyarat.

3.8 Pencacahan Lanjut dengan Prinsip Inklusi–Eksklusi

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda seharusnya mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menerapkan prinsip inklusi–eksklusi untuk menyelesaikan masalah pencacahan yang melibatkan multihimpunan dengan multiplisitas terbatas.
2. Menerapkan prinsip inklusi–eksklusi untuk menyelesaikan masalah pencacahan yang melibatkan permutasi tanpa titik tetap.
3. Menerapkan prinsip inklusi–eksklusi untuk menyelesaikan masalah pencacahan yang melibatkan fungsi surjektif.

3.8.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Anda memiliki 11 pai jeruk nipis mini yang identik untuk diberikan kepada 4 anak. Namun, Anda tidak ingin seorang anak pun menerima lebih dari 3 pai. Dengan berapa banyak cara pai tersebut dapat dibagikan?

Metode batang dan batu memungkinkan kita, misalnya, mencacah banyaknya cara membagikan 10 kue kering kepada 3 anak dan banyaknya solusi bilangan asli untuk $x + y + z = 10$. Dengan modifikasi yang relatif mudah, kita dapat memberlakukan batas *bawah* pada masalah-masalah ini: mungkin setiap anak harus menerima sedikitnya dua kue kering, atau $x, y, z \geq 2$. Caranya ialah terlebih dahulu memberikan 2 kue kering (atau satuan) kepada setiap anak (atau variabel), kemudian membagikan sisanya dengan metode batang dan batu.

Bagaimana jika kita menginginkan batas *atas*? Sebagai contoh, kita mungkin mensyaratkan bahwa tidak ada anak yang menerima lebih dari 4 kue kering atau bahwa $x, y, z \leq 4$. Ternyata masalah ini jauh lebih sulit.

Perhatikan bahwa jika kita mempertimbangkan kejadian komplemen, yaitu pembagian kue kering yang menyebabkan anak-anak *menerima* lebih dari 4 kue kering, kita kembali pada masalah batang dan batu dengan batas bawah. Jika kita dapat mencacahnya, mengurangkan hasil tersebut dari seluruh kemungkinan pembagian seharusnya memberikan jawaban yang diinginkan. Namun, masalahnya adalah bahwa komplemen dari "tidak ada anak yang menerima lebih dari 4 kue kering" ialah "sedikitnya satu anak menerima lebih dari 4 kue kering". Kita tahu cara menangani syarat bahwa *semua* anak menerima sedikitnya 5 kue kering, tetapi

bagaimana menangani kasus ketika *satu atau lebih* anak menerima sedikitnya 5 kue kering? Kita harus menggunakan prinsip inklusi–eksklusi.

Kegiatan Pratinjau

Pertama, mari kita tinjau kembali beberapa pertanyaan bertipe batang dan batu yang telah kita pelajari dalam Subbab 3.5.

Kemudian kita akan memodifikasinya dan menerapkan prinsip inklusi–eksklusi dari Subbab 3.3.

1. Misalkan kita memiliki 10 kue kering untuk diberikan kepada tiga anak: Albie, Bertie, dan Charlie.

(a) Dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering tersebut tanpa pembatasan?

(b) Dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering jika setiap anak harus menerima sedikitnya dua kue kering?

Petunjuk. Berikan terlebih dahulu jumlah minimum kue kering kepada setiap anak. Dengan berapa banyak cara sisa kue kering dapat dibagikan?

(c) Dengan berapa banyak cara Anda dapat membagikan kue kering jika Albie menerima sedikitnya 3 kue kering dan Bertie menerima sedikitnya 2 kue kering (sedangkan Charlie tidak memiliki pembatasan)?

2. Mari kita kembali mempertimbangkan 10 kue kering yang ingin kita bagikan kepada Albie, Bertie, dan Charlie. Kali ini, kita akan memberlakukan beberapa batas atas.

(a) Dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering jika Albie *memang* menerima lebih dari 3 kue kering (jadi sedikitnya 4)?

Dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering jika Albie *tidak* menerima lebih dari 3 kue kering?

(b) Dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering jika Bertie *memang* menerima lebih dari 3 kue kering?

(c) Dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering jika Albie dan Bertie sama-sama *menerima* lebih dari 3 kue kering?

(d) Dengan menggunakan prinsip inklusi–eksklusi untuk dua himpunan, dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering jika *sedikitnya salah satu* dari Albie atau Bertie menerima lebih dari 3 kue kering? Jadi, Albie menerima lebih dari 3 kue kering, Bertie menerima lebih dari 3 kue kering, atau keduanya menerima lebih dari 3 kue kering.

(e) Dengan berapa banyak cara kita dapat membagikan kue kering jika *baik Albie maupun Bertie tidak* menerima lebih dari 3 kue kering?

3.8.2 Prinsip Inklusi–Eksklusi untuk Multihimpunan

Prinsip inklusi–eksklusi memberikan metode untuk menentukan kardinalitas gabungan himpunan-himpunan yang tidak harus saling lepas. Dalam Subbab 3.3, kita telah melihat cara kerjanya untuk tiga himpunan. Untuk menentukan berapa banyak objek yang berada dalam *satu atau lebih* di antara himpunan A, B, dan C, kita mula-mula menjumlahkan banyaknya anggota setiap himpunan. Namun, jika himpunan-himpunan tersebut bertumpang tindih, sejumlah anggota terhitung beberapa kali. Karena itu, kita mengurangkan anggota dalam setiap irisan sepasang himpunan. Akan tetapi, tindakan ini menghapus anggota yang berada dalam ketiga himpunan satu kali terlalu banyak, sehingga kita harus menambahkannya kembali. Dalam kardinalitas himpunan, kita memperoleh

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Contoh 3.8.1

Tiga anak, Alberto, Bernadette, dan Carlos, memutuskan untuk berbagi 11 kue kering. Mereka bertanya-tanya dengan berapa banyak cara kue tersebut dapat dibagi jika tidak seorang pun menerima lebih dari 4 kue kering (entah mengapa, ketiga anak itu tidak keberatan jika seseorang tidak menerima kue sama sekali).

Penyelesaian. Tanpa batasan "tidak lebih dari 4", jawabannya adalah $\binom{13}{2}$, dengan menggunakan 11 batu dan 2 batang (untuk memisahkan bagian ketiga anak). Sekarang, cacahlah banyaknya cara satu atau lebih anak melanggar syarat tersebut, yaitu menerima sedikitnya 5 kue kering.

Misalkan A adalah himpunan hasil ketika Alberto menerima lebih dari 4 kue kering. Misalkan B adalah himpunan hasil ketika Bernadette menerima lebih dari 4 kue kering. Misalkan C adalah himpunan hasil ketika Carlos menerima lebih dari 4 kue kering. Untuk melakukan pengurangan, kita mencari banyaknya anggota himpunan $A \cup B \cup C$. Dengan prinsip inklusi–eksklusi, kita harus menentukan $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, dan seterusnya. Hasilnya sebagai berikut.

- $|A| = \binom{8}{2}$. Berikan terlebih dahulu 5 kue kering kepada Alberto, lalu bagikan 6 kue yang tersisa kepada ketiga anak tanpa pembatasan dengan menggunakan 6 batu dan 2 batang.
- $|B| = \binom{8}{2}$. Sama seperti di atas, tetapi kali ini Bernadette menerima 5 kue kering terlebih dahulu.
- $|C| = \binom{8}{2}$. Carlos menerima 5 kue kering terlebih dahulu.
- $|A \cap B| = \binom{3}{2}$. Berikan masing-masing 5 kue kering kepada Alberto dan Bernadette, sehingga tersisa 1 kue (batu) untuk dibagikan kepada ketiga anak (2 batang).
- $|A \cap C| = \binom{3}{2}$. Alberto dan Carlos masing-masing menerima 5 kue kering terlebih dahulu.
- $|B \cap C| = \binom{3}{2}$. Bernadette dan Carlos masing-masing menerima 5 kue kering terlebih dahulu.
- $|A \cap B \cap C| = 0$. Ketiga anak tidak mungkin masing-masing menerima 5 kue kering atau lebih.

Dengan menggabungkan semuanya, kita memperoleh

$$|A \cup B \cup C| = \binom{8}{2} + \binom{8}{2} + \binom{8}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} + 0 = 75.$$

Jadi, jawaban atas pertanyaan semula adalah $\binom{13}{2} - 75 = 78 - 75 = 3$. Setelah melihatnya, hasil ini masuk akal. Satu-satunya cara memastikan bahwa tidak ada anak yang menerima lebih dari 4 kue kering adalah memberikan 4 kue kepada dua anak dan 3 kue kepada satu anak; terdapat tiga pilihan untuk anak yang menerima 3 kue. Pengamatan ini sebenarnya dapat memberi jawaban jauh lebih cepat, tetapi tujuan contoh ini adalah menunjukkan bahwa prinsip inklusi–eksklusi bekerja!

Untuk empat himpunan atau lebih, kita tidak menuliskan sebuah rumus panjang bagi prinsip inklusi–eksklusi. Sebaliknya, kita memikirkan prinsipnya: jumlahkan semua anggota dalam setiap himpunan tunggal, lalu kurangkan objek yang terhitung dua kali (anggota dalam irisan setiap *pasangan* himpunan); tambahkan kembali anggota yang terhapus terlalu sering (anggota dalam irisan kelompok tiga himpunan); kurangkan lagi anggota yang ditambahkan kembali terlalu sering (anggota dalam irisan kelompok empat himpunan); lalu tambahkan kembali, kurangkan lagi, tambahkan kembali, dan seterusnya. Hal ini akan sangat sulit seandainya dalam masalah-masalah ini kardinalitas setiap himpunan tunggal tidak sama, kardinalitas setiap irisan dua himpunan tidak sama, dan begitu pula untuk irisan tiga himpunan dan seterusnya. Karena semuanya sama menurut ukurannya, kita dapat mengelompokkannya dan mengalikan dengan banyaknya kombinasi berbeda dari 1, 2, 3, ... himpunan.

Contoh 3.8.2

Dengan berapa banyak cara Anda dapat membagikan 10 kue kering kepada 4 anak sehingga tidak ada anak yang menerima lebih dari 2 kue kering?

Penyelesaian. Terdapat $\binom{13}{3}$ cara untuk membagikan 10 kue kering kepada 4 anak (menggunakan 10 batu dan 3 batang). Kita akan mengurangkan semua hasil ketika seorang anak menerima 3 kue kering atau lebih. Berapa banyak hasil semacam itu? Kita dapat memastikan bahwa anak A memakan 3 kue kering atau lebih dengan memberinya 3 kue sebelum pembagian dimulai. Hal ini mengubah masalah menjadi pembagian 7 kue kering kepada 4 anak tanpa pembatasan. Dalam kasus tersebut, terdapat 7 batu (7 kue yang tersisa) dan 3 batang (satu kurang dari banyaknya anak), sehingga kue dapat dibagikan dengan $\binom{10}{3}$ cara. Tentu saja, kita dapat memilih salah satu dari 4 anak untuk menerima terlalu banyak kue, sehingga tampaknya terdapat $\binom{4}{1}\binom{10}{3}$ pembagian yang memberi terlalu banyak kue kepada satu anak. Namun, sebenarnya kita telah mencacah beberapa hasil terlalu banyak.

Kita harus menghilangkan hasil ketika dua anak menerima terlalu banyak kue. Terdapat $\binom{4}{2}$ cara memilih 2 anak yang akan diberi kue tambahan. Diperlukan 6 kue untuk melakukannya, sehingga hanya tersisa 4 kue. Jadi, kita mempunyai 4 batu dan tetap 3 batang. Dengan demikian, 4 kue yang tersisa dapat dibagikan dengan $\binom{7}{3}$ cara untuk setiap satu dari $\binom{4}{2}$ pilihan pasangan anak yang diberi terlalu banyak kue.

Namun, sekarang kita telah menghapus terlalu banyak. Kita harus menambahkan kembali semua cara memberi terlalu banyak kue kepada tiga anak. Hal ini menggunakan 9 kue, sehingga hanya tersisa 1 kue untuk dibagikan kepada 4 anak dengan metode batang dan batu, yang dapat dilakukan dengan $\binom{4}{3}$ cara. Kita harus memperhitungkan hasil ini untuk setiap kemungkinan pilihan tiga anak yang menerima terlalu banyak kue, dan terdapat $\binom{4}{3}$ cara memilih himpunan 3 anak tersebut.

Berikutnya, kita akan mengurangkan semua cara memberi terlalu banyak

kue kepada keempat anak, tetapi dalam kasus ini jumlahnya 0.

Secara keseluruhan, banyaknya cara membagikan 10 kue kering kepada 4 anak tanpa memberi seorang anak pun lebih dari 2 kue adalah

$$\binom{13}{3} - \left[\binom{4}{1}\binom{10}{3} - \binom{4}{2}\binom{7}{3} + \binom{4}{3}\binom{4}{3}\right]$$

yaitu

$$286 - [480 - 210 + 16] = 0.$$

Hasil ini masuk akal: TIDAK ADA cara membagikan 10 kue kering kepada 4 anak sambil memastikan bahwa tidak seorang pun menerima lebih dari 2 kue. Agak mengejutkan bahwa

$$\binom{13}{3} = \left[\binom{4}{1}\binom{10}{3} - \binom{4}{2}\binom{7}{3} + \binom{4}{3}\binom{4}{3}\right],$$

tetapi karena prinsip inklusi–eksklusi bekerja, kesetaraan ini harus berlaku.

Agar Anda tidak mengira bahwa masalah semacam ini selalu memiliki penyelesaian yang lebih mudah, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.8.3

Sebelumnya, dalam Contoh 3.5.6, kita mencacah banyaknya solusi persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13,$$

dengan $x_i \geq 0$ untuk setiap x_i.

Berapa banyak di antara solusi tersebut yang memenuhi $0 \leq x_i \leq 3$ untuk setiap x_i?

Penyelesaian. Kita harus mengurangkan banyaknya solusi ketika satu atau lebih variabel bernilai lebih besar dari 3. Kita perlu menggunakan prinsip inklusi–eksklusi karena pencacahan solusi untuk setiap variabel yang secara terpisah lebih besar dari 3 akan mencacah beberapa solusi berkali-kali. Hasilnya sebagai berikut.

- Seluruh solusi: $\binom{17}{4}$.
- Solusi dengan $x_1 > 3$: $\binom{13}{4}$. Berikan 4 satuan terlebih dahulu kepada x_1, lalu bagikan 9 satuan yang tersisa kepada 5 variabel.
- Solusi dengan $x_1 > 3$ dan $x_2 > 3$: $\binom{9}{4}$. Setelah memberikan 4 satuan kepada x_1 dan 4 satuan lagi kepada x_2, hanya tersisa 5 satuan untuk dibagikan.
- Solusi dengan $x_1 > 3$, $x_2 > 3$, dan $x_3 > 3$: $\binom{5}{4}$.

- Solusi dengan $x_1 > 3$, $x_2 > 3$, $x_3 > 3$, dan $x_4 > 3$: 0.

Kita juga harus memperhitungkan bahwa salah satu dari kelima variabel dapat dipilih menggantikan x_1 di atas (sehingga terdapat $\binom{5}{1}$ hasil semacam ini), sembarang pasangan variabel dapat menggantikan x_1 dan x_2 (sebanyak $\binom{5}{2}$ hasil), dan seterusnya. Inilah penyebab pencacahan ganda, sehingga kita perlu menggunakan prinsip inklusi–eksklusi. Secara keseluruhan, banyaknya solusi dengan $0 \le x_i \le 3$ adalah

$$\binom{17}{4} - \left[\binom{5}{1}\binom{13}{4} - \binom{5}{2}\binom{9}{4} + \binom{5}{3}\binom{5}{4}\right] = 15.$$

3.8.3 Mencacah Permutasi Tanpa Titik Tetap

Selidiki!

Sebagai lelucon menjelang kelulusan, Anda memutuskan untuk menukar papan nama pada pintu lima dosen favorit Anda. Agar tidak ada yang merasa dilupakan, Anda ingin memastikan bahwa setiap papan nama berakhir pada pintu yang salah. Dengan berapa banyak cara hal ini dapat dilakukan?

Penggunaan lanjut prinsip inklusi–eksklusi memiliki penerapan di luar metode batang dan batu. Sebuah **permutasi tanpa titik tetap** dari n anggota $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ adalah permutasi yang tidak menetapkan anggota mana pun pada posisi semula. Sebagai contoh, terdapat 6 permutasi dari tiga anggota $\{1, 2, 3\}$:

$$123 \;\; 132 \;\; 213 \;\; 231 \;\; 312 \;\; 321.$$

Namun, sebagian besar permutasi tersebut memiliki satu atau lebih anggota yang tetap: 123 menetapkan ketiga anggota karena semuanya berada pada posisi semula, 132 menetapkan anggota pertama (1 berada pada posisi pertama semula), dan seterusnya. Sebenarnya, satu-satunya permutasi tanpa titik tetap dari tiga anggota adalah

$$231 \text{ dan } 312.$$

Jika kita beralih ke 4 anggota, terdapat 24 permutasi (karena ada 4 pilihan untuk anggota pertama, 3 pilihan untuk anggota kedua, dan 2 pilihan untuk anggota ketiga, sehingga hanya tersisa 1 pilihan untuk anggota terakhir). Berapa banyak di antaranya yang merupakan permutasi tanpa titik tetap? Jika Anda mendaftarkan semua 24 permutasi dan menghapus yang memiliki titik tetap, hanya tersisa 9 permutasi tanpa titik tetap. Mari kita lihat cara memperoleh bilangan itu dengan prinsip inklusi–eksklusi.

Contoh 3.8.4

Berapa banyak permutasi tanpa titik tetap dari 4 anggota?

Penyelesaian. Kita mencacah semua permutasi lalu mengurangkan permutasi yang memiliki titik tetap. Terdapat $4! = 24$ permutasi dari 4 anggota. Agar suatu permutasi *bukan* permutasi tanpa titik tetap, sedikitnya satu dari 4 anggota harus berada pada posisi semula. Terdapat $\binom{4}{1}$ pilihan untuk satu anggota yang ditetapkan. Setelah anggota itu ditetapkan, kita perlu membentuk permutasi dari tiga anggota lainnya. Terdapat 3! permutasi dari 3 anggota.

Namun, sekarang kita telah mencacah terlalu banyak permutasi yang memiliki titik tetap, sehingga kita harus mengurangkan permutasi yang menetapkan dua anggota. Terdapat $\binom{4}{2}$ pilihan untuk kedua anggota tersebut dan, untuk setiap pasangan, terdapat 2! permutasi dari anggota yang tersisa. Pengurangan ini terlalu banyak, sehingga kita menambahkan kembali semua $\binom{4}{3}1!$ permutasi yang menetapkan 3 anggota. Terakhir, kurangkan $\binom{4}{4}0!$ permutasi (ingat bahwa $0! = 1$) yang menetapkan keempat anggota. Secara keseluruhan, banyaknya permutasi tanpa titik tetap dari 4 anggota adalah

$$4! - \left[\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}0!\right] = 24 - 15 = 9.$$

Tentu saja, kita dapat menggunakan rumus serupa untuk mencacah permutasi tanpa titik tetap dari berapa pun banyak anggota. Namun, semakin banyak anggotanya, semakin panjang rumusnya. Berikut contoh lain.

Contoh 3.8.5

Lima pria menghadiri sebuah pesta dan menitipkan topi mereka di dekat pintu. Pada akhir pesta, mereka mengambil topi dengan tergesa-gesa ketika keluar. Dengan berapa banyak cara hal ini dapat terjadi sehingga tidak seorang pun membawa pulang topinya sendiri?

Penyelesaian. Kita mencacah permutasi tanpa titik tetap dari 5 anggota. Terdapat 5! cara kelima pria mengambil topi dalam sembarang urutan—tetapi dalam banyak permutasi tersebut seseorang akan memperoleh topinya sendiri. Jadi, kita mengurangkan semua cara ketika satu atau lebih pria memperoleh topi sendiri. Dengan kata lain, kita mengurangkan permutasi yang memiliki titik tetap. Hal ini memerlukan prinsip inklusi–eksklusi. Jadi, jawabannya adalah

$$5! - \left[\binom{5}{1}4! - \binom{5}{2}3! + \binom{5}{3}2! - \binom{5}{4}1! + \binom{5}{5}0!\right].$$

3.8.4 Mencacah Fungsi

Selidiki!

1. Perhatikan semua fungsi $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$. Berapa banyak fungsi seluruhnya? Berapa banyak di antaranya yang injektif? Ingat, suatu fungsi merupakan injeksi jika setiap masukan dipetakan ke keluaran yang berbeda.

2. Perhatikan semua fungsi $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$. Berapa banyak *injeksi* yang memenuhi $f(x) \neq x$ untuk setiap $x \in \{1,2,3,4,5\}$?

   Teman Anda menyatakan bahwa jawabannya adalah

   $$5! - \left[\binom{5}{1}4! - \binom{5}{2}3! + \binom{5}{3}2! - \binom{5}{4}1! + \binom{5}{5}0!\right].$$

   Jelaskan mengapa jawaban ini benar.

3. Ingat bahwa *surjeksi* adalah fungsi yang setiap anggota kodomainnya berada dalam daerah hasil. Berapa banyak fungsi $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ yang surjektif? Gunakan prinsip inklusi–eksklusi!

Di seluruh bab ini, kita telah melihat bahwa banyak pertanyaan pencacahan dapat dirumuskan kembali sebagai pertanyaan tentang pencacahan fungsi dengan sifat tertentu. Hal ini masuk akal karena banyak pertanyaan pencacahan dapat dipandang sebagai pencacahan banyaknya cara memasangkan anggota suatu himpunan dengan anggota himpunan lain.

Contoh 3.8.6

Anda memutuskan untuk memberikan koleksi gim video Anda agar dapat menggunakan waktu dengan lebih baik untuk mempelajari matematika lanjut. Dengan berapa banyak cara hal ini dapat dilakukan jika:

1. Anda ingin membagikan 3 gim PS4 yang berbeda kepada 5 teman sehingga tidak ada teman yang menerima lebih dari satu gim?

2. Anda ingin membagikan 8 gim 3DS yang berbeda kepada 5 teman?

3. Anda ingin membagikan 8 gim SNES yang berbeda kepada 5 teman sehingga setiap teman menerima sedikitnya satu gim?

Dalam setiap kasus, modelkan pertanyaan pencacahan sebagai pertanyaan pencacahan fungsi.

Penyelesaian.

1. Kita harus menggunakan ketiga gim (sebut saja 1, 2, 3) sebagai domain dan kelima teman (a,b,c,d,e) sebagai kodomain; jika perannya dibalik, fungsi tidak akan terdefinisi pada seluruh domain ketika seorang teman tidak menerima gim. Jadi, berapa banyak fungsi berdomain $\{1, 2, 3\}$ dan berkodomain $\{a, b, c, d, e\}$? Jawabannya $5^3 = 125$, karena salah satu dari 5 anggota dapat menjadi citra 1, salah satu dari 5 anggota dapat menjadi citra 2, dan salah satu dari 5 anggota dapat menjadi citra 3.

   Namun, ini bukan jawaban yang tepat bagi masalah pencacahan kita, karena salah satu fungsi tersebut adalah $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \end{pmatrix}$; satu teman dapat menerima lebih dari satu gim. Yang sebenarnya perlu kita cacah ialah fungsi *injektif*. Hal ini menghasilkan $P(5, 3) = 60$ fungsi, yang merupakan jawaban bagi pertanyaan pencacahan kita.

2. Sekali lagi, kita harus menggunakan 8 gim sebagai domain dan 5 teman sebagai kodomain. Kita mencacah semua fungsi, sehingga banyaknya cara membagikan gim adalah 5^8.

3. Pertanyaan ini lebih sulit. Gunakan gim sebagai domain dan teman sebagai kodomain; pembalikan peran keduanya tidak menghasilkan fungsi. Syarat bahwa setiap teman menerima sedikitnya satu gim berarti bahwa setiap anggota kodomain berada dalam daerah hasil. Dengan kata lain, kita mencari fungsi *surjektif*. Bagaimana cara mencacahnya?

Dalam Contoh 3.2.13, kita melihat cara mencacah semua fungsi (menggunakan prinsip perkalian), dan dalam Contoh 3.4.7, kita mempelajari cara mencacah fungsi injektif (menggunakan permutasi). Fungsi surjektif tidak semudah itu dicacah, kecuali jika banyaknya anggota domain lebih kecil daripada banyaknya anggota kodomain; dalam kasus tersebut tidak ada fungsi surjektif.

Gagasannya adalah mencacah fungsi yang *tidak* surjektif, lalu mengurangkan hasilnya dari seluruh fungsi. Cara ini bekerja sangat baik ketika kodomain memiliki dua anggota.

Contoh 3.8.7

Berapa banyak fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b\}$ yang surjektif?

Penyelesaian. Terdapat 2^5 fungsi seluruhnya karena tersedia dua pilihan citra bagi masing-masing dari 5 anggota domain. Di antara fungsi-fungsi tersebut, fungsi yang *tidak* surjektif harus mengecualikan satu atau lebih anggota kodomain dari daerah hasil. Pertama, perhatikan fungsi yang daerah hasilnya tidak memuat a. Hal ini hanya dapat terjadi dengan satu cara: semua anggota dipetakan ke b. Sebagai alternatif, kita dapat mengecualikan b dari daerah hasil. Dalam hal itu, semua anggota dipetakan ke a, sehingga hanya

ada satu fungsi semacam ini. Inilah satu-satunya cara suatu fungsi dapat tidak surjektif; tidak ada fungsi yang mengecualikan a dan b sekaligus dari daerah hasil. Jadi, tepat terdapat $2^5 - 2$ fungsi surjektif.

Ketika kodomain memiliki tiga anggota, terdapat tiga pilihan anggota tunggal yang dapat dikecualikan dari daerah hasil. Selain itu, kita dapat memilih pasangan dua anggota untuk dikecualikan dari daerah hasil dan harus memastikan bahwa kita tidak mencacahnya terlalu banyak. Saatnya menggunakan prinsip inklusi–eksklusi!

Contoh 3.8.8

Berapa banyak fungsi $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c\}$ yang surjektif?

Penyelesaian. Sekali lagi, mulailah dari seluruh fungsi, yaitu 3^5, karena setiap satu dari lima anggota domain dapat dipetakan ke salah satu dari tiga anggota kodomain. Sekarang kita mencacah fungsi yang *tidak* surjektif.

Mulailah dengan mengecualikan a dari daerah hasil. Kemudian tersedia dua pilihan, b atau c, sebagai citra setiap satu dari lima anggota domain. Jadi, terdapat 2^5 fungsi yang mengecualikan a dari daerah hasil. Demikian pula, terdapat 2^5 fungsi yang mengecualikan b dan 2^5 fungsi lain yang mengecualikan c. Apakah kita sekarang telah mencacah semua fungsi yang tidak surjektif? Ya, tetapi sebenarnya beberapa di antaranya telah dicacah berkali-kali. Sebagai contoh, fungsi yang memetakan semuanya ke c termasuk salah satu dari 2^5 fungsi yang kita cacah ketika mengecualikan a, sekaligus salah satu dari 2^5 fungsi yang kita cacah ketika mengecualikan b. Kita harus mengurangkan semua fungsi yang secara khusus mengecualikan dua anggota dari daerah hasil. Terdapat 1 fungsi ketika kita mengecualikan a dan b (semuanya dipetakan ke c), satu fungsi ketika kita mengecualikan a dan c, serta satu fungsi ketika kita mengecualikan b dan c.

Kita sedang menggunakan prinsip inklusi–eksklusi. Untuk mencacah fungsi yang tidak surjektif, kita menjumlahkan secara terpisah fungsi yang mengecualikan a, b, dan c, lalu mengurangkan fungsi yang mengecualikan pasangan anggota. Berikutnya, kita seharusnya menambahkan kembali fungsi yang mengecualikan kelompok tiga anggota, tetapi tidak ada fungsi semacam itu. Jadi, banyaknya fungsi yang *tidak* surjektif adalah

$$2^5 + 2^5 + 2^5 - 1 - 1 - 1 + 0.$$

Cara yang mungkin lebih deskriptif untuk menuliskannya adalah

$$\binom{3}{1}2^5 - \binom{3}{2}1^5 + \binom{3}{3}0^5,$$

karena setiap suku 2^5 diperoleh dengan memilih 1 dari 3 anggota kodomain untuk dikecualikan dari daerah hasil, sedangkan setiap satu dari tiga suku 1^5

diperoleh dengan memilih 2 dari 3 anggota kodomain untuk dikecualikan. Menulis 1^5 alih-alih 1 juga masuk akal: kita mempunyai 1 pilihan citra bagi setiap satu dari 5 anggota domain.

Sekarang kita akhirnya dapat mencacah banyaknya fungsi surjektif:

$$3^5 - \left[\binom{3}{1}2^5 - \binom{3}{2}1^5\right] = 150.$$

Anda mungkin khawatir bahwa mencacah fungsi surjektif ketika kodomain memiliki lebih dari 3 anggota akan terlalu melelahkan. Kita perlu menggunakan prinsip inklusi–eksklusi, tetapi untuk lebih dari 3 himpunan rumusnya sangat panjang. Untungnya, kita mendapat kemudahan. Seperti yang terlihat dalam contoh di atas, banyaknya fungsi yang mengecualikan satu anggota dari daerah hasil selalu sama, apa pun anggota tunggal yang dikecualikan. Demikian pula, banyaknya fungsi yang mengecualikan sepasang anggota sama untuk setiap pasangan. Untuk kodomain yang lebih besar, pola yang sama muncul ketika kelompok 3, 4, atau lebih anggota dikecualikan. Jadi, alih-alih menambah atau mengurangkan setiap kelompok satu per satu, kita dapat menambah atau mengurangkan semuanya sekaligus asalkan mengetahui banyaknya kelompok. Cara ini bekerja seperti pada jenis pertanyaan pencacahan lain dalam bagian ini, hanya saja sekarang ukuran berbagai kombinasi himpunan berupa bilangan berpangkat, bukan koefisien binomial atau faktorial. Berikut yang terjadi ketika kodomain memiliki 4 dan 5 anggota.

Contoh 3.8.9

1. Berapa banyak fungsi $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d\}$ yang surjektif?
2. Berapa banyak fungsi $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d,e\}$ yang surjektif?

Penyelesaian.

1. Terdapat 4^5 fungsi seluruhnya; kita akan mengurangkan fungsi yang tidak surjektif. Kita dapat mengecualikan salah satu dari empat anggota kodomain, dan untuk setiap anggota yang dikecualikan tersisa 3^5 fungsi. Hal ini mencacah terlalu banyak, sehingga kita mengurangkan fungsi yang mengecualikan dua dari empat anggota kodomain; setiap pasangan menghasilkan 2^5 fungsi. Namun, pengurangan ini terlalu banyak, sehingga kita menambahkan kembali fungsi yang mengecualikan tiga dari empat anggota kodomain; setiap rangkap tiga menghasilkan 1^5 fungsi. Terdapat $\binom{4}{1}$ kelompok fungsi yang mengecualikan satu anggota, $\binom{4}{2}$ kelompok fungsi yang mengecualikan sepasang anggota, dan $\binom{4}{3}$ kelompok fungsi yang mengecualikan tiga anggota. Jadi, banyaknya

fungsi yang *tidak* surjektif adalah

$$\binom{4}{1}3^5 - \binom{4}{2}2^5 + \binom{4}{3}1^5.$$

Dengan demikian, banyaknya fungsi yang surjektif adalah

$$4^5 - \left[\binom{4}{1}3^5 - \binom{4}{2}2^5 + \binom{4}{3}1^5\right].$$

2. Banyaknya fungsi surjektif adalah

$$5^5 - \left[\binom{5}{1}4^5 - \binom{5}{2}3^5 + \binom{5}{3}2^5 - \binom{5}{4}1^5\right].$$

Kita mengambil seluruh 5^5 fungsi lalu mengurangkan semua yang tidak surjektif. Terdapat $\binom{5}{1}$ cara memilih satu anggota kodomain untuk dikecualikan dari daerah hasil, dan untuk setiap pilihan terdapat 4^5 fungsi. Namun, hal ini mencacah ganda, sehingga dengan prinsip inklusi–eksklusi kita mengurangkan fungsi yang mengecualikan dua anggota dari daerah hasil: terdapat $\binom{5}{2}$ pilihan bagi kedua anggota yang dikecualikan dan, untuk setiap pasangan, terdapat 3^5 fungsi. Pengurangan ini menghapus terlalu banyak fungsi, sehingga kita menambahkan kembali fungsi yang mengecualikan 3 anggota dari daerah hasil: terdapat $\binom{5}{3}$ pilihan tiga anggota yang dikecualikan dan 2^5 fungsi untuk setiap pilihan. Terakhir, untuk setiap satu dari $\binom{5}{4}$ pilihan 4 anggota, kita mengurangkan kembali 1 fungsi yang mengecualikan keempat anggota tersebut.

Jika Anda menghitung bilangan ini secara tepat, hasilnya 120 surjeksi. Kebetulan, bilangan ini juga sama dengan 5!. Hal tersebut mungkin tampak sebagai kebetulan yang luar biasa sampai kita menyadari bahwa setiap fungsi surjektif $f : X \to Y$ dengan nilai $|X| = |Y|$ yang berhingga harus merupakan bijeksi. Dalam kasus ini, banyaknya bijeksi selalu $|X|!$. Jadi, kita memperoleh *pembuktian kombinatorial* bagi identitas berikut:

$$n^n - \left[\binom{n}{1}(n-1)^n - \binom{n}{2}(n-2)^n + \cdots + \binom{n}{n-1}1^n\right] = n!.$$

Kita telah melihat bahwa pencacahan fungsi surjektif merupakan contoh lain yang baik bagi penggunaan lanjut prinsip inklusi–eksklusi. Selain itu, pencacahan fungsi injektif ternyata ekuivalen dengan pencacahan permutasi, sedangkan pencacahan semua fungsi memiliki penyelesaian yang serupa dengan masalah pencacahan ketika urutan penting tetapi pengulangan diperbolehkan, seperti mencacah banyaknya kata yang dapat dibentuk dari suatu himpunan huruf.

Ini bukan sekadar beberapa contoh tambahan dari teknik yang telah kita kembangkan dalam bab ini. Justru sebaliknya: semua yang telah kita pelajari dalam bab ini merupakan contoh *pencacahan fungsi*!

Contoh 3.8.10

Berapa banyak kata sepanjang 5 huruf yang dapat Anda bentuk menggunakan delapan huruf a sampai h? Berapa banyak yang tidak memuat huruf berulang?

Penyelesaian. Sekarang seharusnya tidak mengejutkan bahwa terdapat 8^5 kata dan $P(8,5)$ kata tanpa huruf berulang. Hal baru di sini adalah bahwa sebenarnya kita sedang mencacah fungsi. Untuk masalah pertama, kita mencacah semua fungsi dari $\{1,2,\ldots,5\}$ ke $\{a,b,\ldots,h\}$. Bilangan dalam domain menyatakan *posisi* huruf dalam kata, sedangkan kodomain memuat huruf yang dapat ditempatkan pada posisi tersebut. Jika kita mensyaratkan tidak ada huruf berulang, kita mencari fungsi injektif.

Jika A dan B adalah *sembarang* himpunan dengan $|A| = 5$ dan $|B| = 8$, banyaknya fungsi $f : A \to B$ adalah 8^5 dan banyaknya injeksi adalah $P(8,5)$. Jadi, jika Anda dapat merepresentasikan masalah pencacahan sebagai masalah pencacahan fungsi, sebagian besar pekerjaan telah selesai.

Contoh 3.8.11

Berapa banyak himpunan bagian dari $\{1,2,\ldots,9\}$? Berapa banyak string 9-bit (dengan sembarang bobot)?

Penyelesaian. Dalam Subbab 3.1, kita melihat bahwa jawaban bagi kedua pertanyaan ini adalah 2^9, karena kita dapat menjawab ya atau tidak (atau 0 atau 1) untuk setiap satu dari 9 anggota himpunan (posisi dalam string bit). Namun, 2^9 juga tampak seperti jawaban yang diperoleh dari pencacahan fungsi. Memang, jika kita mencacah semua fungsi $f : A \to B$ dengan $|A| = 9$ dan $|B| = 2$, tepat inilah hasilnya.

Hal ini masuk akal! Misalkan $A = \{1,2,\ldots,9\}$ dan $B = \{y,t\}$. Kita memberi setiap anggota himpunan salah satu jawaban, ya atau tidak. Dalam bahasa string bit, kita menggunakan 9 posisi dalam string bit sebagai domain dan himpunan $\{0,1\}$ sebagai kodomain.

Sejauh ini, kita belum menggunakan fungsi sebagai model bagi koefisien binomial (kombinasi). Pikirkan sejenak hubungan antara kombinasi dan permutasi, khususnya antara $\binom{9}{3}$ dan $P(9,3)$. Kita *memiliki* model fungsi bagi $P(9,3)$. Bilangan ini mencacah fungsi *injektif* dari himpunan beranggota 3, misalnya $\{1,2,3\}$, ke himpunan beranggota 9, misalnya $\{1,2,\ldots,9\}$. Terdapat 9 pilihan citra bagi anggota pertama domain, kemudian hanya 8 pilihan bagi anggota kedua, dan 7 pilihan bagi anggota ketiga. Sebagai contoh, fungsinya mungkin berbentuk

$$f(1) = 5 \qquad f(2) = 8 \qquad f(3) = 4.$$

Fungsi ini berbeda dari

$$f(1) = 4 \qquad f(2) = 5 \qquad f(3) = 8.$$

$P(9, 3)$ dengan tepat mencacah kedua fungsi tersebut sebagai hasil yang berbeda, sedangkan $\binom{9}{3}$ mencacahnya, bersama fungsi-fungsi lain, sebagai satu hasil saja. Dalam bahasa fungsi, $\binom{9}{3}$ sebenarnya hanya mencacah banyaknya daerah hasil yang mungkin bagi fungsi injektif. Hal ini tidak mengejutkan karena koefisien binomial mencacah himpunan bagian, dan daerah hasil merupakan suatu himpunan bagian yang mungkin dari kodomain.[5]

Meskipun kombinasi dapat ditafsirkan sebagai fungsi, saran yang lebih baik mungkin ialah menggunakan kombinasi (atau metode batang dan batu) ketika fungsi bukan cara yang tepat untuk menafsirkan pertanyaan pencacahan.

3.8.5 Soal Latihan

1. Menu satu dolar di restoran cepat saji bebas pajak favorit Anda memuat 7 hidangan. Anda mempunyai \$16 untuk dibelanjakan. Ada berapa kombinasi makanan berbeda yang dapat Anda beli jika Anda menghabiskan seluruh uang dan:

   a. Membeli sedikitnya satu dari setiap hidangan.

   b. Boleh tidak membeli beberapa hidangan.

   c. Tidak membeli lebih dari 2 porsi dari hidangan mana pun.

2. Setelah belajar matematika hingga larut malam, Anda dan teman-teman memutuskan untuk pergi ke restoran cepat saji Meksiko bebas pajak favorit Anda, *Burrito Chime*. Anda memutuskan untuk memesan dari menu satu dolar yang memuat 6 hidangan. Kelompok Anda mempunyai \$17 untuk dibelanjakan (dan akan menghabiskan semuanya).

   a. Ada berapa pesanan berbeda yang mungkin? (*Urutan* saat pesanan disampaikan tidak penting; yang penting hanya jenis dan banyaknya setiap hidangan yang dipesan.)

   b. Ada berapa pesanan berbeda yang mungkin jika Anda ingin membeli sedikitnya satu dari setiap hidangan?

   c. Ada berapa pesanan berbeda yang mungkin jika Anda tidak ingin membeli lebih dari 4 porsi dari hidangan mana pun?

3. Setelah satu pelajaran olahraga lagi, Anda ditugasi menyimpan 14 bola dodgeball yang identik ke dalam 5 wadah. Kali ini, setiap wadah hanya dapat menampung paling banyak 6 bola. Dengan berapa banyak cara Anda dapat

[5] Penafsiran kombinasi yang lebih canggih secara matematis ialah mendefinisikan dua fungsi injektif sebagai *ekuivalen* jika keduanya memiliki daerah hasil yang sama, lalu mencacah banyaknya kelas ekuivalensi menurut relasi ekuivalensi ini.

membereskannya?

4. Perhatikan persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$. Ada berapa solusi yang memenuhi $1 \leq x_i \leq 6$ untuk semua $i \in \{1, 2, 3, 4\}$?

5. Misalkan Anda hendak memberikan 7 bintang emas kepada beberapa dari 12 siswa berprestasi di kelas Anda. Setiap siswa dapat menerima paling banyak satu bintang. Ada berapa cara untuk melakukannya?

a. Gunakan segitiga Pascal untuk memperoleh jawaban numeriknya.

a. Gunakan prinsip inklusi–eksklusi.

6. Berapa banyak permutasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$ yang menetapkan tepat 1 anggota?

7. Sebanyak 12 perempuan menitipkan topi merah mereka di tempat penitipan barang sebuah museum. Ketika mereka hendak pulang, petugas mengembalikan topi-topi itu secara acak. Ada berapa cara agar tepat 8 perempuan menerima topinya sendiri (sedangkan 4 lainnya tidak)?

8. Grinch menyelinap ke sebuah ruangan yang berisi 8 hadiah Natal untuk 8 orang berbeda. Ia lalu menukar label nama pada hadiah-hadiah itu. Ada berapa cara ia dapat melakukannya jika:

a. Tidak satu pun hadiah boleh mendapatkan kembali label aslinya? Jelaskan arti setiap suku dalam jawaban Anda.

b. Tepat 4 hadiah mempertahankan label aslinya? Jelaskan.

c. Tepat 7 hadiah mempertahankan label aslinya? Jelaskan.

9. Perhatikan fungsi-fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{a, b, c, d, e, f\}$. Berapa banyak fungsi yang memenuhi $f(1) \neq c$ atau $f(2) \neq f$, atau keduanya?

10. Perhatikan himpunan A dan B dengan $|A| = 8$ dan $|B| = 5$. Berapa banyak fungsi surjektif $f : A \to B$?

11. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Berapa banyak fungsi injektif $f : A \to A$ yang memenuhi $f(x) \neq x$ untuk setiap $x \in A$?

3.8.6 Latihan Tambahan

1. Berdasarkan pertanyaan sebelumnya, berikan pembuktian kombinatorial bagi identitas berikut:

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \binom{n+k-(2j+1)}{k-2j}.$$

2. Ilustrasikan cara mencacah permutasi tanpa titik tetap dengan menuliskan semua permutasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$, lalu coret permutasi yang memiliki titik tetap. Dengan menggunakan prinsip inklusi–eksklusi, catat permutasi yang Anda coret lebih dari sekali.

3. Misalkan d_n adalah banyaknya permutasi tanpa titik tetap dari n objek. Sebagai contoh, dengan menggunakan teknik dalam bagian ini, kita memperoleh

$$d_3 = 3! - \left(\binom{3}{1}2! - \binom{3}{2}1! + \binom{3}{3}0!\right).$$

Kita dapat menggunakan rumus $\binom{n}{k}$ untuk menuliskan semuanya dalam bentuk faktorial. Setelah disederhanakan, untuk d_3 kita memperoleh

$$d_3 = 3!\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right).$$

Generalisasikan hasil ini untuk memperoleh rumus yang lebih sederhana bagi d_n. Bonus: Untuk n yang besar, kira-kira berapa proporsi di antara semua permutasi yang tidak memiliki titik tetap? Gunakan pengetahuan Anda tentang deret Taylor dari kalkulus.

3.9 Ringkasan Bab

Selidiki!

Misalkan Anda memiliki sekotak besar biskuit berbentuk hewan yang memuat banyak biskuit untuk masing-masing dari 10 jenis hewan berbeda. Untuk pertanyaan pencacahan berikut, perhatikan dengan saksama persamaan dan perbedaannya, lalu berikan jawaban. Setiap jawaban merupakan salah satu dari bentuk berikut:

$$P(10,6), \quad \binom{10}{6}, \quad 10^6, \quad \binom{15}{9}.$$

1. Berapa banyak parade hewan berisi 6 biskuit yang dapat Anda susun dalam barisan?
2. Berapa banyak parade berisi 6 biskuit yang dapat Anda susun sehingga jenis hewannya muncul menurut urutan abjad?
3. Dengan berapa banyak cara Anda dapat menyusun 6 jenis hewan berbeda menurut urutan abjad?
4. Dengan berapa banyak cara Anda dapat menyusun 6 jenis hewan berbeda jika urutannya boleh sembarang?
5. Dengan berapa banyak cara Anda dapat memberikan satu biskuit berbentuk hewan kepada masing-masing dari 6 anak?
6. Dengan berapa banyak cara Anda dapat memberikan satu biskuit berbentuk hewan kepada masing-masing dari 6 anak sehingga tidak ada dua anak yang menerima jenis hewan yang sama?
7. Dengan berapa banyak cara Anda dapat membagikan 6 biskuit berbentuk jerapah kepada 10 anak?
8. Tulislah sebuah pertanyaan tentang pembagian biskuit berbentuk hewan kepada anak-anak yang jawabannya $\binom{10}{6}$.

Dengan begitu banyak teknik pencacahan berbeda yang telah kita kuasai dalam bab ini, mungkin sulit menentukan teknik mana yang harus diterapkan dalam suatu keadaan. Memang, kita sangat mudah tertukar dan menggunakan metode pencacahan yang keliru bagi suatu masalah. Kemampuan Anda akan meningkat melalui latihan. Ketika berlatih, Anda mulai mengenali sejumlah pola yang membantu membedakan berbagai jenis masalah pencacahan. Berikut beberapa saran yang mungkin berguna ketika menentukan cara menangani suatu masalah pencacahan dan memeriksa apakah penyelesaian Anda benar.

- Ingatlah bahwa Anda sedang mencacah banyaknya objek dalam suatu *daftar hasil*. Tuliskan sebagian dari daftar tersebut. Tuliskan sebuah anggota di tengah daftar – bagaimana Anda menentukan bahwa anggota tersebut benar-benar termasuk dalam daftar? Apakah jawaban yang Anda usulkan dapat menghasilkan anggota tersebut lebih dari sekali?

- Jika pembentukan sebuah anggota dalam daftar melibatkan pemilihan sesuatu (misalnya, memilih huruf atau memilih posisi untuk menempatkan huruf), bolehkah objek yang Anda pilih berulang? Ingat, permutasi dan kombinasi memilih objek dari suatu himpunan *tanpa* pengulangan.

- Apakah urutan penting? Berhati-hatilah dan pastikan Anda memahami makna jawaban Anda. Biasanya kita mengatakan bahwa urutan penting jika pemilihan objek yang sama dalam urutan berbeda menghasilkan hasil yang berbeda. Kombinasi dan metode "batang dan batu" digunakan ketika urutan *tidak* penting.

- Terdapat empat kemungkinan terkait urutan dan pengulangan. Jika urutan penting dan pengulangan diperbolehkan, jawabannya berbentuk n^k. Jika urutan penting dan pengulangan tidak diperbolehkan, kita memperoleh $P(n, k)$. Jika urutan tidak penting dan pengulangan diperbolehkan, gunakan metode batang dan batu. Jika urutan tidak penting dan pengulangan tidak diperbolehkan, gunakan $\binom{n}{k}$. Namun, berhati-hatilah: pedoman ini hanya berlaku ketika Anda memilih objek, dan Anda harus memastikan dengan tepat apa yang dipilih sebelum menentukan kasus yang sesuai.

- Pikirkan cara merepresentasikan masalah pencacahan Anda menggunakan himpunan atau fungsi. Kita mengetahui cara mencacah berbagai jenis himpunan dan berbagai tipe fungsi.

- Seperti yang kita lihat dalam pembuktian kombinatorial, suatu masalah pencacahan sering kali dapat diselesaikan dengan lebih dari satu cara. Lakukan hal itu dan bandingkan jawaban numeriknya. Jika jawabannya tidak sama, ada sesuatu yang keliru.

Meskipun kita telah membahas banyak teknik pencacahan, kita sebenarnya baru menyentuh permukaan bidang luas *kombinatorika enumeratif*. Bahkan ketika Anda membaca ini, ada matematikawan yang melakukan penelitian orisinal dalam bidang tersebut. Pencacahan dapat menjadi sangat sulit.

Dalam bab berikutnya, kita akan mendekati pertanyaan pencacahan dari arah yang sangat berbeda dan, dengan demikian, menjawab tak berhingga banyak pertanyaan pencacahan sekaligus. Kita akan membentuk *barisan* jawaban bagi pertanyaan-pertanyaan yang saling berkaitan.

Tinjauan Bab

1. Anda memiliki 15 hadiah untuk diberikan kepada 5 anak. Ada berapa cara untuk membagikannya jika:

a. Hadiah-hadiah itu identik dan setiap anak menerima sedikitnya satu hadiah?

b. Hadiah-hadiah itu identik dan beberapa anak mungkin tidak menerima hadiah?

c. Hadiah-hadiah itu berbeda dan beberapa anak mungkin tidak menerima hadiah?

d. Hadiah-hadiah itu berbeda dan setiap anak menerima sedikitnya satu hadiah?

2. Untuk setiap persoalan pencacahan berikut, tentukan apakah jawabannya adalah $\binom{10}{4}$, $P(10,4)$, atau bukan keduanya. Jika jawaban Anda adalah "bukan keduanya", nyatakan jawaban yang seharusnya.

(a) Ada berapa lintasan kisi terpendek dari $(0,0)$ ke $(10,4)$?

(b) Jika Anda memiliki 10 dasi kupu-kupu dan ingin memilih 4 di antaranya untuk minggu depan, ada berapa pilihan?

(c) Misalkan Anda memiliki 10 dasi kupu-kupu dan akan mengenakan dasi yang berbeda pada masing-masing dari 4 hari berikutnya. Ada berapa pilihan?

(d) Jika Anda ingin mengenakan 4 dari 10 dasi kupu-kupu selama minggu depan (Senin hingga Minggu), ada berapa cara untuk melakukannya?

(e) Dari kelompok yang terdiri atas 10 teman sekelas, ada berapa cara untuk mengurutkan 4 teman terbaik Anda?

(f) Jika 10 mahasiswa datang ke ruang dosen mereka, tetapi hanya 4 orang yang dapat masuk sekaligus, ada berapa kombinasi berbeda yang terdiri atas 4 mahasiswa yang dapat menemui dosen terlebih dahulu?

(g) Ada berapa kata 4 huruf yang dapat dibentuk dari 10 huruf pertama alfabet?

(h) Ada berapa cara untuk membentuk kata "cake" dari 10 huruf pertama alfabet?

(i) Ada berapa cara membagikan 10 apel identik kepada 4 anak?

(j) Jika Anda memiliki 10 anak (dan tinggal di dalam sepatu) serta 4 jenis sereal, ada berapa cara anak-anak Anda dapat menyantap sarapan?

(k) Ada berapa cara menyusun tepat 4 angka satu dalam string yang terdiri atas 10 digit biner?

(l) Anda ingin memilih 4 bilangan satu digit yang berbeda sebagai pilihan lotre. Ada berapa pilihan?

(m) Sepuluh anak menginginkan es krim. Anda memiliki 4 jenis. Ada berapa cara untuk memberikan es krim sebanyak yang mereka inginkan kepada anak-anak tersebut?

(n) Ada berapa fungsi satu-satu dari $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ke $\{a, b, c, d\}$?

(o) Ada berapa fungsi surjektif dari $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ke $\{a, b, c, d\}$?

(p) Masing-masing dari 10 dasi kupu-kupu Anda cocok dengan 4 pasang suspender. Ada berapa setelan pakaian yang dapat Anda buat?

(q) Setelah pesta, masing-masing dari 10 anak memilih satu dari 4 suvenir pesta. Ada berapa hasil yang mungkin?

(r) Ada berapa subhimpunan 6-elemen dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 10\}$?

(s) Ada berapa cara membagi 11 anak ke dalam 5 tim yang memiliki nama berbeda?

(t) Ada berapa solusi bagi $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 6$ jika setiap x_i merupakan bilangan bulat taknegatif?

(u) Grup musik Anda melakukan tur. Terdapat 10 kota yang dapat dicapai dengan berkendara, tetapi waktu hanya cukup untuk tampil di 4 kota. Ada berapa pilihan kota untuk tur Anda?

(v) Ada berapa urutan berbeda untuk tampil di 4 kota yang Anda pilih?

(w) Dari 10 jenis sereal sarapan yang tersedia, Anda ingin menyantap 4 mangkuk. Ada berapa cara untuk melakukannya?

(x) Terdapat 10 jenis kue kering yang tersedia. Anda ingin membuat tumpukan 4 kue kering. Ada berapa tumpukan berbeda yang dapat Anda buat?

(y) Dari rumah Anda di (0,0), Anda ingin pergi ke toko donat di (5,4) atau toko donat di (3,6). Ada berapa lintasan yang dapat Anda tempuh?

(z) Ada berapa bilangan 10 digit yang tidak memuat substring yang terdiri atas 4 digit identik berturut-turut?

3. Ingatlah bahwa Anda memiliki 9 dasi panjang biasa dan 5 dasi kupu-kupu. Anda menyadari bahwa mengenakan lebih dari dua dasi untuk wawancara sekolah tinggi badut tidak menjadi masalah.

a. Anda harus memilih dasi yang akan dikenakan. Anda boleh tidak mengenakan dasi sama sekali atau mengenakan semuanya. Berapa banyak pilihan yang tersedia?

b. Jika Anda ingin mengenakan sedikitnya satu dasi panjang dan satu dasi kupu-kupu, tetapi boleh mengenakan semua dasi, berapa banyak pilihan himpunan dasi yang dapat dikenakan?

c. Berapa banyak pilihan dasi yang dapat dikenakan jika Anda mengenakan tepat 3 dari 9 dasi panjang dan 2 dari 5 dasi kupu-kupu?

d. Setelah memilih 3 dasi panjang dan 2 dasi kupu-kupu, dalam berapa urutan Anda dapat mengenakannya jika dasi paling luar harus berupa salah satu dasi kupu-kupu?

4. Berikan suatu persoalan pencacahan yang jawabannya adalah $8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Berikan persoalan lain yang jawabannya adalah $8 + 3 + 3 + 5$.

5. Perhatikan bilangan berbentuk $\alpha = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, yang terdiri atas n digit, dengan setiap digit berasal dari himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Sebagai contoh, jika $n = 4$, bilangan $\alpha = a_1 a_2 a_3 a_4$ memiliki 4 digit dari himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Misalkan $n = 11$.

a. Ada berapa banyak bilangan semacam itu?

b. Ada berapa banyak bilangan semacam itu yang *jumlah* digitnya genap?

c. Ada berapa banyak bilangan semacam itu yang memuat lebih banyak digit genap daripada digit ganjil?

6. Dalam sebuah survei kecil baru-baru ini terhadap penumpang pesawat, 27 orang mengatakan bahwa mereka pernah terbang dengan American pada tahun lalu, 20 pernah terbang dengan JetBlue, dan 29 pernah terbang dengan Continental. Di antara mereka, 13 orang pernah terbang dengan American dan JetBlue, 10 pernah terbang dengan JetBlue dan Continental, serta 11 pernah terbang dengan American dan Continental. Sebanyak 6 penumpang pernah terbang dengan ketiga maskapai tersebut.

Berapa banyak penumpang yang disurvei? (Anggap bahwa hasil di atas mencakup seluruh responden survei.)

7. Ingatlah bahwa string bit sepanjang 10 adalah string digit biner yang panjangnya 10.

a. Berapa banyak string bit sepanjang 10 seluruhnya?

b. Berapa banyak string bit sepanjang 10 yang berbobot 5?

c. Berapa banyak himpunan bagian dari {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} yang memuat tepat 5 anggota?

8. Berapakah koefisien x^{10} dalam ekspansi $(x+3)^{15} + x^3(x+5)^{21}$?

9. Berapa banyak kata sepanjang 10 huruf yang memuat tepat 3 huruf vokal? (Sebagai contoh, kata sepanjang 8 huruf dengan 5 huruf vokal adalah "aaioobtt"; dalam latihan ini, jangan anggap "y" sebagai huruf vokal.)

Bagaimana jika pengulangan huruf tidak diperbolehkan?

10. Untuk setiap butir berikut, tentukan banyaknya lintasan kisi terpendek dari $(4,4)$ ke $(10,10)$ yang:

a. melewati titik $(6,5)$.

b. menghindari (tidak melewati) titik $(9,9)$.

c. melewati $(6,5)$ atau $(9,9)$ (atau keduanya).

11. Anda tinggal di Kota Kisi pada persimpangan Jalan 2 dan Jalan 4, dan bekerja di sebuah gedung pada persimpangan Jalan 17 dan Jalan 20. Berapa banyak rute yang membawa Anda dari rumah ke tempat kerja, lalu kembali ke rumah melalui rute yang berbeda?

12. Berapa banyak string bit sepanjang 11 yang diawali dengan 101 atau diakhiri dengan 10, atau keduanya?

13. Berapa banyak string bit sepanjang 15 dan berbobot 5 yang diawali dengan 101 atau diakhiri dengan 10, atau keduanya?

14. Kita akan membentuk kata sepanjang 5 huruf dari himpunan huruf $a, b, c, d, e, f \ldots$. Tepat 5 huruf pertama tersedia dan semua huruf tersebut harus digunakan.

a. Berapa banyak kata sepanjang 5 huruf tanpa pengulangan yang tidak memuat subkata "bad" sebagai tiga huruf berurutan?

a. Berapa banyak kata yang tidak memuat subkata "bad" sebagai huruf-huruf yang tidak harus berurutan, tetapi muncul dalam urutan tersebut?

15. Jelaskan dengan menggunakan lintasan kisi mengapa $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

16. Misalkan Anda memiliki 16 lembar uang satu dolar untuk dibagikan sebagai hadiah kepada 6 mahasiswa matematika diskret terbaik Anda. Berapa banyak cara pembagiannya jika:

a. masing-masing dari 6 mahasiswa memperoleh sedikitnya 1 dolar?

b. beberapa mahasiswa boleh tidak memperoleh apa pun?

c. setiap mahasiswa memperoleh sedikitnya 1 dolar, tetapi tidak lebih dari 8 dolar?

17. Berapa banyak fungsi $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi syarat berikut?

a. $f(1) = 1$ atau $f(2) = 2$ (atau keduanya)?

b. $f(1) \neq 1$ atau $f(2) \neq 2$ (atau keduanya)?

c. $f(1) \neq 1$ *dan* $f(2) \neq 2$, serta f injektif?

d. f surjektif, tetapi $\forall x \in \{1, 2, \ldots, 4\}$, $f(x) \neq x$?

18. Berapa banyak fungsi yang memetakan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *secara surjektif* ke $\{1, 2, 3\}$ (dengan kata lain, berapa banyak *fungsi surjektif* yang ada)?

19. Untuk berterima kasih kepada dosen matematika Anda atas pengajarannya sepanjang semester, Anda memutuskan membuatkan kue kering. Anda mengetahui cara membuat 13 jenis kue kering yang berbeda.

a. Jika Anda ingin memberikan 8 jenis kue kering yang berbeda, berapa banyak kombinasi jenis kue yang dapat dipilih? Jelaskan jawaban Anda.

b. Agar lebih menarik, Anda memutuskan membuat jumlah kue yang berbeda untuk setiap jenis. Jika Anda kembali ingin memilih 8 jenis kue, berapa banyak cara untuk memilih jenis-jenis tersebut dan menentukan jenis mana yang dibuat paling banyak, kedua terbanyak, dan seterusnya? Jelaskan jawaban Anda.

c. Anda berubah pikiran lagi. Kali ini Anda memutuskan membuat seluruhnya 23 kue. Setiap kue dapat berupa salah satu dari 13 jenis yang dapat Anda buat (dan beberapa jenis boleh tidak dibuat). Berapa banyak pilihan yang ada? Jelaskan.

d. Anda menyadari bahwa rencana sebelumnya belum memperhitungkan penyajian. Kali ini Anda kembali ingin membuat 23 kue, dan setiap kue dapat berupa salah satu dari 13 jenis. Namun, sekarang Anda berencana membentuk kue-kue tersebut menjadi angka 1, 2, ..., 23. Berapa banyak pilihan jenis kue untuk setiap bentuk angka? Jelaskan.

e. Satu-satunya kekurangan rencana terakhir adalah bahwa dosen Anda mungkin tidak dapat mencicipi semua 13 jenis kue. Berapa banyak pilihan jenis kue untuk setiap bentuk angka jika setiap jenis harus muncul sedikitnya sekali? Jelaskan.

20. Untuk bagian mana dari soal sebelumnya (Latihan 3.9.19) masuk akal untuk menafsirkan persoalan pencacahan sebagai pencacahan sejumlah fungsi? Nyatakan domain dan kodomain yang sesuai, serta apakah Anda mencacah semua fungsi, fungsi injektif, fungsi surjektif, atau jenis lainnya.

Bab 4

Barisan

Kita telah menjumpai barisan *berhingga* sebagai struktur diskret dan sebagai objek yang dapat dicacah. Dalam bab ini, kita akan membahas barisan bilangan yang mungkin *tak berhingga*. Jika barisan itu sendiri tak berhingga, tidak lagi masuk akal untuk menanyakan ada berapa banyak barisan yang mungkin, tetapi masih terdapat hubungan menarik dengan pencacahan: setiap suku dalam barisan dapat menyatakan jawaban atas suatu pertanyaan pencacahan!

4.1 Mendeskripsikan Barisan

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menggunakan notasi yang tepat untuk menyatakan suatu barisan.
2. Menjelaskan perbedaan antara rumus tertutup dan definisi rekursif untuk suatu barisan.
3. Menentukan definisi rekursif suatu barisan berdasarkan deskripsinya.

4.1.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Menurut legenda, terdapat sebuah biara di Hanoi dengan aula besar yang berisi tiga tiang tinggi. Pada tiang pertama tersusun 64 cakram raksasa (atau cincin pipih), semuanya berbeda ukuran, dari yang terbesar hingga yang terkecil. Selama bergenerasi-generasi, para rahib di biara itu memindahkan cakram-cakram tersebut dalam upaya memindahkan seluruh tumpukan ke tiang ketiga. Namun, karena ukuran cakram-cakram itu, para rahib hanya dapat memindahkan satu cakram setiap kali. Setiap cakram harus diletakkan pada salah satu tiang sebelum cakram berikutnya dipindahkan. Selain itu, karena cakram-cakram tersebut begitu berat dan rapuh, para rahib tidak boleh meletakkan cakram yang lebih besar di atas cakram yang lebih kecil. Ketika para rahib akhirnya menyelesaikan tugas mereka, dunia akan berakhir.

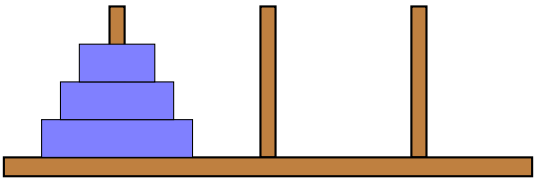
Tugas Anda: Tentukan berapa lama lagi sebelum kita perlu mulai

mencemaskan akhir dunia.

Teka-teki ini disebut *Menara Hanoi*. Tugas Anda adalah menentukan jumlah minimum langkah untuk menyelesaikan teka-teki tersebut. Ini tentu terdengar seperti masalah pencacahan. Mungkin Anda sudah mempunyai jawabannya? Jika belum, apa lagi yang dapat kita coba?

Jawaban teka-teki ini bergantung pada banyaknya cakram yang perlu dipindahkan. Kita dapat menjawabnya terlebih dahulu untuk 1 cakram, lalu 2, kemudian 3, dan seterusnya. Jika semua jawaban untuk setiap banyak cakram kita daftarkan, kita memperoleh suatu **barisan** bilangan. Suku ke-n dalam barisan tersebut merupakan jawaban atas pertanyaan, "Berapa jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-teki Menara Hanoi dengan n cakram?"

Cobalah. Tentukan jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk memindahkan tumpukan n cakram ke tiang lain untuk berbagai nilai n.



Gambar 4.1.1 Teka-teki Menara Hanoi.

Anda mungkin bertanya-tanya mengapa kita membuat barisan semacam itu alih-alih langsung menjawab pertanyaannya. Dengan mengamati bagaimana barisan bilangan itu tumbuh, kita memperoleh pemahaman yang lebih mendalam tentang masalahnya. Jumlah langkah yang diperlukan untuk sedikit cakram mudah dihitung. Setelah itu, kita dapat mencari pola pada beberapa suku pertama barisan tersebut. Pola ini diharapkan menunjukkan cara menentukan suku ke-n barisan, yang merupakan jawaban atas pertanyaan kita. Tentu saja, kita juga perlu memverifikasi bahwa pola yang kita duga benar dan bahwa pola tersebut benar-benar menghasilkan suku ke-n yang dimaksud. Namun, mustahil membuktikan bahwa suatu rumus benar jika kita belum mempunyai rumus yang akan dibuktikan.

Pada bagian ini, kita akan mempelajari berbagai cara menyatakan barisan bilangan serta dua jenis rumus yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan barisan. Kita juga akan melihat bahwa barisan merupakan objek matematika yang menarik untuk dipelajari tersendiri.

Kegiatan Pratinjau

Mari mengenal barisan yang muncul dari teka-teki Menara Hanoi.

1.

(a) Berapa jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk memindahkan

2 cakram ke tiang lain?

(b) Berapa jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk memindahkan 3 cakram ke tiang lain?

(c) Berapa jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk memindahkan 4 cakram ke tiang lain?

(d) Untuk menentukan jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk memindahkan 5 cakram ke tiang lain, mari kaitkan tugas ini dengan tugas memindahkan 4 cakram. Berapa langkah yang diperlukan untuk masing-masing tugas berikut?

a. Pindahkan 4 cakram terkecil ke tiang kedua: _____ langkah.

b. Pindahkan cakram terbesar ke tiang ketiga: _____ langkah.

c. Pindahkan 4 cakram terkecil ke tiang ketiga (di atas cakram terbesar): _____ langkah.

Jadi, jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk memindahkan lima cakram adalah: _____

(e) Generalisasikan pengamatan terakhir. Misalkan a_n menyatakan jumlah minimum langkah yang diperlukan untuk memindahkan n cakram dari tiang awal ke tiang lain. Dengan demikian, a_{n-1} menyatakan jumlah langkah yang diperlukan untuk memindahkan $n-1$ cakram ke tiang lain.

Berikan rumus untuk a_n berdasarkan a_{n-1}.

4.1.2 Barisan dan Rumus

Suatu **barisan** hanyalah daftar bilangan yang terurut. Berbeda dengan suatu *himpunan* bilangan, urutan bilangan dalam barisan merupakan ciri penting barisan tersebut. Oleh karena itu, ketika kita menggunakan variabel untuk menyatakan suku-suku suatu barisan, bentuknya akan seperti ini:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Untuk merujuk pada *seluruh* barisan sekaligus, kita akan menulis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ atau $(a_n)_{n\geq 0}$, atau kadang-kadang, jika tidak terlalu cermat, cukup (a_n) (dalam hal ini kita menganggap barisan dimulai dengan a_0).

Kita dapat mengganti a dengan huruf lain, dan kadang-kadang kita menghilangkan a_0 sehingga barisan dimulai dengan a_1. Dalam hal itu, kita menggunakan $(a_n)_{n\geq 1}$ untuk merujuk pada barisan secara keseluruhan. Bilangan-bilangan pada subskrip disebut **indeks** (bentuk tunggalnya juga **indeks**).

Meskipun kita sering menganggap barisan hanya sebagai daftar bilangan terurut, barisan sebenarnya merupakan salah satu jenis fungsi. Secara khusus, barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ adalah fungsi dengan domain $\mathbb{N}$, dengan a_n sebagai citra bilangan asli n. Kelak

kita akan memanipulasi barisan dengan cara yang hampir sama seperti Anda memanipulasi fungsi dalam aljabar atau kalkulus. Kita dapat menggeser suatu barisan ke atas atau ke bawah, menjumlahkan dua barisan, atau menanyakan laju perubahan suatu barisan. Semua ini dilakukan persis seperti pada fungsi.

Meskipun definisi matematis yang ketat tetap perlu diingat, kita sering mendeskripsikan barisan dengan menuliskan beberapa suku pertamanya.

Contoh 4.1.2

Dapatkah Anda menentukan suku berikutnya dalam barisan-barisan berikut?

1. $7, 7, 7, 7, 7, \ldots$
2. $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
3. $1, 5, 2, 10, 3, 15, \ldots$
4. $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$
5. $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$
6. $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$
7. $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$
8. $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$
9. $3, 2, 1, 0, -1, \ldots$
10. $1, 1, 2, 6, \ldots$

Penyelesaian. Tidak, Anda tidak dapat menentukannya.

Anda mungkin menduga bahwa suku-suku berikutnya adalah:

1. 7
2. -3
3. 4
4. 64
5. 49
6. 34
7. 28
8. 17
9. -2
10. 24

Memang, itulah suku-suku berikutnya dari barisan yang saya bayangkan ketika menyusun contoh ini, tetapi tidak ada cara untuk memastikan bahwa jawaban tersebut benar.

Meskipun demikian, kita akan sering melakukan hal ini. Jika beberapa suku pertama suatu barisan diberikan, kita dapat mengamati pola barisan tersebut untuk menduga suku-suku berikutnya.

Karena berapa pun banyaknya suku awal tidak cukup untuk memastikan barisan mana yang sedang kita hadapi, kita memerlukan cara lain untuk menentukan suatu barisan. Kita akan mempertimbangkan dua cara utama berikut:

Definisi 4.1.3 Rumus tertutup.

Suatu **rumus tertutup** bagi barisan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adalah rumus untuk a_n yang menggunakan sejumlah berhingga operasi pada n, dengan banyak operasi yang tetap. Inilah yang biasanya Anda anggap sebagai rumus dalam n, seolah-olah Anda mendefinisikan fungsi dalam n (karena memang itulah yang Anda lakukan).

Definisi 4.1.4 Definisi rekursif.

Suatu **definisi rekursif** (kadang-kadang disebut **definisi induktif**) untuk barisan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ terdiri atas sebuah **relasi rekurensi** : persamaan yang mengaitkan suatu suku barisan dengan suku-suku sebelumnya (suku dengan indeks lebih kecil), serta suatu **syarat awal**: daftar beberapa suku barisan (banyaknya satu lebih sedikit daripada banyak suku yang muncul dalam relasi rekurensi).

Gagasan ini lebih mudah dipahami melalui sebuah contoh:

Contoh 4.1.5

Berikut beberapa rumus tertutup untuk barisan:

- $a_n = n^2$.
- $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $a_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Perhatikan bahwa pada setiap rumus, jika n diberikan, Anda dapat menghitung a_n secara langsung: cukup substitusikan n. Sebagai contoh, untuk menentukan a_3 pada barisan kedua, cukup hitung $a_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$.

Berikut beberapa definisi rekursif untuk barisan:

- $a_n = 2a_{n-1}$ dengan $a_0 = 1$.
- $a_n = 2a_{n-1}$ dengan $a_0 = 27$.
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.

Dalam rumus-rumus ini, jika n diberikan, Anda tidak dapat menghitung a_n secara langsung; terlebih dahulu Anda perlu menentukan a_{n-1} (atau a_{n-1} dan a_{n-2}). Pada barisan kedua, untuk menentukan a_3 Anda perlu menghitung $2a_2$, tetapi untuk menentukan $a_2 = 2a_1$ kita perlu mengetahui $a_1 = 2a_0$. Nilai ini kita ketahui, sehingga kita dapat menelusuri persamaan-persamaan tersebut untuk memperoleh $a_1 = 54$, $a_2 = 108$, dan akhirnya $a_3 = 216$.

Anda mungkin bertanya-tanya mengapa kita perlu menggunakan definisi rekursif untuk barisan. Lagi pula, menentukan a_n dengan definisi rekursif lebih sulit daripada dengan rumus tertutup. Hal itu benar, tetapi menentukan rumus tertutup suatu barisan juga lebih sulit daripada menentukan definisi rekursifnya. Jadi, untuk memperoleh rumus tertutup yang berguna, kita dapat terlebih dahulu menentukan

definisi rekursif, lalu menggunakannya untuk menentukan rumus tertutup.

Contoh 4.1.6

Karena Anda berhasil mengalahkan naga jahat, sang raja menjanjikan hadiah satu butir beras pada hari pertama, lalu dua kali banyaknya butir pada hari sebelumnya untuk setiap hari berikutnya sampai akhir bulan.

Agar tidak tertipu, Anda menawar hingga sang raja juga setuju menambahkan satu butir beras lagi setiap hari.

Berapa butir beras yang akan Anda terima pada hari ke-30?

Penyelesaian. Kita dapat menuliskan beberapa suku pertama barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ yang menyatakan banyaknya butir beras yang Anda terima pada hari ke-n. Kita memperoleh

$$1, 3, 7, 15, \ldots,$$

sebab, misalnya, pada hari ke-4, banyaknya butir beras pada hari ke-3 (ketujuh butir itu) digandakan lalu ditambah 1 sehingga menjadi 15. Pada hari berikutnya Anda akan menerima $2 \cdot 15 + 1 = 31$ butir.

Dengan menghitung nilai-nilai tersebut, kita segera melihat relasi rekurensinya:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

Hal ini sesuai dengan masalah yang dimodelkan oleh barisan: setiap hari kita menggandakan banyaknya butir, lalu menambahkan 1. Relasi rekurensinya dapat langsung dibaca dari masalah tersebut.

Pertanyaan semula menanyakan a_{30}. Kita dapat menentukannya dengan relasi rekurensi, tetapi kita harus terlebih dahulu menentukan a_{29}; untuk itu kita memerlukan a_{28}, yang terlebih dahulu memerlukan a_{27}, dan seterusnya. Kita tentu dapat menelusurinya hingga a_4, yang telah kita peroleh, tetapi pekerjaan itu sangat panjang.

Akan jauh lebih mudah jika kita mempunyai rumus tertutup. Jika kita dapat *menyelesaikan relasi rekurensi* dan menemukan rumus tertutup tersebut, kita cukup menyubstitusikan 30 untuk n.

Mari menduga. Barisan ini tampak dekat dengan $2, 4, 8, 16, \ldots$, yang memiliki rumus tertutup 2^n. Setiap suku barisan itu satu lebih besar daripada suku barisan kita, sehingga kita dapat menduga bahwa

$$a_n = 2^n - 1.$$

Perlu ditegaskan bahwa saat ini kita belum mempunyai alasan kuat untuk percaya bahwa dugaan ini benar, tetapi mungkin alasan itu akan kita peroleh nanti dalam bab ini. Namun, jika dugaan tersebut *memang* benar, masalah kita selesai (dan kita pasti sudah sangat bosan dengan beras):

$$a_{30} = 2^{30} - 1 = 1,073,741,823.$$

Ini bukan berarti definisi rekursif tidak berguna untuk menentukan a_n. Jika suatu definisi rekursif diberikan, Anda selalu dapat menghitung a_n; hanya saja prosesnya mungkin memerlukan waktu.

Contoh 4.1.7

Tentukan a_6 dalam barisan yang didefinisikan oleh $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dengan $a_0 = 3$ dan $a_1 = 4$.

Penyelesaian. Kita mengetahui bahwa $a_6 = 2a_5 - a_4$. Jadi, untuk menentukan a_6, kita perlu menentukan a_5 dan a_4. Kita mempunyai

$$a_5 = 2a_4 - a_3 \qquad \text{dan} \qquad a_4 = 2a_3 - a_2,$$

sehingga kita hanya perlu menentukan a_3 dan a_2. Tentu saja,

$$a_3 = 2a_2 - a_1 \qquad \text{dan} \qquad a_2 = 2a_1 - a_0,$$

sehingga kita hanya perlu menentukan a_1 dan a_0. Kedua nilai ini diberikan. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= 4 \\ a_2 &= 2 \cdot 4 - 3 = 5 \\ a_3 &= 2 \cdot 5 - 4 = 6 \\ a_4 &= 2 \cdot 6 - 5 = 7 \\ a_5 &= 2 \cdot 7 - 6 = 8 \\ a_6 &= 2 \cdot 8 - 7 = 9. \end{aligned}$$

Sekarang kita dapat menduga rumus tertutup untuk suku ke-n barisan tersebut: $a_n = n + 3$. Untuk memastikan bahwa rumus ini selalu berlaku, kita dapat menyubstitusikannya ke dalam relasi rekurensi:

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2((n-1)+3) - ((n-2)+3) \\ &= 2n + 4 - n - 1 \\ &= n + 3 \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Namun, hal itu belum cukup karena mungkin terdapat beberapa rumus tertutup yang memenuhi relasi rekurensi yang sama; kita juga harus memeriksa bahwa rumus tertutup kita sesuai dengan suku-suku awal barisan. Karena $a_0 = 0 + 3 = 3$ dan $a_1 = 1 + 3 = 4$ merupakan syarat awal yang benar, kini kita dapat menyimpulkan bahwa rumus tertutup kita benar.

Menentukan rumus tertutup, atau bahkan definisi rekursif, untuk barisan

bukanlah hal sepele. Tidak ada satu metode tunggal untuk melakukannya. Seperti ketika menghitung integral atau menyelesaikan persamaan diferensial, kita perlu mempunyai berbagai teknik yang dapat diterapkan, tetapi kadang-kadang memang tidak ada jawaban yang mudah.

Salah satu metode yang berguna ialah mengaitkan barisan yang diberikan dengan barisan lain yang rumus tertutupnya telah kita ketahui. Untuk melakukannya, kita memerlukan beberapa "barisan yang dikenal" sebagai pembanding bagi barisan yang belum diketahui. Berikut beberapa barisan yang sebaiknya Anda kenal. Kita akan memverifikasi rumus-rumusnya pada bagian-bagian berikutnya.

Barisan yang Umum.

$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$	**Bilangan kuadrat**. Barisan $(s_n)_{n\geq 1}$ memiliki rumus tertutup $s_n = n^2$
$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$	**Bilangan segitiga**. Barisan $(T_n)_{n\geq 1}$ memiliki rumus tertutup $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$	**Pangkat-pangkat 2**. Barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ dengan rumus tertutup $a_n = 2^n$.
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$	**Bilangan Fibonacci** (atau barisan Fibonacci), yang didefinisikan secara rekursif oleh $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dengan $F_1 = F_2 = 1$.

Contoh 4.1.8

Gunakan rumus $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ dan $a_n = 2^n$ untuk menentukan rumus tertutup yang sesuai dengan barisan-barisan berikut. Anggap bahwa setiap suku pertama bersesuaian dengan $n = 0$.

1. (b_n): $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, \ldots$.
2. (c_n): $3, 5, 9, 17, 33, \ldots$.
3. (d_n): $0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$.
4. (e_n): $3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$.
5. (f_n): $0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$.
6. (g_n) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$.
7. (h_n): $6, 10, 18, 34, 66, \ldots$.
8. (j_n): $15, 33, 57, 87, 123, \ldots$.

Penyelesaian. Kita ingin membandingkan barisan-barisan ini dengan bilangan segitiga $(0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$ ketika dimulai dengan $n = 0$, serta dengan pangkat-pangkat 2: $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$.

1. $(1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, \ldots)$. Perhatikan bahwa jika 1 dikurangkan dari setiap suku, kita memperoleh barisan (T_n). Jadi, $b_n = T_n + 1$. Dengan demikian, rumus tertutupnya adalah $b_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$. Pemeriksaan singkat untuk beberapa nilai awal n menegaskan bahwa rumus ini benar.

2. $(3, 5, 9, 17, 33, \ldots)$. Setiap suku dalam barisan ini satu lebih besar daripada suatu pangkat 2, sehingga kita mungkin menduga rumus tertutupnya adalah $c_n = a_n + 1 = 2^n + 1$. Namun, jika dicoba, kita memperoleh $c_0 = 2^0 + 1 = 2$ dan $c_1 = 2^1 + 1 = 3$. Hasilnya meleset karena indeksnya bergeser. Yang sebenarnya kita perlukan adalah $c_n = a_{n+1} + 1$, sehingga $c_n = 2^{n+1} + 1$.

3. $(0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots)$. Perhatikan bahwa semua suku ini genap. Apa yang terjadi jika kita mengeluarkan faktor 2? Kita memperoleh (T_n)! Lebih tepatnya, $d_n/2 = T_n$, sehingga barisan ini mempunyai rumus tertutup $d_n = n(n + 1)$.

4. $(3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots)$. Semua suku ini merupakan bilangan segitiga. Namun, kita memulai dengan 3 sebagai suku awal, bukan sebagai suku ketiga. Jadi, jika kita dapat menyubstitusikan 2 alih-alih 0 ke dalam rumus T_n, persoalannya selesai. Oleh karena itu, rumus tertutupnya adalah $e_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$ (dengan $n + 3$ berasal dari $(n + 2) + 1$). Jika barisan dipandang sebagai fungsi, kita melakukan pergeseran horizontal sebesar 2: $e_n = T_{n+2}$, yang menyebabkan grafik bergeser 2 satuan ke kiri.

5. $(0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$. Coba tambahkan 1 pada setiap suku; kita memperoleh pangkat-pangkat 2. Anda mungkin menduga hal ini karena setiap suku sedikit lebih besar daripada dua kali suku sebelumnya (sedangkan setiap pangkat 2 *tepat* dua kali suku sebelumnya). Rumus tertutupnya: $f_n = 2^n - 1$.

6. $(3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$. Bilangan-bilangan ini juga berlipat dua setiap kali, dan semuanya merupakan kelipatan 3. Membagi setiap bilangan dengan 3 menghasilkan 1, 2, 4, 8, ... Nah! Kita memperoleh rumus tertutup $g_n = 3 \cdot 2^n$.

7. $(6, 10, 18, 34, 66, \ldots)$. Dari satu suku ke suku berikutnya, kita hampir menggandakan setiap suku. Jadi, mungkin barisan ini dapat kita kaitkan kembali dengan 2^n. Benar, setiap suku 2 lebih besar daripada suatu pangkat 2. Dengan demikian, kita memperoleh $h_n = 2^{n+2} + 2$ ($n + 2$ muncul karena suku pertama 2 lebih besar daripada 2^2, bukan 2^0).

Sebagai alternatif, kita dapat mengaitkan barisan ini dengan barisan kedua dalam contoh ini: mulai dari $3, 5, 9, 17, \ldots$, tampak bahwa setiap suku barisan ini dua kali suku barisan tersebut. Barisan itu mempunyai rumus tertutup $c_n = 2^{n+1} + 1$. Karena barisan kita dua kali barisan tersebut, $h_n = 2(2^{n+1} + 1)$, yang sama dengan hasil sebelumnya.

8. $(15, 33, 57, 87, 123, \ldots)$. Coba bagi setiap suku dengan 3. Hasilnya adalah barisan $5, 11, 19, 29, 41, \ldots$. Sekarang tambahkan 1 pada setiap suku: $6, 12, 20, 30, 42, \ldots$, yaitu (d_n) dalam contoh ini, tetapi dimulai dengan 6 alih-alih 0. Jadi, mari mulai dengan rumus $d_n = n(n+1)$. Agar dimulai dengan 6, kita menggesernya menjadi $(n+2)(n+3)$. Namun, nilai ini lebih besar satu, sehingga kita kurangi 1: $(n+2)(n+3)-1$. Hasil tersebut merupakan barisan kita yang dibagi 3. Jadi, kita menginginkan $j_n = 3((n+2)(n+3)-1)$.

4.1.3 Jumlah Parsial dan Selisih

Beberapa barisan secara alami muncul sebagai jumlah suku-suku barisan lain.

Contoh 4.1.9

Sam mencatat banyaknya push-up yang ia lakukan setiap hari dalam "tantangan melakukan banyak push-up". Misalkan $(a_n)_{n\geq 1}$ adalah barisan yang menyatakan banyaknya push-up yang dilakukan pada hari ke-n dalam tantangan tersebut. Barisan itu dimulai dengan

$$3, 5, 6, 10, 9, 0, 12, \ldots.$$

Deskripsikan barisan $(b_n)_{n\geq 1}$ yang menyatakan *jumlah total* push-up yang dilakukan Sam hingga akhir hari ke-n.

Penyelesaian. Kita dapat menentukan suku-suku barisan ini dengan mudah.

$$3, 8, 14, 24, 33, 33, 45, \ldots.$$

Di sini b_1 sama dengan a_1, kemudian

$$b_2 = 3 + 5 = a_1 + a_2,$$

$$b_3 = 3 + 5 + 6 = a_1 + a_2 + a_3,$$

dan seterusnya.

Ada beberapa cara untuk mendeskripsikan b_n secara umum. Kita dapat mendeskripsikannya secara rekursif sebagai

$$b_n = b_{n-1} + a_n,$$

sebab jumlah total push-up yang dilakukan setelah n hari sama dengan jumlah setelah $n-1$ hari ditambah jumlah yang dilakukan pada hari ke-n.

Untuk memperoleh bentuk yang lebih mendekati rumus tertutup, kita dapat menulis

$$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

atau hal yang sama dengan menggunakan *notasi penjumlahan*:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Namun, perhatikan bahwa bentuk-bentuk ini sebenarnya bukan rumus tertutup. Meskipun kita mempunyai rumus untuk a_n, banyaknya perhitungan yang harus dilakukan tetap bertambah ketika n bertambah.

Dari sembarang barisan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kita selalu dapat membentuk barisan baru $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dengan

$$b_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Karena suku-suku (b_n) merupakan jumlah bagian awal barisan (a_n), kita menyebut (b_n) sebagai **barisan jumlah parsial dari** (a_n). Tak lama lagi kita akan melihat bahwa kadang-kadang rumus tertutup untuk (b_n) dapat ditentukan dari rumus tertutup untuk (a_n).

Untuk menyederhanakan penulisan jumlah-jumlah tersebut, kita akan sering menggunakan notasi seperti $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Artinya, jumlahkan semua a_k ketika k berubah dari 1 hingga n.

Contoh 4.1.10

Gunakan notasi $\sum$ untuk menulis ulang penjumlahan-penjumlahan berikut:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$
2. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{50}$
3. $6 + 10 + 14 + \cdots + (4n - 2)$.

Penyelesaian.

1. $\sum_{k=1}^{100} k$
2. $\sum_{k=0}^{50} 2^k$
3. $\sum_{k=2}^{n} (4k - 2)$

Sering kali kita juga perlu melihat **barisan selisih** dari suatu barisan (a_n). Yang

dimaksud adalah barisan (d_n) dengan

$$d_n = a_{n+1} - a_n.$$

Sebagai contoh, jika $(a_n) = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$ (bilangan kuadrat, sehingga $a_n = n^2$), barisan selisihnya adalah $(d_n) = (3, 5, 7, 9, \ldots)$ karena $4 - 1 = 3$, $9 - 4 = 5$, dan seterusnya. Kita juga dapat menentukan rumus tertutup untuk barisan selisih ini karena kita mempunyai rumus tertutup untuk a_n. Kita memperoleh

$$d_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Secara umum, rumus tertutup suatu barisan mudah diubah menjadi rumus tertutup untuk barisan selisihnya. Arah sebaliknya tidak selalu mudah. Bagaimana caranya memulai dari barisan selisih lalu memperoleh barisan "asal"?

Memikirkan relasi rekurensi akan membantu di sini. Karena

$$d_n = a_{n+1} - a_n,$$

kita memperoleh

$$a_{n+1} = a_n + d_n.$$

Hal ini masuk akal: untuk berpindah dari satu suku barisan ke suku berikutnya, Anda menambahkan selisih kedua suku tersebut. Nah! Selisih-selisih itu dijumlahkan. Jadi, ***barisan asal adalah barisan jumlah parsial dari barisan selisih!***

Pada bagian-bagian berikutnya, kita akan melihat bahwa memahami barisan selisih dapat memberi tahu kita dengan tepat di mana harus mencari rumus tertutup. Selisih-selisih tersebut juga menunjukkan cara menyusun definisi rekursif.

Contoh 4.1.11

Tentukan relasi rekurensi dan syarat awal yang sesuai dengan suku-suku barisan berikut: $1, 5, 17, 53, 161, 485 \ldots$.

Penyelesaian. Menentukan relasi rekurensi akan lebih mudah jika kita mempunyai konteks untuk masalah ini (misalnya, seperti Menara Hanoi). Sayangnya, kita hanya mempunyai barisannya. Ingat, relasi rekurensi memberi tahu kita cara memperoleh suku-suku berikutnya dari suku-suku sebelumnya. Apa yang terjadi di sini? Kita dapat mengamati selisih antarsuku: $4, 12, 36, 108, \ldots$. Perhatikan bahwa nilai-nilai ini bertambah dengan faktor 3. Apakah barisan asal juga demikian? $1 \cdot 3 = 3$, $5 \cdot 3 = 15$, $17 \cdot 3 = 51$, dan seterusnya. Tampaknya hasilnya selalu 2 kurang dari suku berikutnya. Nah!

Jadi, relasi rekurensinya adalah $a_n = 3a_{n-1} + 2$ dan syarat awalnya adalah $a_0 = 1$.

4.1.4 Barisan dalam Python

Memeriksa apakah suatu rumus tertutup sesuai dengan suku-suku awal barisan mudah dilakukan dengan kalkulator, atau lebih baik lagi, dengan bahasa pemrograman seperti Python. Salah satu caranya adalah mendefinisikan fungsi yang mengembalikan suku ke-n barisan tersebut.

Berikut sebuah contoh. Misalkan Anda ingin memeriksa apakah rumus yang Anda temukan untuk barisan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$ benar. Mungkin Anda menduga bahwa $a_n = 2^n - 1$. Coba jalankan kode berikut. (Catatan: Dalam Python, simbol ^ mempunyai arti lain; untuk pemangkatan kita menggunakan **.)

```
def a(n):
  return 2**n-1
print(a(3))
```

Hasilnya tampak menjanjikan, tetapi kita harus berhati-hati: barisan kita dimulai dengan $a_0 = 1$, sehingga $a_3 = 15$. Sekarang coba ubah definisi `a(n)` (dengan mengubah nilai yang dikembalikan) agar menghasilkan rumus tertutup yang benar.

Mungkin Anda ingin mencetak 20 suku pertama barisan tersebut? Hal ini mudah dilakukan dalam Python dengan memasukkan suku-sukunya ke dalam sebuah senarai:

```
def a(n):
  return 2**(n+1) - 1
sequence = []
for n in range(20):
  sequence.append(a(n))
print(sequence)
```

Perhatikan bahwa `range(20)` dimulai dari 0 dan berhenti pada 19 (yakni senarai `[0,1,2,...,19]`).

Kita juga dapat menggunakan Python untuk menghasilkan suku-suku barisan dari suatu definisi rekursif. Misalkan kita ingin menyelidiki barisan $a_n = 2a_{n-1} + 1$ dengan syarat awal $a_0 = 1$. Dalam Python, kita dapat menghasilkan barisan tersebut sebagai berikut.

```
def a(n):
  if n == 0:
    return 1
  else:
    return 2*a(n-1)+1
# cukup cetak 10 suku pertama
for i in range(10):
  print(a(i))
```

Dapatkah Anda melihat cara menerjemahkan relasi rekurensi menjadi fungsi Python rekursif? Cobalah mengubah-ubah kode di atas untuk menyelidiki barisan lain.

4.1.5 Pertanyaan Bacaan

1. Dari rumus-rumus barisan berikut, pilih semua yang merupakan rumus *tertutup* (bukan rumus *rekursif*).

A. $a_n = 3(n-1) + 2$

B. $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 3}{4n}$

C. $a_n = 3a_{n-1} + 2$

D. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

2. Seret setiap barisan di sebelah kiri ke relasi rekurensi yang sesuai dengan barisan tersebut.

$5, 5, 5, 5, 5, \ldots$	$a_n = a_{n-1} + 1$
$2, 3, 5, 9, 17, \ldots$	$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$
$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$	$a_n = 2a_{n-1} - 1$
$3, 4, 7, 11, 18, \ldots$	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang mungkin membuat Anda atau teman sekelas penasaran setelah membacanya.

4.1.6 Soal Latihan

1. Untuk barisan dengan rumus tertutup $a_n = n^2 + 5n + 4$, tentukan suku a_7.

2. Perhatikan barisan dengan relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 6$ dan suku awal $a_0 = 3$. Tentukan suku a_4.

3. Perhatikan barisan dengan relasi rekurensi $a_n = 7 \cdot a_{n-1}$ dan suku awal $a_0 = 9$. Tentukan suku a_6.

4. Temukan rumus tertutup untuk setiap barisan $(a_n)_{n \geq 1}$ berikut dengan menghubungkannya dengan barisan yang dikenal luas. Anggaplah suku pertama yang diberikan adalah a_1.

a. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

$a_n =$ _____

b. $3, 5, 8, 12, 17, \ldots$

$a_n =$ _____

c. $11, 16, 22, 29, 37, \ldots$

$a_n =$ _____

d. $25, 121, 721, 5041, 40321, \ldots$

$a_n =$ _____

5. Untuk setiap barisan di bawah ini, temukan rumus tertutup bagi a_n, yaitu suku ke-n (anggap suku pertama yang ditampilkan selalu a_0), dengan menghubungkannya dengan barisan lain yang rumusnya sudah Anda ketahui.

a. $0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$

$a_n =$ _____

b. $-1, 0, 7, 26, 63, 124, \ldots$

$a_n =$ _____

c. $0, 3, 12, 27, 48, 75, \ldots$

$a_n =$ _____

d. $1, 3, 8, 17, 32, 57, \ldots$

$a_n =$ _____

4.1.7 Latihan Tambahan

1. Perhatikan barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ yang dimulai dengan $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ (yaitu bilangan-bilangan ganjil secara berurutan).

(a) Berikan definisi rekursif dan rumus tertutup untuk barisan tersebut.

(b) Tuliskan barisan jumlah parsial $(b_n)_{n\geq 1}$ dari (a_n). Tuliskan definisi rekursif untuk (b_n) dan dugalah rumus tertutupnya.

2. Barisan Fibonacci adalah $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ (dengan $F_0 = 0$).

(a) Tuliskan beberapa suku pertama barisan jumlah parsial: $0, 0+1, 0+1+1, \ldots$

(b) Dugalah rumus untuk barisan jumlah parsial yang dinyatakan dalam satu bilangan Fibonacci. Sebagai contoh, Anda mungkin menulis $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = 3F_{n-1}^2 + n$, meskipun rumus itu jelas tidak benar.

3. Perhatikan tiga barisan berikut. Untuk setiap barisan, tentukan definisi rekursifnya. Bagaimana hubungan ketiga barisan ini?

(a) $2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, \ldots$.

(b) $5, 6, 11, 17, 28, 45, 73, \ldots$.

(c) $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$.

4. Tuliskan beberapa suku pertama barisan yang diberikan oleh $a_1 = 3$; $a_n = 2a_{n-1}+4$. Kemudian, tentukan definisi rekursif untuk barisan $10, 24, 52, 108, \ldots$.

5. Tuliskan beberapa suku pertama barisan yang diberikan oleh $a_n = n^2 - 3n + 1$. Kemudian, tentukan rumus tertutup untuk barisan (yang dimulai dengan a_1) $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$.

6. Tunjukkan bahwa $a_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 5^n$ merupakan solusi relasi rekurensi $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$. Syarat awal apa yang diperlukan agar rumus ini menjadi rumus tertutup barisan tersebut?

7. Tunjukkan bahwa $a_n = 2^n - 5^n$ juga merupakan solusi relasi rekurensi $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$. Syarat awal apa yang diperlukan agar rumus ini menjadi rumus tertutup barisan tersebut?

8. Tentukan rumus tertutup untuk barisan dengan definisi rekursif $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dengan $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$.

9. Berikan dua definisi rekursif yang berbeda untuk barisan dengan rumus tertutup $a_n = 3 + 2n$. Buktikan bahwa jawaban Anda benar. Sedikitnya satu definisi rekursif harus menggunakan dua suku sebelumnya tanpa konstanta.

10. Gunakan notasi penjumlahan ($\sum$) atau perkalian ($\prod$) untuk menulis ulang bentuk-bentuk berikut.

(a) $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$.

(b) $1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 425$.

(c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{50}$.

(d) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n$.

(e) $(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}) \cdots (\frac{100}{101})$.

11. Uraikan penjumlahan dan perkalian berikut. Dengan kata lain, tuliskan seluruh sukunya.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(3 + 4k)$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{50} \frac{1}{(k^2 - 1)}$.

(d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{100} \frac{k^2}{(k^2 - 1)}$.

(e) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2 + 3k)$.

12. Misalkan Anda menggambar n garis pada bidang sedemikian sehingga setiap pasangan garis berpotongan (tidak ada garis yang sejajar) dan tidak ada tiga garis yang berpotongan di titik yang sama. Garis-garis ini membentuk sejumlah daerah pada bidang, termasuk beberapa daerah tak terbatas. Nyatakan banyaknya daerah dengan R_n. Tentukan rumus rekursif untuk banyaknya daerah yang dibentuk oleh n garis dan berikan alasan mengapa rumus tersebut benar.

13. String **terner** adalah barisan yang terdiri atas angka 0, 1, dan 2. String ini seperti string bit, tetapi menggunakan tiga simbol.

Sebut suatu string terner *baik* jika string itu tidak pernah memuat angka 2 yang langsung diikuti angka 0. Misalkan G_n adalah banyaknya string baik dengan panjang n. Sebagai contoh, $G_1 = 3$ dan $G_2 = 8$ (karena dari 9 string terner dengan panjang 2, hanya satu yang tidak baik).

Tentukan, disertai alasan, rumus rekursif untuk G_n, lalu gunakan rumus itu untuk menghitung G_5.

14. Perhatikan string bit dengan panjang l dan bobot k (yakni string yang terdiri atas l angka 0 dan 1, termasuk k angka 1). Kita mengetahui cara mencacah banyaknya string tersebut untuk l dan k yang tetap. Sekarang kita akan mencacah banyaknya string yang *jumlah* panjang dan bobotnya tetap. Sebagai contoh, mari cacah semua string bit yang memenuhi $l + k = 11$.

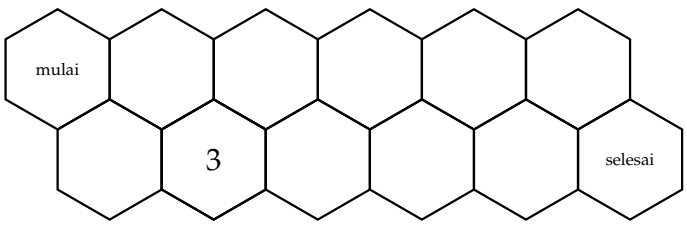
(a) Berikan contoh string-string tersebut dengan panjang yang berbeda-beda. Berapa panjang string terpanjang yang mungkin? Berapa panjang string terpendek?

(b) Berapa banyak string untuk setiap panjang tersebut? Gunakan hasil ini untuk mencacah jumlah total string (dengan jumlah 11).

(c) Pendekatan lain: biarkan $n = l + k$ bervariasi. Berapa banyak string yang mempunyai jumlah $n = 1$? Berapa banyak yang mempunyai jumlah $n = 2$? Dan seterusnya. Tentukan dan jelaskan relasi rekurensi untuk barisan (a_n) yang menyatakan banyaknya string dengan jumlah n.

(d) Deskripsikan hasil yang Anda peroleh di atas dalam kaitannya dengan segitiga Pascal. Pola apa yang Anda temukan?

15. Ketika lebah bermain catur, mereka menggunakan papan heksagonal seperti yang ditunjukkan berikut. Ratu lebah dapat bergerak satu petak setiap kali, baik langsung ke kanan, serong kanan atas, maupun serong kanan bawah (tetapi tidak pernah dapat bergerak ke kiri). Berapa banyak lintasan berbeda yang dapat ditempuh sang ratu dari heksagon kiri atas ke heksagon kanan bawah? Jelaskan jawaban Anda dan kaitannya dengan pertanyaan sebelumnya. (Sebagai contoh, terdapat tiga lintasan menuju heksagon kedua pada baris bawah.)



16. Misalkan t_n menyatakan banyaknya cara mengubin papan catur berukuran $2 \times n$ menggunakan domino berukuran 1×2. Tuliskan beberapa suku pertama barisan $(t_n)_{n \geq 1}$, lalu berikan definisi rekursifnya. Jelaskan mengapa rumus rekursif Anda benar.

4.2 Laju Pertumbuhan

Tujuan Pembelajaran

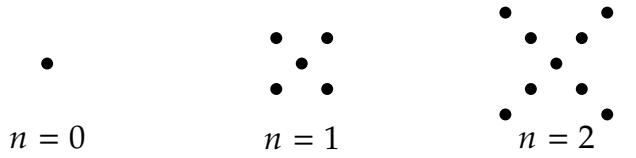
Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

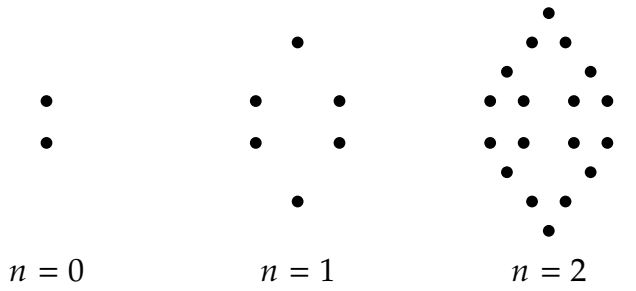
1. Mengidentifikasi suatu barisan sebagai barisan aritmetika atau geometri berdasarkan laju pertumbuhannya.
2. Memberikan definisi rekursif dan rumus tertutup untuk barisan aritmetika dan geometri.

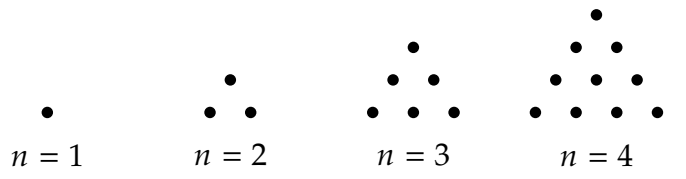
4.2.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Untuk setiap pola titik berikut, gambarkan pola selanjutnya dalam barisan. Deskripsikan laju pertumbuhan banyaknya titik dalam pola-pola tersebut. Kemudian, dugalah definisi rekursif dan rumus tertutup untuk banyaknya titik pada pola ke-n.







Tujuan kita adalah menentukan rumus tertutup untuk barisan. Strategi utama kita ialah terlebih dahulu menentukan bagaimana barisan berubah dari satu suku ke suku berikutnya. Perubahan ini akan menghasilkan relasi rekurensi untuk barisan tersebut, dan dari relasi rekurensi itu kita akan menentukan rumus tertutup. Kita mulai dengan dua jenis barisan yang sangat umum dan berguna: barisan aritmetika dan geometri. Dalam prosesnya, kita akan mempelajari beberapa teknik untuk menyelesaikan relasi rekurensi.

Kegiatan Pratinjau

1. Selidiki barisan titik pertama dari kegiatan *Selidiki!* Misalkan a_n menyatakan banyaknya titik pada gambar n. Barisan tersebut dimulai dengan $1, 5, 9, \ldots$

(a) Berapa banyak titik yang Anda perkirakan terdapat pada dua gambar berikutnya dalam barisan?

(b) Bagaimana barisan ini bertumbuh? Berapa banyak titik yang perlu ditambahkan, atau dengan bilangan berapa banyaknya titik perlu dikalikan, untuk memperoleh gambar berikutnya?

(c) Misalkan a_n adalah banyaknya titik pada gambar n. Tuliskan definisi rekursif untuk a_n.

(d) Dugalah rumus tertutup untuk banyaknya titik pada gambar ke-n.

2. Sekarang perhatikan barisan titik kedua dari kegiatan *Selidiki!* Misalkan a_n menyatakan banyaknya titik pada gambar n. Barisan tersebut dimulai dengan $2, 6, 18, \ldots$

(a) Berapa banyak titik yang Anda perkirakan terdapat pada dua gambar berikutnya dalam barisan?

(b) Bagaimana barisan ini bertumbuh? Berapa banyak titik yang perlu ditambahkan, atau dengan bilangan berapa banyaknya titik perlu dikalikan, untuk memperoleh gambar berikutnya?

(c) Misalkan a_n adalah banyaknya titik pada gambar n. Tuliskan definisi rekursif untuk a_n.

(d) Dugalah rumus tertutup untuk banyaknya titik pada gambar ke-n.

3. Sekarang perhatikan barisan titik ketiga dari kegiatan *Selidiki!* Misalkan a_n menyatakan banyaknya titik pada gambar n. Barisan tersebut dimulai dengan $1, 3, 6, 10, \ldots$

(a) Berapa banyak titik yang Anda perkirakan terdapat pada dua gambar berikutnya dalam barisan?

(b) Misalkan a_n adalah banyaknya titik pada gambar n. Tuliskan definisi rekursif untuk a_n.

(c) Dugalah rumus tertutup untuk banyaknya titik pada gambar ke-n.

4.2.2 Barisan Aritmetika

Misalkan Anda memulai usaha yang menjual cetakan karya seni matematika. Pada minggu ke-0, Anda menjual dua cetakan. Pada setiap minggu berikutnya, Anda menjual empat cetakan lebih banyak daripada minggu sebelumnya. Berapa cetakan yang akan Anda jual pada minggu ke-n?

Kita dapat dengan mudah menghitung beberapa suku pertama barisan tersebut: $2, 6, 10, 14, \ldots$. Bagaimana kita mengetahui bahwa hasil ini benar? Dari masalah tersebut, terlihat bahwa untuk berpindah dari satu suku ke suku berikutnya kita harus menambahkan 4. Dengan demikian, relasi rekurensi barisan tersebut jelas merupakan

$$a_n = a_{n-1} + 4.$$

Laju pertumbuhan barisan tersebut adalah konstanta 4 karena *selisih* antara dua suku berurutan selalu 4 (perhatikan bahwa relasi rekurensinya dapat ditulis sebagai $a_n - a_{n-1} = 4$).

Barisan dengan *laju perubahan tetap* disebut **barisan aritmetika**.

Sekarang mari tentukan rumus tertutup untuk barisan kita. Suku pertamanya adalah $a_0 = 2$. Untuk memperoleh a_1, kita menambahkan 4. Untuk memperoleh suku berikutnya, kita kembali menambahkan 4; artinya, kita telah menambahkan 4 pada suku awal sebanyak dua kali. Kemudian kita menambahkan 4 sekali lagi, sehingga untuk memperoleh a_3 penambahan dilakukan tiga kali. Secara umum, untuk memperoleh a_n, kita menambahkan 4 pada a_0 sebanyak n kali. Dengan demikian, rumus tertutup barisan tersebut adalah

$$a_n = 2 + 4n.$$

Penalaran ini berlaku untuk setiap barisan aritmetika. Artinya, setiap barisan dengan beda tetap mempunyai rumus tertutup *linear*, dengan "kemiringan" fungsi linearnya sama dengan beda tetap.

Barisan Aritmetika.

Jika selisih antara suku-suku berurutan suatu barisan adalah konstan, barisan tersebut disebut **aritmetika**. Jika suku awal (a_0) barisan adalah a dan **beda tetap**nya adalah d, maka kita memperoleh

Definisi rekursif: $a_n = a_{n-1} + d$ dengan $a_0 = a$.

Rumus tertutup: $a_n = a + dn$.

Seperti pada contoh di atas, untuk definisi rekursif kita perlu menentukan a_0. Kemudian kita perlu menyatakan a_n berdasarkan a_{n-1}. Jika suku pertama kita sebut a, maka $a_0 = a$. Untuk relasi rekurensinya, berdasarkan definisi barisan aritmetika, selisih antara suku-suku berurutan adalah suatu konstanta, misalnya d. Jadi, $a_n - a_{n-1} = d$, atau dengan kata lain,

$$a_0 = a \qquad a_n = a_{n-1} + d.$$

Sekarang mari kita jelaskan mengapa rumus tertutup tersebut benar. Salah satu caranya adalah menggunakan teknik yang kadang-kadang disebut **metode teleskopik** (nama yang sebentar lagi akan menjadi masuk akal).

Kita menuliskan relasi rekurensi dalam bentuk *selisih*, $a_n - a_{n-1} = d$, untuk semua suku mulai dari a_1 hingga a_n. Hasilnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= d \\ a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= d \\ a_n - a_{n-1} &= d. \end{aligned}$$

Sekarang kita jumlahkan seluruh n persamaan tersebut.

Pada ruas kanan, kita menjumlahkan d dengan dirinya sendiri sebanyak n kali, sehingga jumlahnya adalah $d \cdot n$.

Pada ruas kiri, kita memperoleh jumlah:

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}).$$

Namun, perhatikan apa yang terjadi ketika suku-sukunya dikelompokkan kembali dan suku-suku yang sama saling dihapus:

$$\cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cdots + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} + a_n - \cancel{a_{n-1}} = a_n - a_0.$$

Jumlah tersebut *menciut secara teleskopik* menjadi bentuk ringkas yang mudah ditangani.

Dengan menggabungkan kedua ruas, kita memperoleh

$$a_n - a_0 = d \cdot n,$$

yang menjadi

$$a_n = a_0 + d \cdot n$$

seperti yang telah kita nyatakan.

Metode teleskopik di atas berguna dalam konteks lain (lihat Latihan 4.2.7.6), tetapi setelah memperoleh bentuk umum rumus tertutup, kini kita dapat menerapkannya pada sembarang barisan aritmetika.

Contoh 4.2.1

Tentukan definisi rekursif dan rumus tertutup untuk barisan-barisan aritmetika berikut. Anggap bahwa suku pertama yang dituliskan adalah a_0.

1. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$.
2. $50, 43, 36, 29, \ldots$.

Penyelesaian. Pertama, kita harus memeriksa bahwa barisan-barisan ini memang aritmetika dengan menghitung selisih suku-suku berurutan. Dengan demikian, kita akan menemukan beda tetap d.

1. $5-2=3, 8-5=3$, dan seterusnya. Untuk berpindah dari setiap suku ke suku berikutnya, kita menambahkan tiga, sehingga $d=3$. Jadi, definisi rekursifnya adalah $a_n = a_{n-1} + 3$ dengan $a_0 = 2$. Rumus tertutupnya adalah $a_n = 2 + 3n$.

2. Di sini beda tetapnya adalah -7, karena kita menambahkan -7 pada 50 untuk memperoleh 43, dan seterusnya. Jadi, definisi rekursifnya adalah $a_n = a_{n-1} - 7$ dengan $a_0 = 50$. Rumus tertutupnya adalah $a_n = 50 - 7n$.

4.2.3 Barisan Geometri

Bagaimana dengan barisan seperti $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$? Barisan ini bukan aritmetika karena selisih antarsukunya tidak tetap. Namun, *rasio* antara suku-suku berurutan tetap: $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \cdots = 2$ Barisan seperti ini disebut **geometri**.

Setelah mengenali bahwa barisan tersebut merupakan barisan geometri, kita dapat dengan mudah menuliskan definisi rekursifnya: $a_n = 2a_{n-1}$, dengan $a_0 = 3$.

Rumus tertutupnya juga tidak sulit ditentukan. Sebagai contoh, bagaimana kita memperoleh suku a_3? Kita mulai dengan 3, lalu mengalikannya dengan 2 untuk memperoleh a_1, kembali mengalikannya dengan 2 untuk memperoleh a_2, dan mengalikannya dengan 2 untuk ketiga kalinya guna memperoleh a_3. Jadi, kita mengalikan 3 dengan 2 sebanyak tiga kali, atau $a_3 = 3 \cdot 2^3$. Tampaknya $a_n = 3 \cdot 2^n$.

Secara umum, definisi rekursif untuk barisan geometri dengan suku awal a dan rasio tetap r adalah

$$a_n = a_{n-1} \cdot r; a_0 = a.$$

Untuk memperoleh suku berikutnya, kita mengalikan suku sebelumnya dengan r.

Untuk memperoleh rumus tertutup umum, kita dapat mencoba kembali metode teleskopik, meskipun kali ini kita harus menghapus faktor-faktor pecahan. Sebagai gantinya, mari kita ilustrasikan teknik lain untuk menyelesaikan relasi rekurensi yang disebut **iterasi**. Gagasannya adalah menghitung bertahap hingga a_n sambil mengamati polanya. Tuliskan

$$\begin{aligned}
a_0 &= a \\
a_1 &= a_0 \cdot r \\
a_2 &= a_1 \cdot r = a_0 \cdot r \cdot r = a_0 \cdot r^2 \\
a_3 &= a_2 \cdot r = a_0 \cdot r^2 \cdot r = a_0 \cdot r^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} \cdot r = a_0 \cdot r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n.
\end{aligned}$$

Kita harus mengalikan suku pertama a dengan r beberapa kali, tepatnya n kali. Kita memperoleh $a_n = a \cdot r^n$.

Barisan Geometri.

Suatu barisan disebut **geometri** jika rasio antara suku-suku berurutan tetap. Misalkan suku awal a_0 adalah a dan **rasio tetap**nya adalah r. Maka kita memperoleh

Definisi rekursif: $a_n = ra_{n-1}$ dengan $a_0 = a$.

Rumus tertutup: $a_n = a \cdot r^n$.

Contoh 4.2.2

Tentukan rumus rekursif dan rumus tertutup untuk barisan-barisan geometri berikut. Sekali lagi, suku pertama yang dituliskan adalah a_0.

1. $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$
2. $27, 9, 3, 1, 1/3, \ldots$

Penyelesaian. Mulailah dengan memeriksa bahwa barisan-barisan ini benar-benar geometri dengan membagi setiap suku dengan suku sebelumnya. Jika rasio tersebut benar-benar tetap, kita telah menemukan r.

1. $6/3 = 2$, $12/6 = 2$, $24/12 = 2$, dan seterusnya. Benar, untuk berpindah dari sembarang suku ke suku berikutnya, kita mengalikannya dengan $r = 2$. Jadi, definisi rekursifnya adalah $a_n = 2a_{n-1}$ dengan $a_0 = 3$. Rumus tertutupnya adalah $a_n = 3 \cdot 2^n$.
2. Rasio tetapnya adalah $r = 1/3$. Jadi, barisan tersebut mempunyai definisi rekursif $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$ dengan $a_0 = 27$ dan rumus tertutup $a_n = 27 \cdot \frac{1}{3}^n$.

Barisan geometri adalah barisan yang laju pertumbuhannya *sebanding* dengan barisan itu sendiri. Seperti yang mungkin telah Anda lihat dalam kalkulus, tepat fungsi-fungsi eksponensiallah yang mempunyai sifat ini.

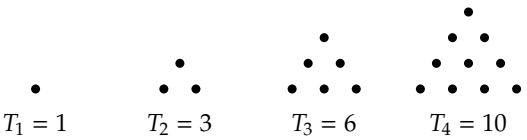
Dalam contoh dan rumus di atas, kita menganggap bahwa suku *awal* adalah a_0. Jika barisan Anda dimulai dengan a_1, Anda dapat dengan mudah menentukan suku yang seharusnya menjadi a_0 dan menggunakannya dalam rumus. Sebagai contoh, jika kita menginginkan rumus untuk barisan $2, 5, 8, \ldots$ dan menetapkan $2 = a_1$, kita dapat menentukan $a_0 = -1$ (karena barisan tersebut aritmetika dengan beda tetap 3, kita mempunyai $a_0 + 3 = a_1$). Dengan demikian, rumus tertutupnya adalah $a_n = -1 + 3n$.

Catatan 4.2.3 Jika membaca sumber lain, Anda mungkin menemukan rumus tertutup untuk barisan aritmetika dan geometri yang berbeda dari rumus

kita. Secara khusus, Anda mungkin menemukan rumus $a_n = a + (n-1)d$ (aritmetika) dan $a_n = a \cdot r^{n-1}$ (geometri). Mana yang benar? Keduanya! Dalam pembahasan kita, a menyatakan a_0. Jika suku awalnya adalah a_1, kita memperoleh rumus yang (sedikit lebih rumit) seperti yang ditemukan pada sumber lain.

4.2.4 Melampaui Barisan Aritmetika dan Geometri

Perhatikan barisan $(T_n)_{n\geq 1}$ yang dimulai dengan $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$. Bilangan-bilangan ini disebut **bilangan segitiga** karena menyatakan banyaknya titik dalam suatu segitiga sama sisi (bayangkan susunan 10 pin boling: satu baris berisi 4, ditambah satu baris berisi 3, satu baris berisi 2, dan satu baris berisi 1).



Apakah barisan ini aritmetika? Bukan, karena $3 - 1 = 2$ dan $6 - 3 = 3 \neq 2$, sehingga tidak ada beda tetap. Apakah barisan ini geometri? Bukan. $3/1 = 3$, tetapi $6/3 = 2$, sehingga tidak ada rasio tetap. Apa yang dapat kita lakukan?

Perhatikan bahwa *selisih* antarsuku *memang* membentuk barisan aritmetika: $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Dengan kata lain, laju perubahan barisan ini bersifat aritmetika: $T_n - T_{n-1} = n$, yang langsung memberi kita relasi rekurensi $T_n = T_{n-1} + n$.

Cara lain untuk memahaminya ialah bahwa suku ke-n barisan (T_n) merupakan *jumlah* n suku pertama barisan $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Dengan demikian, (T_n) adalah **barisan jumlah parsial** dari barisan $1, 2, 3, \ldots$ (disebut jumlah *parsial* karena kita tidak menjumlahkan seluruh suku yang banyaknya tak berhingga).

Hal ini akan menjadi lebih jelas jika kita menguraikan relasi rekurensi untuk menuliskan bilangan-bilangan segitiga sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 = 1 \\ T_2 &= 3 = 1 + 2 \\ T_3 &= 6 = 1 + 2 + 3 \\ T_4 &= 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ &\vdots \quad \vdots \\ T_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n. \end{aligned}$$

Di sini kita sebenarnya menggunakan *iterasi*. Kita juga dapat melihatnya melalui metode teleskopik dengan mengambil $T_0 = 0$:

$$\begin{aligned} T_1 - T_0 &= 1 \\ T_2 - T_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 - T_2 &= 3 \\ &\vdots \\ T_n - T_{n-1} &= n. \end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan persamaan-persamaan ini, ruas kanan menjadi $1 + 2 + 3 + \cdots + n$; suku-suku pada ruas kiri saling menghapus dan hanya menyisakan $T_n - T_0 = T_n$.

Jika kita mengetahui cara menjumlahkan suku-suku barisan aritmetika, kita dapat menentukan rumus tertutup untuk barisan yang selisih-selisihnya merupakan suku-suku barisan aritmetika tersebut. Pertimbangkan cara menentukan jumlah 100 bilangan bulat positif pertama (yaitu T_{100}). Alih-alih menjumlahkannya secara berurutan, kita kelompokkan kembali dan jumlahkan $1 + 100 = 101$. Pasangan berikutnya adalah $2 + 99 = 101$. Kemudian $3 + 98 = 101$. Lanjutkan dengan cara yang sama. Kita memperoleh 50 pasangan yang masing-masing berjumlah 101, sehingga $T_{100} = 101 \cdot 50 = 5050$.[1]

Secara umum, dengan pengelompokan kembali seperti ini, kita memperoleh $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Kebetulan, nilai ini tepat sama dengan $\binom{n+1}{2}$. Hal itu masuk akal jika bilangan segitiga dipandang sebagai banyaknya jabat tangan yang terjadi pada pesta dengan $n + 1$ orang: orang pertama berjabat tangan dengan n orang, orang berikutnya melakukan $n - 1$ jabat tangan tambahan, dan seterusnya.

Inti pembahasan ini adalah bahwa beberapa barisan, meskipun bukan aritmetika maupun geometri, dapat ditafsirkan sebagai barisan jumlah parsial dari barisan aritmetika dan geometri. Untungnya, ada beberapa metode untuk menghitung jumlah-jumlah tersebut dengan cepat; metode itu akan kita pelajari dalam dua bagian berikutnya.

4.2.5 Pertanyaan Bacaan

1. Pasangkan setiap rumus di sebelah kiri dengan jenis rumus yang dideskripsikan di sebelah kanan.

$a_n = 3 \cdot 2^n$	Aritmetika; tertutup
$a_n = 3a_{n-1}$	Aritmetika; rekursif
$a_n = a_{n-1} + 3$	Geometri; tertutup
$a_n = 2n + 3$	Geometri; rekursif

[1] Gagasan ini biasanya dikaitkan dengan Carl Friedrich Gauss, salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa, yang menemukannya sewaktu kecil ketika guru sekolah dasarnya yang kurang menyenangkan bermaksud menyibukkan kelas dengan meminta mereka menghitung penjumlahan panjang tersebut.

2. Bagaimana cara menentukan apakah suatu barisan merupakan barisan jumlah parsial dari barisan aritmetika atau geometri? Deskripsikan cara Anda memeriksanya dengan menggunakan sebuah contoh.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang mungkin membuat Anda atau teman sekelas penasaran setelah membacanya.

4.2.6 Soal Latihan

1. Perhatikan relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 7$.

(a) Tentukan lima suku pertama barisan yang didefinisikan oleh relasi rekurensi tersebut dan syarat awal $a_0 = 17$.

(b) Tentukan rumus tertutup untuk barisan yang didefinisikan oleh relasi rekurensi tersebut dan syarat awal $a_0 = 17$.

(c) Tentukan lima suku pertama barisan lain yang juga didefinisikan oleh relasi rekurensi yang sama, tetapi kali ini dengan syarat awal $a_0 = 1$.

(d) Tentukan rumus tertutup untuk barisan kedua ini.

2. Perhatikan relasi rekurensi $a_n = 7a_{n-1}$.

(a) Tentukan lima suku pertama barisan yang didefinisikan oleh relasi rekurensi tersebut dan syarat awal $a_0 = 10$.

(b) Tentukan rumus tertutup untuk barisan yang didefinisikan oleh relasi rekurensi tersebut dan syarat awal $a_0 = 10$.

(c) Tentukan lima suku pertama barisan lain yang juga didefinisikan oleh relasi rekurensi yang sama, tetapi kali ini dengan syarat awal $a_0 = 17$.

(d) Tentukan rumus tertutup untuk barisan kedua ini.

3. Tentukan rumus tertutup untuk barisan yang dimulai dengan $3, 27, 243, 2187, 19683, \ldots$. Anggap $a_0 = 3$.

4. Tentukan rumus tertutup untuk barisan yang dimulai dengan $16, 26, 36, 46, 56, \ldots$. Anggap $a_0 = 16$.

5. Perhatikan barisan yang dimulai dengan $1, 7, 13, 19, 25, \ldots$, dengan $a_0 = 1$.

(a) Manakah di antara pilihan berikut yang dapat menjadi definisi rekursif untuk barisan tersebut?

- ☐ $a_n = 1 \cdot 6^n$
- ☐ $a_n = 6 \cdot a_{n-1}$; $a_0 = 1$
- ☐ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 1$
- ☐ $a_n = a_{n-1} + 6$; $a_0 = 1$

□ Tidak satu pun jawaban di atas

(b) Tentukan rumus tertutup untuk barisan tersebut.

(c) Apakah 3007 merupakan salah satu suku barisan tersebut?

6. Pekerjaan musim panas Anda memberi upah 1.000 dolar AS per minggu. Upah tersebut naik 50 dolar AS setiap minggu sebagai bonus karena Anda terus bekerja. Berapa upah Anda pada minggu ke-10?

7. Saudara perempuan Anda memperoleh upah 1.000 dolar AS per minggu dari pekerjaan musim panas. Upahnya naik 5% setiap minggu sebagai bonus karena ia terus bekerja. Berapa upahnya pada minggu ke-10?

8. Tentukan x dan y agar $125, x, y, 1$ menjadi bagian dari suatu barisan aritmetika.
$x =$ _____, $y =$ _____
Kemudian tentukan x dan y agar barisan tersebut menjadi bagian dari suatu barisan geometri.
$x =$ _____, $y =$ _____
(Peringatan: x dan y mungkin bukan bilangan bulat.)

9. Tentukan x dan y agar $4, x, y, 31$ menjadi bagian dari suatu barisan aritmetika.
$x =$ _____, $y =$ _____
Kemudian tentukan x dan y agar barisan tersebut menjadi bagian dari suatu barisan geometri.
$x =$ _____, $y =$ _____
(Peringatan: x dan y mungkin bukan bilangan bulat.)

4.2.7 Latihan Tambahan

1. Misalkan saat ini mesin permen berisi tepat 650 butir Skittles, dan setiap kali seseorang memasukkan koin 25 sen AS, tepat 7 butir Skittles keluar dari mesin.

(a) Berapa butir Skittles yang tersisa di dalam mesin setelah 20 koin dimasukkan?

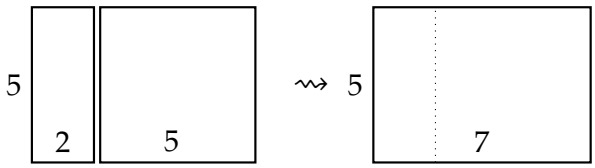
(b) Apakah pada suatu saat tidak ada satu pun butir Skittles yang tersisa di dalam mesin? Jelaskan.

2. Apakah terdapat pasangan bilangan bulat (a, b) sedemikian sehingga a, x_1, y_1, b merupakan bagian dari suatu barisan aritmetika dan a, x_2, y_2, b merupakan bagian dari suatu barisan geometri, dengan x_1, x_2, y_1, y_2 semuanya bilangan bulat?

3. Adakah barisan yang sekaligus aritmetika dan geometri? Jika ada, berapa banyak yang dapat Anda temukan? Jika tidak ada, jelaskan alasannya.

4. Dimulai dari sembarang persegi panjang, kita dapat membuat persegi panjang baru yang lebih besar dengan menempelkan sebuah persegi pada sisi yang lebih panjang. Sebagai contoh, jika kita mulai dengan persegi panjang berukuran 2×5, kita menempelkan persegi berukuran 5×5, sehingga terbentuk persegi

panjang berukuran 5×7:



Persegi panjang berikutnya dibentuk dengan menempelkan persegi berukuran 7×7 pada bagian atas atau bawah persegi panjang berukuran 5×7.

(a) Buatlah barisan persegi panjang menurut aturan ini dengan memulai dari persegi panjang berukuran 1×2. Kemudian, tuliskan barisan *keliling* persegi-persegi panjang tersebut (suku pertama barisan adalah 6 karena keliling persegi panjang berukuran 1×2 adalah 6; suku berikutnya adalah 10).

(b) Ulangi bagian di atas, kali ini dengan memulai dari persegi panjang berukuran 1×3.

(c) Tentukan rumus rekursif untuk setiap barisan keliling yang Anda peroleh pada bagian (a) dan (b). Jangan lupa berikan pula syarat awalnya.

(d) Apakah barisan-barisan tersebut aritmetika? Geometri? Jika bukan keduanya, apakah barisan-barisan itu *hampir* merupakan salah satunya (yaitu, apakah selisih atau rasionya *nyaris* konstan)? Jelaskan.

5. Buktikan bahwa rumus tertutup untuk barisan geometri dengan suku awal $a \neq 0$ dan rasio tetap r adalah $a_n = ar^n$ dengan menggunakan *metode teleskopik*.

6. **Peneleskopan untuk Menentukan Jumlah.** Konteks lain tempat barisan muncul adalah kalkulus, ketika Anda mempelajari barisan dan **deret** (istilah dalam kalkulus untuk apa yang kita sebut barisan jumlah parsial). Beberapa teknik yang telah kita kembangkan di sini juga dapat diterapkan dalam konteks tersebut. Ini merupakan contoh **jumlah teleskopik**, serupa dengan metode teleskopik yang kita gunakan.

Perhatikan barisan $(a_n)_{n \geq 1}$ yang dimulai dengan

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots.$$

Artinya, setiap suku merupakan kebalikan dari bilangan segitiga ke-n. Tentukan jumlah n suku pertama barisan ini:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{T_n}.$$

7. Barisan geometri memiliki laju pertumbuhan tetap dalam arti bahwa rasio suku-suku berurutannya selalu sama. Namun, apa yang dapat kita katakan tentang *selisih* suku-suku berurutan dalam barisan geometri?

(a) Perhatikan barisan geometri $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Tentukan selisih antara suku-suku berurutan. Dengan kata lain, tentukan barisan selisihnya.

(b) Tentukan rumus tertutup untuk barisan selisih tersebut. Kemudian, gunakan rumus tertutup ini untuk menentukan relasi rekurensi lain bagi barisan semula (selain $a_n = 2a_{n-1}$).

(c) Ulangi kedua bagian di atas untuk barisan geometri lain pilihan Anda. Kemudian, jelaskan apa yang Anda temukan secara umum.

8. Tidak satu pun barisan berikut merupakan barisan aritmetika ataupun geometri:

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

$$3, 5, 8, 12, 17, \ldots$$

$$0, 2, 5, 9, 14, \ldots$$

Jelaskan kesamaan di antara barisan-barisan ini, lalu gunakan kesamaan tersebut untuk menentukan rumus tertutup bagi masing-masing barisan. Bagaimana hubungan antarrumus tertutupnya? Apa yang dapat Anda katakan secara umum?

4.3 Barisan Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Mengidentifikasi bahwa suatu barisan memiliki rumus tertutup berbentuk polinomial berdasarkan barisan selisihnya, serta menentukan derajat polinomial tersebut.
2. Mencocokkan polinomial berderajat sesuai dengan suku-suku awal suatu barisan.
3. Menjelaskan hubungan relasi rekurensi untuk barisan polinomial dengan rumus tertutupnya.

4.3.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Papan catur standar berukuran 8×8 memuat 64 persegi. Sebenarnya, itu baru jumlah persegi satuan. Ada berapa persegi dari semua ukuran pada sebuah papan catur? Mulailah dengan papan yang lebih kecil: 1×1, 2×2, 3×3, dan seterusnya. Temukan rumus untuk jumlah seluruh persegi pada papan berukuran $n \times n$.

Kita telah melihat bahwa barisan aritmetika tumbuh dengan laju konstan sehingga rumus tertutupnya berupa fungsi linear. Bagaimana dengan barisan yang tumbuh lebih cepat? Bagaimana jika laju perubahannya (sebenarnya, selisih antarsuku) juga tumbuh dengan laju konstan?

Dalam Subbab 4.2 kita menyatakan bahwa bilangan segitiga, yaitu jumlah n bilangan bulat positif pertama, memiliki rumus tertutup

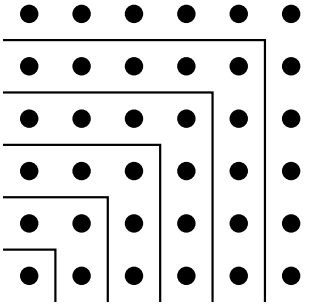
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Jadi, barisan yang barisan selisihnya bersifat aritmetika ini dinyatakan oleh polinomial berderajat 2 (fungsi kuadrat).

Tujuan kita dalam bagian ini adalah menyelidiki fenomena tersebut. Kita akan membuktikan bahwa rumus ini memang merupakan rumus tertutup untuk bilangan segitiga, memperluasnya ke barisan lain yang selisihnya membentuk barisan aritmetika, lalu menyelidiki barisan yang tumbuh dengan laju lebih cepat lagi.

Kegiatan Pratinjau

1. Ketika sedang berjalan menyusuri lorong jurusan matematika, perhatian Anda tertuju pada karya seni menarik yang ditampilkan di bawah ini.



(a) Ada berapa titik pada gambar tersebut?

Titik-titik itu membentuk persegi berukuran _____ kali _____, sehingga seluruhnya ada _____ titik.

(b) Kita juga dapat menghitung jumlah seluruh titik dengan menjumlahkan setiap daerah berbentuk "kait", dari yang terkecil hingga yang terbesar:

___ + ___ + ___ + ___ + ___ + ____.

(c) Cara lain untuk menghitung jumlah seluruh titik adalah dengan mengelompokkan suku-suku dalam penjumlahan ini.

1 + 11 = ___; 3 + 9 = ___; 5 + 7 = ___.

Karena ada tiga pasangan yang dijumlahkan, jumlah keseluruhannya adalah 3·___ = _____.

(d) Jika kita memperumum diagram tersebut sehingga memiliki n kait, ada berapa titik pada kait terbesar?

Ada berapa titik pada kait terbesar kedua?

(e) Berapa jumlah titik pada kait terkecil dan kait terbesar?

Berapa jumlah titik pada kait terkecil kedua dan kait terbesar kedua?

(f) Jika kita terus menjumlahkan pasangan kait (yang terkecil berikutnya dengan yang terbesar berikutnya), ada berapa pasangan yang kita peroleh?

Dengan mengalikannya, jumlah seluruh titik adalah: _____.

Petunjuk. Anggaplah n genap. Jika tidak demikian, akan ada satu kait "tengah" yang tidak dipasangkan dengan kait lain, tetapi hal ini diimbangi oleh kenyataan bahwa $n/2$ akan menghitung setengah dari jumlah satu pasangan kait.

4.3.2 Menjumlahkan Barisan Aritmetika: Balikkan dan Jumlahkan

Mari kita cari dengan cermat jumlah n bilangan bulat positif pertama. Namakan jumlah tersebut T_n, lalu tuliskan dua kali: sekali dalam urutan biasa dan sekali

dalam urutan terbalik.

$$\begin{array}{rrcccccccc} & T_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & n \\ + & T_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 1 \\ \hline & 2T_n & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & +\cdots+ & n+1 \end{array}$$

Selanjutnya, kita menjumlahkan kedua persamaan tersebut. Ruas kirinya adalah $2T_n$. Pada ruas kanan terjadi sesuatu yang menarik: semua suku dalam penjumlahan itu sama! Jadi, alih-alih menjumlahkan banyak bilangan berbeda, kini kita hanya menjumlahkan bilangan yang sama berulang kali. Perkalian sangat cocok untuk tugas ini! Ada n suku dalam penjumlahan tersebut, sehingga kita memperoleh

$$2T_n = n(n+1).$$

Dengan menyelesaikan persamaan untuk T_n, kita memperoleh

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

seperti yang diharapkan.

Teknik ini berlaku untuk setiap penjumlahan aritmetika.

Contoh 4.3.1

Hitunglah jumlah $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 470$.

Penyelesaian. Gagasannya adalah meniru cara kita menemukan rumus bilangan segitiga. Jika suku pertama dan terakhir dijumlahkan, hasilnya 472. Suku kedua dan suku kedua dari belakang juga berjumlah 472. Agar semua suku mudah dilacak, kita dapat menuliskannya sebagai berikut. Namakan jumlah tersebut S. Maka,

$$\begin{array}{rrccccccccc} & S = & 2 & + & 5 & + & 8 & +\cdots+ & 467 & + & 470 \\ + & S = & 470 & + & 467 & + & 464 & +\cdots+ & 5 & + & 2 \\ \hline & 2S = & 472 & + & 472 & + & 472 & +\cdots+ & 472 & + & 472 \end{array}$$

Untuk memperoleh $2S$, kita menjumlahkan 472 dengan dirinya sendiri beberapa kali. Berapa kali? Kita perlu menentukan banyaknya suku (**komponen penjumlahan**) dalam penjumlahan tersebut. Karena suku-sukunya membentuk barisan aritmetika, suku ke-n dalam penjumlahan itu (dengan 2 dihitung sebagai suku ke-0) dapat dinyatakan sebagai $2 + 3n$. Jika $2 + 3n = 470$, maka $n = 156$. Jadi, n berkisar dari 0 hingga 156, sehingga ada 157 suku dalam penjumlahan tersebut. Inilah banyaknya kemunculan 472 dalam penjumlahan untuk $2S$. Dengan demikian,

$$2S = 157 \cdot 472 = 74104.$$

Sekarang S mudah dihitung:

$$S = 74104/2 = 37052.$$

Cara ini berlaku untuk jumlah setiap barisan *aritmetika*. Namakan jumlahnya S. Balikkan urutannya dan jumlahkan. Hasilnya berupa satu bilangan yang dijumlahkan dengan dirinya sendiri berulang kali. Tentukan berapa kali bilangan itu muncul. Kalikan. Bagi dengan 2. Selesai.

Contoh 4.3.2

Temukan rumus tertutup untuk $6 + 10 + 14 + \cdots + (4n - 2)$.

Penyelesaian. Sekali lagi, kita memiliki jumlah suatu barisan aritmetika. Ada berapa suku dalam barisan tersebut? Jelas bahwa setiap sukunya berbentuk $4k - 2$ (sebagaimana ditunjukkan oleh suku terakhir). Namun, nilai k apa saja yang digunakan? Untuk memperoleh 6, ambil $k = 2$. Untuk memperoleh $4n - 2$, ambil $k = n$. Jadi, untuk menentukan banyaknya suku, kita harus menghitung banyaknya bilangan bulat dalam rentang $2, 3, \ldots, n$. Banyaknya adalah $n - 1$. (Ada n bilangan dari 1 sampai n, sehingga jumlahnya berkurang satu jika kita mulai dari 2.)

Sekarang balikkan urutannya dan jumlahkan:

$$\begin{array}{rrcccccccc} & S = & 6 & + & 10 & +\cdots+ & 4n-6 & + & 4n-2 \\ + & S = & 4n-2 & + & 4n-6 & +\cdots+ & 10 & + & 6 \\ \hline & 2S = & 4n+4 & + & 4n+4 & +\cdots+ & 4n+4 & + & 4n+4 \end{array}$$

Karena ada $n - 1$ suku, kita memperoleh

$$2S = (n-1)(4n+4) \qquad \text{sehingga} \qquad S = \frac{(n-1)(4n+4)}{2}.$$

Selain menghitung jumlah, kita dapat menggunakan teknik ini untuk menemukan rumus tertutup bagi barisan yang kita kenali sebagai barisan jumlah parsial.

Contoh 4.3.3

Gunakan jumlah parsial untuk menemukan rumus tertutup bagi $(a_n)_{n\geq 0}$ yang diawali dengan $2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots\ldots$. Anggap salah satu relasi rekurensi barisan tersebut adalah $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$.

Penyelesaian. Pertama, jika kita memperhatikan selisih antarsuku, kita memperoleh barisan selisih $(d_n)_{n\geq 1}$: $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$, yang merupakan barisan aritmetika. Memang, kita melihat bahwa $d_n = 3n - 2$, sesuai dengan relasi rekurensinya. Dengan cara lain, kita dapat menuliskannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 2 + 1 = 2 + d_1 \\ a_2 &= 2 + 1 + 4 = 2 + d_1 + d_2 \\ a_3 &= 2 + 1 + 4 + 7 = 2 + d_1 + d_2 + d_3 \end{aligned}$$

dan seterusnya. Kita dapat menuliskan suku umum (a_n) berdasarkan barisan aritmetika tersebut sebagai berikut:

$$a_n = 2 + 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 2.$$

Kita dapat membalikkan urutan dan menjumlahkannya, tetapi angka 2 pada awal barisan tidak mengikuti pola tersebut. Artinya, kita perlu mempertahankan angka 2 di luar bagian yang dibalik:

$$\begin{array}{rrcccccc} & a_n = & 2 & + & 1 & + & 4 & +\cdots+ & 3n-2 \\ + & a_n = & 2 & + & 3n-2 & + & 3(n-1)-2 & +\cdots+ & 1 \\ \hline & 2a_n = & 4 & + & 2+3n-3 & + & 2+3n-3 & +\cdots+ & 2+3n-3 \end{array}$$

Jika suku pertama (yaitu 4) tidak dihitung, terdapat n komponen penjumlahan yang masing-masing bernilai $2+3n-3 = 3n-1$, sehingga ruas kanan menjadi $4 + (3n-1)n$.

Terakhir, dengan menyelesaikan persamaan untuk a_n, kita memperoleh

$$a_n = \frac{4 + (3n-1)n}{2}.$$

Untuk memastikan hasilnya, kita periksa $a_0 = \frac{4}{2} = 2$, $a_1 = \frac{4+2}{2} = 3$, dan seterusnya. Jadi, rumus tertutup kita benar.

Perhatikan bahwa rumus tertutup bagi barisan yang laju perubahannya aritmetika (yaitu linear) merupakan fungsi kuadrat. Menarik....

4.3.3 Polinomial Berderajat Lebih Tinggi

Karena kita mengetahui cara menghitung jumlah n suku pertama barisan aritmetika, kita dapat menghitung rumus tertutup bagi barisan yang selisih antarsukunya membentuk barisan aritmetika. Namun, bagaimana jika kita mempertimbangkan barisan yang merupakan jumlah n suku pertama dari suatu barisan yang juga merupakan hasil penjumlahan barisan aritmetika?

Ada berapa persegi (dari semua ukuran) pada sebuah papan catur? Papan catur terdiri atas 64 persegi, tetapi kita juga ingin memperhitungkan persegi yang panjang sisinya lebih besar. Meskipun kita hanya mempertimbangkan papan berukuran 8×8, sudah ada banyak objek yang perlu dihitung. Karena itu, mari kita susun sebuah barisan: suku pertamanya adalah jumlah persegi pada papan 1×1, suku keduanya adalah jumlah persegi pada papan 2×2, dan seterusnya. Setelah memikirkannya sejenak, kita memperoleh barisan

$$1, 5, 14, 30, 55, \ldots.$$

Barisan ini bukan barisan aritmetika (dan juga bukan barisan geometri), tetapi mungkin barisan selisihnya merupakan barisan aritmetika. Selisih-selisihnya adalah

$$4, 9, 16, 25, \ldots.$$

Hal ini tidak terlalu mengejutkan: salah satu cara menghitung jumlah persegi pada papan catur 4×4 adalah dengan memperhatikan bahwa terdapat 16 persegi bersisi 1, 9 persegi bersisi 2, 4 persegi bersisi 3, dan 1 persegi bersisi 4. Jadi, barisan awal tersebut merupakan barisan jumlah kuadrat. Barisan selisih ini bukan barisan aritmetika karena barisan selisihnya sendiri (yaitu selisih dari selisih barisan awal) tidak konstan. Barisan **selisih kedua** tersebut adalah

$$5, 7, 9, \ldots,$$

yang *merupakan* barisan aritmetika (dengan selisih konstan 2). Perhatikan bahwa barisan awal kita memiliki **selisih ketiga** yang konstan (yakni selisih dari selisih dari selisih barisan awal). Kita akan menyebut barisan seperti ini sebagai barisan Δ^3-konstan. Barisan $1, 4, 9, 16, \ldots$ memiliki selisih kedua yang konstan, sehingga merupakan barisan Δ^2-konstan. Secara umum, kita menyebut suatu barisan sebagai **barisan Δ^k-konstan** jika selisih ke-k-nya konstan dan tak nol.

Contoh 4.3.4

Manakah di antara barisan berikut yang merupakan barisan Δ^k-konstan untuk suatu nilai k?

1. $2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots$.
2. $1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots$.
3. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

Penyelesaian.

1. Ini adalah barisan dari Contoh 4.3.3; rumus tertutupnya kita temukan dengan mengenali barisan tersebut sebagai barisan jumlah parsial dari suatu barisan aritmetika. Barisan selisih pertamanya adalah $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$, yang memiliki selisih $3, 3, 3, 3, \ldots$. Jadi, $2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots$ merupakan barisan Δ^2-konstan.
2. Ini adalah barisan bilangan kubik sempurna. Barisan selisih pertamanya adalah $7, 19, 37, 61, 91, \ldots$; barisan selisih keduanya adalah $12, 18, 24, 30, \ldots$; dan barisan selisih ketiganya konstan: $6, 6, 6, \ldots$. Jadi, bilangan kubik sempurna membentuk barisan Δ^3-konstan.
3. Jika kita mengambil selisih pertama, kita memperoleh $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Tunggu, apa yang terjadi? Ini adalah barisan yang sama dengan barisan awal. Jadi, mengambil selisih kedua akan menghasilkan barisan yang sama lagi. Berapa kali pun proses ini diulangi, kita akan selalu memperoleh barisan yang sama. Artinya, tidak ada selisih tingkat berhingga yang akan menjadi konstan. Jadi, barisan ini bukan barisan Δ^k-konstan untuk nilai k mana pun.

Barisan Δ^0-konstan merupakan barisan konstan, sehingga rumus tertutupnya mudah dihitung (rumusnya hanya konstanta tersebut). Barisan Δ^1-konstan merupakan barisan aritmetika, dan kita juga telah memiliki metode untuk menemukan rumus tertutupnya. Setiap barisan Δ^2-konstan merupakan hasil penjumlahan suatu barisan aritmetika, sehingga kita juga dapat menemukan rumusnya. Namun, perhatikan bahwa rumus tertutup suatu barisan Δ^2-konstan selalu berbentuk kuadrat. Sebagai contoh, bilangan kuadrat membentuk barisan Δ^2-konstan dengan rumus tertutup $a_n = n^2$. Bilangan segitiga (yang juga membentuk barisan Δ^2-konstan) memiliki rumus tertutup $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, yang setelah dikalikan juga menghasilkan suku n^2. Tampaknya, setiap kali kompleksitas barisan meningkat—yaitu ketika diperlukan lebih banyak tingkat selisih sebelum kita memperoleh konstanta—derajat polinomial dalam rumus tertutupnya juga meningkat. Kita beralih dari konstan ke linear, lalu ke kuadrat. Barisan selisih antarsuku memberi tahu kita sesuatu tentang laju pertumbuhan barisan tersebut. Jika suatu barisan tumbuh dengan laju konstan, rumus barisan itu berbentuk linear. Jika barisan tersebut tumbuh dengan laju yang juga tumbuh dengan laju konstan, rumusnya berbentuk kuadrat. Anda mungkin pernah melihat gagasan ini dalam konteks lain: jika turunan kedua (laju perubahan) suatu fungsi konstan, fungsi tersebut pasti berbentuk kuadrat.

Prinsip ini berlaku secara umum:

Teorema 4.3.5 Pencocokan Polinomial.

Rumus tertutup suatu barisan berupa polinomial berderajat k jika dan hanya jika barisan itu Δ^k-konstan (yakni, barisan selisih ke-k-nya konstan dan tak nol).

Teorema ini memberi tahu kita bahwa barisan jumlah persegi pada papan catur, $1, 5, 14, 30, 55, \ldots$, yang telah kita lihat bersifat Δ^3-konstan, memiliki rumus tertutup berupa polinomial kubik (berderajat 3).

Setelah mengetahui bentuk rumus tertutup suatu barisan, kita akan jauh lebih mudah menemukan rumus tersebut. Jika rumus tertutupnya berupa polinomial berderajat k, kita hanya memerlukan $k+1$ titik data untuk "mencocokkan" polinomial dengan data tersebut.

Contoh 4.3.6

Temukan rumus untuk barisan $3, 7, 14, 24, \ldots$. Anggap $a_1 = 3$.

Penyelesaian. Pertama, periksa apakah selisih barisan tersebut konstan pada suatu tingkat. Barisan selisih pertamanya adalah $4, 7, 10, \ldots$, yang merupakan barisan aritmetika, sehingga barisan selisih keduanya konstan. Barisan ini Δ^2-konstan, sehingga rumus a_n berupa polinomial berderajat 2. Artinya, kita mengetahui bahwa untuk suatu konstanta a, b, dan c,

$$a_n = an^2 + bn + c.$$

Sekarang kita perlu menemukan a, b, dan c. Mula-mula, akan sangat membantu jika kita mengetahui nilai a_0, sebab menyubstitusikan $n = 0$ sangat

menyederhanakan rumus di atas. Dalam kasus ini, $a_0 = 2$ (telusuri mundur dari barisan selisih konstan). Dengan demikian,

$$a_0 = 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c,$$

sehingga $c = 2$. Sekarang substitusikan $n = 1$ dan $n = 2$. Kita memperoleh

$$a_1 = 3 = a + b + 2$$

$$a_2 = 7 = 4a + 2b + 2.$$

Pada tahap ini, kita memiliki dua persamaan (linear) dan dua peubah yang belum diketahui. Karena itu, kita dapat menyelesaikan sistem untuk a dan b (dengan substitusi, eliminasi, atau bahkan matriks). Kita memperoleh $a = \frac{3}{2}$ dan $b = \frac{-1}{2}$, sehingga $a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$.

Contoh 4.3.7

Temukan rumus tertutup untuk jumlah persegi pada papan catur berukuran $n \times n$.

Penyelesaian. Kita telah melihat bahwa barisan $1, 5, 14, 30, 55, \ldots$ bersifat Δ^3-konstan, sehingga kita mencari polinomial berderajat 3. Dengan kata lain,

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Kita dapat menemukan d jika mengetahui nilai a_0. Dengan menelusuri mundur dari selisih ketiga, kita memperoleh $a_0 = 0$ (tidak mengherankan karena tidak ada persegi pada papan catur 0×0). Jadi, $d = 0$. Sekarang substitusikan $n = 1$, $n = 2$, dan $n = 3$:

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c \\ 5 &= 8a + 4b + 2c \\ 14 &= 27a + 9b + 3c. \end{aligned}$$

Jika kita menyelesaikan sistem persamaan ini, kita memperoleh $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, dan $c = \frac{1}{6}$. Oleh karena itu, jumlah persegi pada papan catur berukuran $n \times n$ adalah $a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Catatan: Karena masalah persegi pada papan catur sebenarnya meminta jumlah kuadrat, kini kita memiliki rumus yang bagus untuk $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Contoh 4.3.8

Temukan rumus tertutup untuk $(a_n)_{n\geq 0}$ yang diawali dengan $2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots$. Anggap salah satu relasi rekurensi barisan tersebut adalah $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$

Penyelesaian. Perhatikan bahwa kita telah menyelesaikan soal ini dalam Contoh 4.3.3, tetapi sekarang kita dapat menyelesaikannya dengan pencocokan polinomial.

Barisan selisih (pertama) adalah $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ (sesuai dengan relasi rekurensi yang diberikan). Barisan selisih keduanya konstan, yaitu $3, 3, 3, 3, \ldots$! Jadi, kita memperkirakan bahwa rumus tertutup a_n berupa polinomial berderajat 2. Artinya, kita menduga

$$a_n = an^2 + bn + c.$$

Karena $a_0 = 2$, kita mengetahui bahwa $c = 2$ (sebab $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$). Kemudian, kita melihat apa yang terjadi untuk $n = 1$ dan $n = 2$:

$$\begin{aligned} a_1 = 3 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 \\ a_2 = 7 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2. \end{aligned}$$

Setelah disederhanakan, kita harus menemukan a dan b yang memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} 1 &= a + b \\ 5 &= 4a + 2b. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sistem aljabar komputer, substitusi, atau eliminasi, kita memperoleh $a = \frac{3}{2}$ dan $b = -\frac{1}{2}$. Oleh karena itu, rumus tertutupnya adalah

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2.$$

Rumus ini sama dengan rumus yang kita temukan dalam Contoh 4.3.3 setelah bentuk pada penyelesaian tersebut dikalikan.

Tidak semua barisan memiliki rumus tertutup berbentuk polinomial. Kita dapat menggunakan teori selisih hingga untuk mengenali barisan-barisan tersebut.

Contoh 4.3.9

Tentukan apakah barisan berikut dapat dinyatakan dengan polinomial, dan jika dapat, tentukan derajatnya.

1. $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
2. $0, 7, 50, 183, 484, 1055, \ldots$

3. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Penyelesaian.

1. Seperti yang kita lihat dalam Contoh 4.3.4, barisan ini tidak bersifat Δ^k-konstan untuk nilai k mana pun. Oleh karena itu, rumus tertutup barisan tersebut bukan polinomial. Bahkan, kita mengetahui bahwa rumus tertutupnya adalah $a_n = 2^n$, yang tumbuh lebih cepat daripada polinomial mana pun (sehingga bukan polinomial).

2. Barisan selisih pertamanya adalah $7, 43, 133, 301, 571, \ldots$. Selisih keduanya adalah $36, 90, 168, 270, \ldots$. Selisih ketiganya adalah $54, 78, 102, \ldots$. Selisih keempatnya adalah $24, 24, \ldots$. Berdasarkan data yang tersedia, barisan selisih ini konstan. Jadi, barisan awal bersifat Δ^4-konstan dan rumus tertutupnya berupa polinomial berderajat 4.

3. Ini adalah barisan Fibonacci. Barisan selisih pertamanya adalah $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, sedangkan selisih keduanya adalah $1, 0, 1, 1, 2, 3, 5 \ldots$. Kita melihat bahwa setelah beberapa suku pertama, barisan awal muncul kembali. Jadi, tidak akan pernah ada tingkat selisih yang konstan; dengan demikian, rumus tertutup barisan Fibonacci bukan polinomial.

Peringatan 4.3.10 Polinomial berderajat n sepenuhnya ditentukan oleh $n + 1$ koefisiennya (+1 berasal dari suku konstan). Oleh karena itu, kita selalu dapat menemukan suatu polinomial berderajat n jika diberikan $n + 1$ suku sebuah barisan.

Dari $n + 1$ suku tersebut, kita dapat mengambil selisih dari selisih dari selisih, dan seterusnya, hingga (setelah n langkah) hanya tersisa satu bilangan. Berdasarkan data yang tersedia, selisih ke-n ini tampak konstan. Namun, hal ini tidak berarti bahwa kita telah menemukan rumus tertutup untuk barisan yang *dimaksud*. Itulah sebabnya kita perlu memahami konteks khusus dari barisan yang sedang dipelajari.

4.3.4 Menyelesaikan Sistem Persamaan dengan Teknologi

Inti pencocokan polinomial adalah bahwa jika kita dapat memastikan bahwa rumus tertutup suatu barisan berupa polinomial, kita dapat menemukan rumus tersebut. Karena kita mengetahui derajat polinomialnya, kita hanya perlu menemukan koefisien-koefisiennya. Dengan suku barisan yang cukup banyak, kita dapat menyusun sistem persamaan linear dalam jumlah yang memadai, dan penyelesaiannya akan memberikan koefisien-koefisien tersebut. Namun, untuk itu kita harus menyelesaikan suatu sistem persamaan linear.

Untuk polinomial berderajat 2, kita perlu menemukan tiga koefisien (suku konstan, koefisien n, dan koefisien n^2). Sistem yang terdiri atas tiga persamaan

linear cukup untuk menemukan tiga peubah yang belum diketahui ini. Bahkan, karena a_0 merupakan suku konstan, sebenarnya kita cukup menggunakan dua persamaan dengan dua peubah yang belum diketahui; sistem seperti ini tidak sulit diselesaikan secara manual.

Untuk polinomial berderajat lebih tinggi, jumlah persamaannya lebih banyak dan penyelesaian secara manual dapat melelahkan. Untungnya, komputer dapat menyelesaikan persamaan-persamaan ini dengan mudah. Di bawah ini kita memperagakan cara menggunakan sistem aljabar komputer gratis SageMath serta Python untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Selain kedua pilihan ini, hampir semua sistem aljabar komputer (termasuk Wolfram Alpha) dapat menyelesaikan sistem persamaan semacam ini.

Misalkan kita memiliki sistem yang terdiri atas tiga persamaan dengan tiga peubah yang belum diketahui, seperti pada contoh papan catur di atas:

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c \\ 5 &= 8a + 4b + 2c \\ 14 &= 27a + 9b + 3c \end{aligned}$$

Dalam SageMath, kita dapat menggunakan metode solve untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Berikut kodenya:

```
var('a b c')
solve(
  [
    a+b+c==1,
    8*a+4*b+2*c==5,
    27*a+9*b+3*c==14
  ], a,b,c)
```

```
[[a == (1/3), b == (1/2), c == (1/6)]]
```

Cara ini lebih mudah daripada menggunakan Python, tetapi Python mungkin lebih mudah tersedia. Salah satu cara menyelesaikan sistem tersebut dalam Python adalah menggunakan pustaka NumPy. Dalam hal ini, Anda membuat matriks koefisien dan vektor konstanta, lalu menggunakan metode solve. Berikut kodenya:

```
import numpy as np
A = np.array([[1,1,1],[8,4,2],[27,9,3]])
b = np.array([1,5,14])
x = np.linalg.solve(A,b)
print(x)
```

Berikut penjelasan tentang prosesnya: kita membuat matriks `A` yang memuat koefisien-koefisien sistem persamaan (bukan koefisien rumus tertutup yang sedang kita cari),

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

serta vektor b yang memuat konstanta-konstantanya,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

NumPy kemudian menyelesaikan persamaan matriks

$$Ax = b.$$

Vektor x yang memenuhi persamaan matriks ini berisi nilai peubah-peubah yang belum diketahui dalam sistem tersebut (yakni vektor $[a, b, c]$).

Tentu saja, setelah menemukan koefisien polinomial, Anda tetap perlu menuliskan rumus tertutup dengan menggunakan koefisien tersebut. Sebaiknya selalu periksa apakah rumus itu benar dengan menggunakan nilai n yang tidak Anda gunakan ketika menyusun sistem persamaan.

4.3.5 Pertanyaan Bacaan

1. Pasangkan setiap barisan di sebelah kiri dengan jenis rumus tertutup yang mungkin dimilikinya di sebelah kanan.

$3, 7, 11, 15, 19, \ldots$	Rumus linear
$3, 4, 7, 13, 23, \ldots$	Rumus kuadrat
$3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$	Rumus kubik
$3, 5, 8, 12, 17, \ldots$	Eksponensial (bukan polinomial)

2. Misalkan (a_n) adalah barisan yang rumus tertutup bagi barisan selisihnya berupa polinomial berderajat 2. Apa yang dapat Anda simpulkan tentang barisan jumlah parsial (a_n)? Jelaskan.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang materi bagian ini yang mungkin ingin Anda atau teman sekelas Anda ketahui setelah membacanya.

4.3.6 Soal Latihan

1. Perhatikan barisan $10, 13, 16, 19, 22 \ldots$ dengan $a_1 = 10$.

(a) Apa definisi rekursif barisan tersebut?

(b) Berikan rumus tertutup untuk suku ke-n barisan tersebut.

(c) Apakah 1555 merupakan salah satu suku dalam barisan tersebut?

(d) Ada berapa suku dalam barisan berhingga $10, 13, 16, \ldots, 433$?

(e) Hitunglah jumlah $10 + 13 + 16 + \ldots + 433$.

(f) Gunakan hasil di atas untuk menemukan b_n, yaitu suku ke-n dari $3, 13, 26, 42, 61, \ldots$.

2. Perhatikan barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ yang diawali $5, 10, 15, 20, \ldots$.

a. Berapakah suku berikutnya dari barisan tersebut?

b. Tentukan rumus bagi suku ke-n dari barisan tersebut.

$a_n =$ _____

c. Hitung jumlah 100 suku pertama barisan tersebut: $\sum_{k=0}^{99} a_k$.

3. Perhatikan jumlah $9 + 14 + 19 + 24 + \cdots + 229$.

a. Berapa banyak suku dalam jumlah tersebut?

b. Hitung jumlah tersebut dengan teknik yang dibahas dalam bagian ini.

4. Perhatikan barisan $-18, -6, 6, 18, \ldots, 12n + 6$.

a. Berapa banyak suku yang terdapat dalam barisan tersebut? Nyatakan jawaban dalam n.

b. Berapakah suku kedua dari belakang?

c. Tentukan jumlah seluruh suku dalam barisan tersebut sebagai fungsi dari n.

5. Hitung $2 + 8 + 14 + 20 + \cdots + 1808$ dengan suatu teknik dari bagian ini.

6. Gunakan pencocokan polinomial untuk menentukan rumus suku ke-n dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ yang diawali dengan

$0, 9, 20, 33, 48, 65, \ldots$

$a_n =$ _____

7. Gunakan pencocokan polinomial untuk menentukan rumus suku ke-n dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ yang diawali dengan

$-1, 4, 11, 20, 31, 44, \ldots$

$a_n =$ _____

8. Gunakan pencocokan polinomial untuk menentukan rumus suku ke-n dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ yang diawali dengan

$$5, 5, 17, 53, 125, 245, \ldots$$

$a_n =$ _____

9. Gunakan pencocokan polinomial untuk menentukan rumus suku ke-n dari barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ yang diawali dengan

$9, 43, 117, 243, 433, \ldots$ Perhatikan bahwa suku pertama di atas adalah a_1, bukan a_0.

$a_n =$ _____

10. Misalkan $a_n = 2n^2 + 3n + 2$. Temukan rumus tertutup untuk barisan selisih dengan menghitung $a_n - a_{n-1}$. Sederhanakan jawaban Anda semaksimal mungkin.

11. Gunakan pencocokan polinomial untuk menentukan rumus suku ke-n dari barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ yang diawali dengan

$7, 32, 87, 184, 335, \ldots$ Perhatikan bahwa suku pertama di atas adalah a_1, bukan a_0.

$a_n =$ _____

4.3.7 Latihan Tambahan

1. Toko kelontong di lingkungan Anda memiliki mesin permen yang memberikan 7 butir Skittles kepada pelanggan pertama yang memasukkan sekeping uang 25 sen, 10 butir kepada pelanggan kedua, 13 butir kepada pelanggan ketiga, 16 butir kepada pelanggan keempat, dan seterusnya. Berapa jumlah seluruh permen yang telah dikeluarkan mesin setelah 20 keping uang 25 sen dimasukkan? Bagaimana setelah n keping?

2. Tidak mau kalah, pasar swalayan besar di seberang jalan memasang mesin permen yang memberikan 4 butir Skittles kepada pelanggan pertama, 7 butir kepada pelanggan kedua, 12 butir kepada pelanggan ketiga, 19 butir kepada pelanggan keempat, dan seterusnya. Berapa jumlah seluruh Skittles yang telah dikeluarkan mesin setelah 20 keping uang 25 sen dimasukkan? Bagaimana setelah n keping?

3. Susunlah barisan yang memiliki

(a) $3, 3, 3, 3, \ldots$ sebagai selisih keduanya.

(b) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ sebagai selisih ketiganya.

(c) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ sebagai selisih ke-100-nya.

4. Perhatikan barisan $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$. Jelaskan bagaimana Anda mengetahui bahwa rumus tertutup barisan tersebut berbentuk kuadrat. Kemudian, "dugalah" rumus yang benar dengan membandingkan barisan ini dengan bilangan kuadrat $1, 4, 9, 16, \ldots$ (jangan gunakan pencocokan polinomial).

5. Gunakan teknik yang serupa dengan latihan sebelumnya untuk menemukan rumus tertutup bagi barisan $2, 11, 34, 77, 146, 247, \ldots$.

6. Perhatikan barisan $2, 7, 15, 26, 40, 57, \ldots$ (dengan $a_0 = 2$). Dengan memperhatikan selisih antarsuku, nyatakan barisan tersebut sebagai barisan jumlah parsial. Kemudian, temukan rumus tertutup barisan itu dengan menghitung jumlah parsial ke-n.

7. Jika Anda memiliki cukup banyak tusuk gigi, Anda dapat membuat kisi segitiga berukuran besar. Di bawah ini ditampilkan kisi segitiga berukuran 1 dan berukuran 2. Kisi berukuran 1 memerlukan 3 tusuk gigi, sedangkan kisi

berukuran 2 memerlukan 9 tusuk gigi.



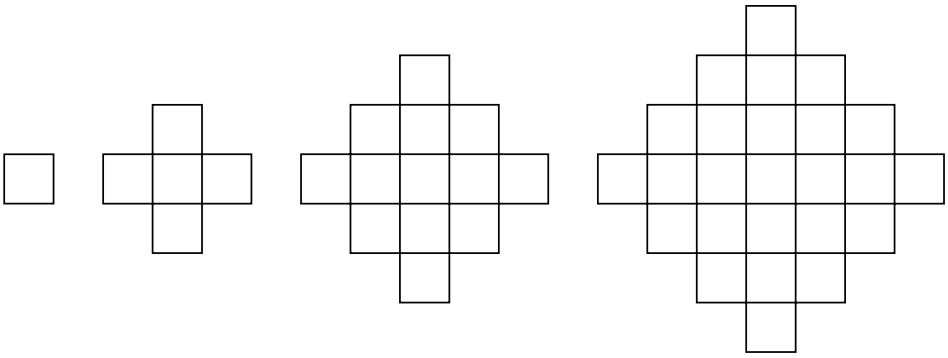
(a) Misalkan t_n adalah jumlah tusuk gigi yang diperlukan untuk membuat kisi segitiga berukuran n. Tuliskan 5 suku pertama barisan $t_1, t_2, \ldots$.

(b) Temukan definisi rekursif barisan tersebut. Jelaskan mengapa jawaban Anda benar.

(c) Apakah barisan tersebut merupakan barisan aritmetika atau geometri? Jika bukan, apakah barisan itu merupakan barisan jumlah parsial dari barisan aritmetika atau geometri? Jelaskan mengapa jawaban Anda benar.

(d) Gunakan hasil dari bagian (c) untuk menemukan rumus tertutup barisan tersebut. Tunjukkan langkah-langkah Anda.

8. Jika Anda mengarsir persegi berukuran $n \times n$ pada kertas berpetak, Anda dapat melakukannya dengan cara biasa (sisi-sisinya sejajar dengan tepi kertas) atau dengan cara yang lebih menarik, seperti diilustrasikan di bawah ini:



Hal yang menarik di sini adalah bahwa persegi 3×3 kini memiliki luas 13. Tujuan kita adalah menemukan rumus untuk luas persegi (diagonal) berukuran $n \times n$.

(a) Tuliskan beberapa suku pertama barisan luas (anggap $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, dan seterusnya). Apakah barisan tersebut merupakan barisan aritmetika atau geometri? Jika bukan, apakah barisan itu merupakan barisan jumlah parsial dari barisan aritmetika atau geometri? Jelaskan mengapa jawaban Anda benar dengan merujuk pada persegi-persegi diagonal tersebut.

(b) Gunakan hasil dari bagian (a) untuk menemukan rumus tertutup barisan tersebut. Tunjukkan langkah-langkah Anda. Perhatikan bahwa meskipun

ada banyak cara untuk menemukan rumus tertutup di sini, Anda harus menggunakan jumlah parsial secara khusus.

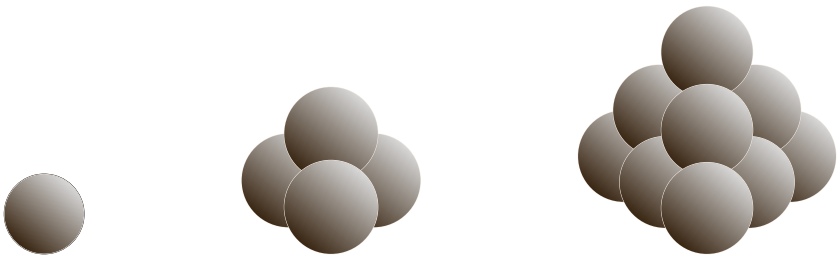
(c) Temukan rumus tertutupnya dengan sebanyak mungkin cara menarik lainnya.

9. Perumum Soal Latihan 5: temukan rumus tertutup untuk barisan selisih dari $a_n = an^2 + bn + c$. Dengan kata lain, buktikan bahwa setiap barisan kuadrat memiliki barisan selisih aritmetika.

10. Dapatkah Anda menggunakan pencocokan polinomial untuk menemukan rumus suku ke-n dari barisan $4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$? Jelaskan alasan Anda.

11. Apakah barisan selisih ke-n dari $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$ pada akhirnya akan menjadi konstan? Jelaskan.

12. Pada waktu senggang, para bajak laut hantu gemar menumpuk peluru meriam menjadi piramida beralas segitiga (atau tetrahedron), seperti yang digambarkan di sini:



Catatan: Tetrahedron ini padat, sehingga ada beberapa peluru meriam yang terhalang dari pandangan (misalnya, gambar di sebelah kanan memiliki satu peluru meriam di belakang yang tidak terlihat pada gambar).

Para bajak laut ingin mengetahui jumlah peluru meriam yang diperlukan untuk membangun piramida setinggi 15 lapisan (dan dengan demikian memecahkan rekor dunia penumpukan peluru meriam). Dapatkah Anda membantu mereka?

(a) Misalkan $P(n)$ menyatakan jumlah peluru meriam yang diperlukan untuk membuat piramida setinggi n lapisan. Jadi, $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, dan seterusnya. Hitung $P(3)$, $P(4)$, dan $P(5)$.

(b) Gunakan pencocokan polinomial untuk menemukan rumus tertutup $P(n)$. Tunjukkan langkah-langkah Anda.

(c) Jawablah pertanyaan para bajak laut: berapa banyak peluru meriam yang mereka perlukan untuk membuat piramida setinggi 15 lapisan?

(d) Bonus: Temukan barisan ini dalam segitiga Pascal. Mengapa hasil tersebut masuk akal?

4.4 Barisan Eksponensial

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Mengidentifikasi suatu barisan sebagai barisan eksponensial berdasarkan relasi rekurensinya.
2. Menerapkan teknik akar karakteristik untuk menyelesaikan relasi rekurensi yang sesuai.

4.4.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Anda memiliki banyak persegi berukuran 1×1 dan domino berukuran 1×2. Anda ingin menyusunnya untuk membentuk lajur berukuran 1×15. Ada berapa cara untuk melakukannya?

Bagaimana jika persegi-persegi tersebut tersedia dalam tiga warna berbeda dan domino-domino tersebut tersedia dalam empat warna berbeda? Mengapa pertanyaan kedua ini lebih mudah daripada pertanyaan pertama?

Petunjuk. Mulailah dengan menyusun relasi rekurensi. Bagaimana hubungan berbagai lajur 1×3 dan lajur 1×4 dengan lajur 1×5?

Dalam Subbab 4.3 kita melihat bahwa jika barisan selisih pada suatu tingkat bersifat konstan, barisan awal memiliki rumus tertutup berbentuk polinomial. Adakah barisan yang selisihnya tidak pernah konstan? Seperti apakah rumus tertutupnya?

Perhatikan barisan Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots.$$

Jika kita memperhatikan selisih pertamanya, kita memperoleh barisan berikut:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$$

yang merupakan barisan Fibonacci itu sendiri. Hal ini tidak mengherankan karena barisan Fibonacci didefinisikan oleh relasi rekurensi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Relasi tersebut tepatnya mengatakan bahwa untuk memperoleh suku berikutnya dalam barisan, kita mengambil suku saat ini lalu menambahkan... salah satu suku dalam barisan!

Tentu saja, jika kita mengambil selisih berikutnya, kita kembali memperoleh barisan yang sama, dan demikian seterusnya. Jadi, tidak ada selisih ke-n yang akan menjadi konstan.

Barisan lain yang memiliki perilaku ini adalah pangkat-pangkat 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \ldots$$

yang barisan selisihnya adalah

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots.$$

Kita juga dapat melihatnya dari relasi rekurensi karena

$$a_n = 2a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-1}.$$

Laju pertumbuhan barisan ini—dan pada umumnya setiap barisan geometri—sebanding dengan barisan itu sendiri.

Jika pernah mempelajari kalkulus, Anda mungkin ingat bahwa fungsi yang laju perubahannya (turunannya, dalam konteks kalkulus) sebanding dengan fungsi itu sendiri adalah fungsi eksponensial. Demikian pula di sini, barisan geometri yang memiliki rumus tertutup eksponensial memiliki laju perubahan yang sebanding dengan barisan itu sendiri.

Dalam bagian ini, kita akan menyelidiki barisan yang berubah dengan laju sebanding dengan barisan itu sendiri dan melihat bahwa semuanya memiliki rumus tertutup eksponensial atau variasinya.

Kegiatan Pratinjau

1. Perhatikan relasi rekurensi

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}.$$

Karena suku ke-n dinyatakan sebagai kombinasi dua suku sebelumnya, kita memerlukan dua suku awal untuk menentukan barisan tersebut. Suku awal yang berbeda akan menghasilkan barisan yang berbeda.

(a) Barisan apa yang Anda peroleh jika syarat awalnya adalah $a_0 = 1$, $a_1 = 2$? Berikan lima suku pertama (termasuk 1 dan 2).

(b) Berdasarkan beberapa suku pertama, apakah rumus tertutup barisan ini?

(c) Barisan apa yang Anda peroleh jika syarat awalnya adalah $a_0 = 1$, $a_1 = 3$? Berikan lima suku pertama.

(d) Berdasarkan beberapa suku pertama, apakah rumus tertutup barisan ini?

(e) Barisan apa yang Anda peroleh jika syarat awalnya adalah $a_0 = 2$, $a_1 = 5$? Berikan lima suku pertama.

(f) Berdasarkan beberapa suku pertama, apakah rumus tertutup barisan ini?

Petunjuk. Bagaimana hubungan suku-suku dalam barisan ini dengan suku-suku dalam dua barisan sebelumnya?

4.4.2 Menjumlahkan Barisan Geometri: Kalikan, Geser, dan Kurangkan

Misalkan sebuah mesin permen mengeluarkan permen menurut barisan geometri: mula-mula 1 butir, kemudian 2 butir, lalu 4 butir, 8 butir, dan seterusnya. Berapa jumlah seluruh permen yang Anda terima setelah menggunakan mesin itu 10 kali?

Kita dapat menyusun barisan jumlah parsial $1, 1+2, 1+2+4, 1+2+4+8, \ldots$, yang menghasilkan

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$$

Barisan ini bukan barisan geometri, tetapi hampir menyerupainya. Bahkan, jika kita menambahkan 1 pada setiap suku, kita memperoleh barisan yang jelas tampak seperti barisan geometri $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$. Jadi, kita dapat menduga bahwa rumus tertutup barisan jumlah tersebut adalah $2^{n+1} - 1$, dengan suku pertamanya berindeks 0. Jika dugaan ini benar, jawaban untuk pertanyaan tentang permen adalah $2^{10} - 1 = 1023$.

Pengamatan yang lebih menarik adalah bahwa barisan jumlah parsial suatu barisan geometri kembali memiliki bentuk yang hampir geometris. Mari kita pelajari cara menghitung jumlah barisan geometri secara umum.

Kita tidak dapat begitu saja membalikkan urutan dan menjumlahkannya seperti ketika menjumlahkan barisan aritmetika. Dapatkah Anda melihat alasannya? Kita memperoleh suku yang sama berulang kali karena terdapat selisih konstan. Jadi, ketika kita menambahkan selisih itu dalam satu arah, kita mengurangkan selisih

tersebut dalam arah sebaliknya sehingga tersisa jumlah yang konstan. Untuk penjumlahan geometri, kita menggunakan teknik yang berbeda.

Contoh 4.4.1

Berapakah $3 + 6 + 12 + 24 + \cdots + 12288$?

Penyelesaian. Kalikan setiap suku dengan 2, yaitu rasio tetapnya. Kita memperoleh $2S = 6 + 12 + 24 + \cdots + 24576$. Sekarang kurangkan: $2S - S = -3 + 24576 = 24573$. Karena $2S - S = S$, kita telah memperoleh jawabannya.

Agar proses dalam contoh di atas terlihat lebih jelas, kita dapat menuliskannya dengan cara berikut:

$$\begin{array}{rrll} & S = & 3 + & 6 + 12 + 24 + \cdots + 12288 & \\ - & 2S = & & 6 + 12 + 24 + \cdots + 12288 & +24576 \\ \hline & -S = & 3 + & 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 & -24576 \end{array}$$

Kemudian, bagi kedua ruas dengan -1 dan kita memperoleh hasil yang sama untuk S. Gagasannya adalah bahwa dengan mengalikan jumlah tersebut dengan rasio tetap, setiap suku berubah menjadi suku berikutnya. Kita menggeser penjumlahan tersebut sehingga hampir semua suku saling menghapus ketika dikurangkan, dan hanya menyisakan suku pertama serta suku terakhir yang baru.

Contoh 4.4.2

Temukan rumus tertutup untuk $S(n) = 2 + 10 + 50 + \cdots + 2 \cdot 5^n$.

Penyelesaian. Rasio persekutuannya adalah 5. Jadi, kita memiliki

$$\begin{array}{rrl} & S & = 2 + 10 + 50 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ - & 5S & = \quad 10 + 50 + \cdots + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} \\ \hline & -4S & = 2 - 2 \cdot 5^{n+1} \end{array}$$

Dengan demikian, $S = \dfrac{2 - 2 \cdot 5^{n+1}}{-4}$.

Meskipun teknik ini mungkin tampak baru, Anda barangkali pernah menggunakannya.

Contoh 4.4.3

Nyatakan $0.464646\ldots$ sebagai pecahan.

Penyelesaian. Misalkan $N = 0.46464646\ldots$. Perhatikan $0.01N$. Kita memperoleh:

$$\begin{array}{rrl} & N = & 0.4646464\ldots \\ - & 0.01N = & 0.00464646\ldots \\ \hline & 0.99N = & 0.46 \end{array}$$

Jadi, $N = \frac{46}{99}$. Apa yang baru saja kita lakukan? Kita memandang desimal berulang $0.464646\ldots$ sebagai jumlah barisan geometri $0.46, 0.0046, 0.000046, \ldots$ dengan rasio tetap 0.01. Perbedaan utamanya adalah bahwa sekarang kita menghitung jumlah geometri *tak hingga*, sehingga tidak ada suku "terakhir" tambahan yang perlu diperhitungkan. Sebenarnya, hasil ini diperoleh dengan mengambil limit, seperti yang dilakukan dalam kalkulus ketika kita menghitung jumlah geometri *tak hingga*.

Sebagai rangkuman, kini kita dapat menemukan rumus tertutup untuk barisan a_n yang laju pertumbuhannya berupa fungsi eksponensial: $a_n - a_{n-1} = b_n$, dengan b_n merupakan barisan geometri (yakni fungsi eksponensial). Rumus tertutup seperti apa yang kita peroleh? Ternyata berupa fungsi eksponensial *lain*!

4.4.3 Teknik Akar Karakteristik

Misalkan kita ingin menyelesaikan relasi rekurensi yang dinyatakan sebagai kombinasi dua suku sebelumnya, misalnya $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Dengan kata lain, kita ingin menemukan fungsi dari n yang memenuhi $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$. Perhatikan bagaimana kita membangun barisan ini secara iteratif.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 6a_0 \\ a_3 &= a_2 + 6a_1 = a_1 + 6a_0 + 6a_1 \\ a_4 &= a_3 + 6a_2 = a_1 + 6a_0 + 6a_1 + 6^2a_0 + 6a_1 \end{aligned}$$

Mari berhenti di sini dan mengakui bahwa perhitungannya mulai menjadi sangat rumit. Namun, kita melihat bahwa pada setiap langkah, salah satu hal yang dilakukan adalah mengalikan hasil iterasi sebelumnya dengan 6. Jadi, rumus tertutup kita akan memuat 6 yang dikalikan berulang kali. Oleh karena itu, masuk akal untuk menduga bahwa penyelesaiannya memuat bagian yang berbentuk geometris. Mungkin penyelesaiannya berbentuk r^n untuk suatu konstanta r.

Hal yang menguntungkan adalah kita mengetahui cara memeriksa apakah suatu rumus benar-benar merupakan penyelesaian relasi rekurensi: substitusikan rumus itu. Apa yang terjadi jika kita menyubstitusikan r^n ke dalam relasi rekurensi di atas? Kita memperoleh

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0.$$

Sekarang selesaikan persamaan untuk r:

$$r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0,$$

Dengan memfaktorkan, kita memperoleh $r = -2$ atau $r = 3$ (atau $r = 0$, meskipun nilai ini tidak membantu kita). Hasil ini menunjukkan bahwa $a_n = (-2)^n$ merupakan

penyelesaian relasi rekurensi tersebut, demikian pula $a_n = 3^n$. Manakah yang benar? Keduanya benar selama kita belum menentukan syarat awal. Perhatikan bahwa kita juga dapat menggunakan $a_n = (-2)^n + 3^n$. Atau $a_n = 7(-2)^n + 4 \cdot 3^n$. Bahkan, untuk sembarang a dan b, $a_n = a(-2)^n + b3^n$ merupakan penyelesaian (cobalah menyubstitusikannya ke dalam relasi rekurensi). Untuk menemukan nilai a dan b, gunakan syarat awal.

Pengamatan ini mengarahkan kita pada teknik yang lebih umum untuk menyelesaikan relasi rekurensi. Perhatikan bahwa kita selalu dapat mengeluarkan faktor r^{n-2} seperti di atas. Jadi, kita sebenarnya hanya perlu memperhatikan bagian lainnya. Bagian lain ini kita sebut **persamaan karakteristik** dari relasi rekurensi tersebut. Kita ingin menemukan akar-akar persamaan karakteristik, yang disebut **akar karakteristik**.

Akar Karakteristik.

Untuk relasi rekurensi $a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 0$, **polinomial karakteristik**nya adalah

$$x^2 + \alpha x + \beta$$

yang menghasilkan **persamaan karakteristik**:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0.$$

Jika r_1 dan r_2 adalah dua akar berbeda dari polinomial karakteristik (yakni, penyelesaian persamaan karakteristik), penyelesaian relasi rekurensi tersebut adalah

$$a_n = ar_1^n + br_2^n,$$

dengan a dan b merupakan konstanta yang ditentukan oleh syarat awal.

Contoh 4.4.4

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ dengan $a_0 = 2$ dan $a_1 = 3$.

Penyelesaian. Tuliskan kembali relasi rekurensinya sebagai $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$. Sekarang susun persamaan karakteristiknya:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

lalu selesaikan untuk x:

$$(x - 2)(x - 5) = 0,$$

sehingga $x = 2$ dan $x = 5$ merupakan akar karakteristik. Oleh karena itu, kita mengetahui bahwa penyelesaian relasi rekurensi tersebut berbentuk

$$a_n = a2^n + b5^n.$$

Untuk menemukan a dan b, substitusikan $n = 0$ dan $n = 1$ sehingga

diperoleh sistem dua persamaan dengan dua peubah yang belum diketahui:

$$2 = a2^0 + b5^0 = a + b$$
$$3 = a2^1 + b5^1 = 2a + 5b.$$

Penyelesaian sistem ini memberikan $a = \frac{7}{3}$ dan $b = -\frac{1}{3}$, sehingga penyelesaian relasi rekurensinya adalah

$$a_n = \frac{7}{3}2^n - \frac{1}{3}5^n.$$

Barangkali relasi rekurensi yang paling terkenal adalah $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, yang bersama syarat awal $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$ mendefinisikan barisan Fibonacci. Namun, perhatikan bahwa relasi ini tepat merupakan jenis relasi rekurensi yang dapat diselesaikan dengan teknik akar karakteristik. Ketika kita menerapkannya, satu-satunya perbedaan adalah bahwa persamaan karakteristiknya tidak dapat difaktorkan, sehingga kita harus menggunakan rumus kuadrat untuk menemukan akar karakteristik. Hasilnya adalah bilangan irasional ketiga yang paling terkenal, yaitu φ, sang **rasio emas**.

Sebelum meninggalkan teknik akar karakteristik, kita perlu memikirkan apa yang mungkin terjadi ketika menyelesaikan persamaan karakteristik. Dalam contoh di atas, polinomial karakteristik memiliki dua akar berbeda. Akar-akar tersebut dapat berupa bilangan bulat atau mungkin bilangan irasional (yang harus ditemukan dengan rumus kuadrat). Dalam kasus seperti ini, kita mengetahui bentuk penyelesaian relasi rekurensinya.

Namun, polinomial karakteristik mungkin hanya memiliki satu akar. Hal ini dapat terjadi jika polinomial karakteristik dapat difaktorkan menjadi $(x - r)^2$. Dalam kasus ini, r^n tetap merupakan penyelesaian relasi rekurensi, tetapi kita tidak dapat menemukan penyelesaian untuk semua syarat awal dengan bentuk umum $a_n = ar_1^n + br_2^n$, sebab kita tidak dapat membedakan r_1^n dari r_2^n. Untungnya, ada jalan keluar:

Teknik Akar Karakteristik untuk Akar Berulang.

Misalkan relasi rekurensi $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ memiliki polinomial karakteristik dengan hanya satu akar r. Maka, penyelesaian relasi rekurensi tersebut adalah

$$a_n = ar^n + bnr^n$$

dengan a dan b merupakan konstanta yang ditentukan oleh syarat awal.

Perhatikan faktor tambahan n dalam bnr^n. Faktor ini memungkinkan kita menentukan konstanta a dan b berdasarkan syarat awal.

Contoh 4.4.5

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 4$.

Penyelesaian. Polinomial karakteristiknya adalah $x^2 - 6x + 9$. Kita menyelesaikan persamaan karakteristik

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

dengan memfaktorkan:

$$(x-3)^2 = 0,$$

sehingga $x = 3$ merupakan satu-satunya akar karakteristik. Oleh karena itu, kita mengetahui bahwa penyelesaian relasi rekurensinya berbentuk

$$a_n = a3^n + bn3^n$$

untuk suatu konstanta a dan b. Sekarang gunakan syarat awal:

$$a_0 = 1 = a3^0 + b \cdot 0 \cdot 3^0 = a$$
$$a_1 = 4 = a \cdot 3 + b \cdot 1 \cdot 3 = 3a + 3b.$$

Karena $a = 1$, kita memperoleh $b = \frac{1}{3}$. Oleh karena itu, penyelesaian relasi rekurensinya adalah

$$a_n = 3^n + \frac{1}{3}n3^n.$$

Meskipun kita tidak akan membahas contoh yang lebih rumit daripada contoh-contoh ini, teknik akar karakteristik dapat diterapkan pada relasi rekurensi yang jauh lebih rumit. Sebagai contoh, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3}$ memiliki polinomial karakteristik $x^3 - 2x^2 - x + 3$. Jika kita mengetahui cara memfaktorkan polinomial berderajat 3 (atau lebih) semacam itu, kita dapat dengan mudah menemukan akar karakteristik dan kemudian menyelesaikan relasi rekurensinya (jika terdapat 3 akar berbeda, penyelesaiannya berbentuk $a_n = ar_1^n + br_2^n + cr_3^n$). Akar karakteristik juga mungkin berupa bilangan kompleks.

Namun, teknik akar karakteristik hanya berguna untuk menyelesaikan relasi rekurensi dalam bentuk tertentu: a_n dinyatakan sebagai kombinasi linear sejumlah suku sebelumnya. Relasi semacam ini disebut **relasi rekurensi homogen linear dengan koefisien konstan**. Istilah "homogen" mengacu pada kenyataan bahwa relasi rekurensi tidak memuat suku tambahan selain kelipatan suku-suku a_j. Sebagai contoh, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ bersifat *tak homogen* karena terdapat konstanta tambahan 1. Ada metode umum untuk menyelesaikan relasi semacam ini, tetapi kita tidak akan membahasnya di sini selain melalui metode teleskopik atau iterasi yang dijelaskan

di atas.

4.4.4 Pertanyaan Bacaan

1. Manakah di antara relasi rekurensi berikut yang cocok diselesaikan dengan teknik akar karakteristik? Pilih semua jawaban yang sesuai.

A. $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$

B. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3}$

C. $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{2}{3}(-1)^n$

D. $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5$

E. $x^2 - 3x - 1 = 0$

2. Pada langkah mana Anda perlu menggunakan syarat awal ketika menerapkan teknik akar karakteristik? Apa yang akan terjadi jika syarat awal itu tidak digunakan? Jelaskan.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang materi bagian ini yang mungkin ingin Anda atau teman sekelas Anda ketahui.

4.4.5 Soal Latihan

1. Hitung $6 + 30 + 150 + \cdots + 6 \cdot 5^{19}$.

2. Hitung $1 - \frac{7}{4} + \frac{49}{16} - \cdots + (-1)^{37}\frac{7^{37}}{4^{37}}$.

3. Selesaikan relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2^n$ dengan $a_0 = -2$.

$a_n =$_____

4. Tentukan solusi relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} + 24a_{n-2}$ dengan suku awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 2$.

$a_n =$ _____

5. Tentukan solusi relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dengan suku awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 1$.

$a_n =$ _____

Tentukan solusi relasi rekurensi $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$ dengan suku awal $b_0 = 9$ dan $b_1 = 14$.

$b_n =$ _____

6. Tentukan solusi relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dengan suku awal $a_0 = 4$ dan $a_1 = 17$.

$a_n =$ _____

4.4.6 Latihan Tambahan

1. Temukan dua suku berikutnya dalam $(a_n)_{n\geq 0}$ yang diawali dengan $3, 5, 11, 21, 43, 85 \ldots$. Kemudian, berikan definisi rekursif barisan tersebut. Terakhir, gunakan teknik akar karakteristik untuk menemukan rumus tertutup barisan tersebut.

2. Perhatikan barisan $2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \ldots$ (dengan $a_0 = 2$).

(a) Uraikan laju pertumbuhan barisan ini.

(b) Temukan definisi rekursif barisan tersebut.

(c) Temukan rumus tertutup barisan tersebut.

(d) Jika Anda memperhatikan barisan selisih antarsuku, kemudian barisan selisih kedua, barisan selisih ketiga, dan seterusnya, apakah pada akhirnya Anda akan memperoleh barisan konstan? Jelaskan bagaimana Anda mengetahuinya.

3. Tunjukkan bahwa 4^n merupakan penyelesaian relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

4. Misalkan r^n dan q^n keduanya merupakan penyelesaian relasi rekurensi berbentuk $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$. Buktikan bahwa $c \cdot r^n + d \cdot q^n$ juga merupakan penyelesaian relasi rekurensi tersebut untuk sembarang konstanta c, d.

5. Ingatlah kembali mesin permen ajaib di toko kelontong dekat rumah Anda. Misalkan saat sekeping koin 25 sen dimasukkan ke mesin untuk pertama kalinya, mesin itu mengeluarkan 1 butir permen Skittles. Pada kali kedua, 4 butir permen Skittles, kali ketiga 16 butir permen Skittles, kali keempat 64 butir permen Skittles, dan seterusnya.

(a) Temukan rumus rekursif dan rumus tertutup untuk banyaknya butir permen Skittles yang diterima pelanggan ke-n.

(b) Periksa jawaban Anda untuk rumus tertutup tersebut dengan menyelesaikan relasi rekurensinya menggunakan teknik akar karakteristik.

6. Misalkan a_n adalah banyaknya desain ubin $1 \times n$ yang dapat dibuat menggunakan persegi 1×1 yang tersedia dalam 4 warna dan domino 1×2 yang tersedia dalam 5 warna.

(a) Pertama, temukan relasi rekurensi yang menggambarkan masalah ini. Jelaskan mengapa relasi rekurensi tersebut benar (dalam konteks masalah ini).

(b) Tuliskan enam suku pertama barisan $a_1, a_2, \ldots$.

(c) Selesaikan relasi rekurensi tersebut. Artinya, temukan rumus tertutup untuk a_n.

7. Anda memiliki ubin 1×1 yang tersedia dalam 2 warna berbeda dan ubin 1×2 yang tersedia dalam 3 warna berbeda. Kita ingin menentukan banyaknya desain jalur berbeda berukuran $1 \times n$ yang dapat dibuat dari ubin-ubin ini.

(a) Temukan rumus rekursif untuk barisan a_n, yaitu banyaknya jalur dengan panjang n.

(b) Selesaikan relasi rekurensi tersebut menggunakan teknik akar karakteristik.

8. Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.

(a) Apa penyelesaiannya jika suku-suku awalnya adalah $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$?

(b) Bagaimana suku-suku awal harus dipilih agar $a_9 = 30$?

(c) Untuk nilai x apa saja kita dapat memilih suku-suku awal sehingga $a_9 = x$?

9. Perhatikan relasi rekurensi $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$.

(a) Temukan penyelesaian umum relasi rekurensi tersebut (ingatlah adanya akar berulang).

(b) Temukan penyelesaiannya ketika $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$.

(c) Temukan penyelesaiannya ketika $a_0 = 1$ dan $a_1 = 8$.

10. Berikut adalah penggunaan barisan yang mengejutkan untuk menjawab persoalan pencacahan: Berapa banyak pelat nomor yang terdiri dari 6 simbol, dengan hanya menggunakan tiga angka 1, 2, dan 3 serta empat huruf a, b, c, dan d, sedemikian sehingga tidak ada angka yang muncul setelah huruf apa pun? Sebagai contoh, "31ddac", "123321", dan "abbabb" masing-masing merupakan pelat nomor yang memenuhi syarat, sedangkan "13ba2c" tidak.

(a) Pertama, jawablah pertanyaan ini dengan mempertimbangkan berbagai kasus: berapa banyak pelat nomor yang tidak memuat angka? Berapa banyak yang memuat satu angka, dan seterusnya?

(b) Selanjutnya, gunakan teknik-teknik pada bagian ini untuk menunjukkan mengapa jawabannya adalah $4^7 - 3^7$.

4.5 Pembuktian dengan Induksi

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda akan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Mengidentifikasi bagian-bagian pembuktian dengan induksi matematika dan hubungan bagian-bagian tersebut dengan pernyataan yang dibuktikan.
2. Membuktikan pernyataan dengan induksi matematika.
3. Menjelaskan mengapa pembuktian dengan induksi matematika sahih.

4.5.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Apa digit satuan (digit paling kanan) dari 6^n? Apakah jawabannya bergantung pada n?

Induksi matematika adalah teknik pembuktian yang ampuh untuk membuktikan kebenaran suatu *barisan* pernyataan, asalkan barisan pernyataan tersebut memiliki titik awal. Sebagai contoh, jika kita ingin menyatakan sesuatu tentang digit satuan 6^n, kita mengajukan klaim itu untuk $n = 1$, lalu $n = 2$, kemudian $n = 3$, dan seterusnya.

Induksi berkaitan erat dengan definisi rekursif; gagasan utama pembuktian dengan induksi adalah menjelaskan cara beralih dari satu pernyataan dalam barisan ke pernyataan berikutnya.

Kegiatan Pratinjau

1. Misalkan digit satuan 6^{472} adalah 2. Artinya, misalkan $6^{472} = 19,381,6\ldots\ldots2$. Berapakah digit satuan 6^{473}?

Petunjuk. $6^{473} = 6 \cdot 6^{472}$.

2. Berapakah digit satuan 6^2, 6^3, dan 6^4?

3. Manakah di antara pernyataan berikut yang benar? Pilih semua yang berlaku.

A. Jika digit satuan 6^k adalah 6, maka digit satuan 6^{k+1} adalah 6.

B. Jika digit satuan 6^k adalah 2, maka digit satuan 6^{k+1} adalah 2.

C. Digit satuan 6^{472} adalah 2.

D. Digit satuan 6^{472} adalah 6.

4. Jelaskan jawaban Anda atas pertanyaan sebelumnya.

4.5.2 Penalaran Rekursif

Kita telah melihat bahwa mendeskripsikan barisan secara rekursif sering kali lebih mudah daripada mendeskripsikannya dengan rumus tertutup. Sekarang kita akan melihat bagaimana penalaran rekursif serupa dapat membantu kita membuktikan pernyataan dengan teknik yang disebut **induksi matematika**. Gaya pembuktian ini sangat berguna ketika berbagai kasus pernyataan tersebut (misalnya, untuk nilai n yang berbeda) saling berhubungan secara rekursif.

Sebagai contoh, misalkan kita ingin membuktikan suatu fakta tentang semua suku dalam barisan yang didefinisikan secara rekursif. Perhatikan barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ yang didefinisikan oleh $a_n = 3a_{n-1} - 2$ dengan $a_0 = 5$. Dapatkah kita membuktikan bahwa setiap suku barisan ini ganjil?

Mari kita mulai dengan menuliskan beberapa suku pertama barisan tersebut:

$$5, 13, 37, 109, \ldots.$$

Sejauh ini, semua bilangan tersebut tampak ganjil. Apakah bilangan berikutnya juga ganjil? Tentu saja, kita dapat langsung menghitungnya dengan relasi rekurensi, yaitu $3 \cdot 109 - 2$. Kita sebenarnya tidak peduli *bilangan ganjil mana* yang dihasilkan; yang penting bilangan itu memang ganjil. Kita tahu hasilnya ganjil karena hasil kali dua bilangan ganjil adalah ganjil, dan mengurangkan 2 dari bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil.

Bagus, jadi a_4 ganjil. Apakah a_5 juga ganjil? Ya, gunakan argumen yang sama: $a_5 = 3a_4 - 2$. Kita baru saja meyakinkan diri bahwa a_4 ganjil (tanpa mencari nilai sebenarnya), sehingga $3a_4$ ganjil, dan bilangan yang 2 lebih kecil darinya juga ganjil.

Bagaimana dengan a_6? Lakukan hal yang sama. Sebenarnya, mengapa kita menggunakan bilangan tertentu sebagai indeks? Jika argumennya selalu sama, kita semestinya dapat menyatakannya sekali saja dan mengatakan bahwa argumen itu selalu berlaku.

Misalkan kita telah mengetahui bahwa a_k ganjil (dengan k suatu bilangan asli sembarang). Dari sini kita dapat menyimpulkan bahwa a_{k+1} ganjil, sebab $a_{k+1} = 3a_k - 2$; hasil kali 3 dengan bilangan ganjil a_k adalah ganjil, dan setelah dikurangi 2 hasilnya tetap ganjil. Bagus. Mari kita rangkai semuanya menjadi sebuah pembuktian.

Bukti. Kita mengklaim bahwa untuk setiap $n \geq 0$, bilangan a_n ganjil, dengan $a_n = 3a_{n-1} - 2$ dan $a_0 = 5$.

Ketika $n = 0$, klaim tersebut benar karena $a_0 = 5$ adalah bilangan ganjil.

Selanjutnya, kita dapat membuktikan bahwa a_n ganjil untuk setiap n yang lebih besar karena jika a_k ganjil, maka a_{k+1} juga ganjil (sebab $a_{k+1} = 3a_k - 2$, dan tiga kali bilangan ganjil dikurangi 2 selalu ganjil).

Oleh karena itu, a_n ganjil untuk semua $n \geq 0$.

Sebentar lagi kita akan memberikan struktur yang lebih ketat untuk pembuktian dengan induksi, tetapi gagasan dasarnya persis seperti di atas.

4.5.3 Memformalkan Pembuktian

Induksi dapat membuktikan banyak pernyataan yang berlaku untuk semua bilangan asli, bukan hanya pernyataan tentang barisan. Secara khusus, induksi sebaiknya digunakan ketika ada cara untuk beralih dari satu kasus ke kasus berikutnya – ketika Anda dapat melihat cara untuk selalu "melakukan satu langkah lagi."

Dengan mengingat cara kita menulis pernyataan dalam simbol logika, kita akan menggunakan induksi untuk membuktikan pernyataan berbentuk

$$\forall n P(n),$$

dengan semesta pembicaraan (nilai-nilai n yang dikuantifikasi) memiliki suatu unsur terkecil. Misalkan semesta pembicaraan tersebut adalah bilangan asli. Dengan demikian, kita membuktikan *barisan* pernyataan berikut:

$$P(0), P(1), P(2), P(3), \ldots.$$

Dengan induksi, kita melakukannya dengan membuktikan suatu **kasus dasar**, yaitu bahwa $P(0)$ benar (atau $P(a)$, dengan a unsur terkecil semesta pembicaraan kita). Selanjutnya, kita membuktikan **langkah induksi**, yaitu bahwa $P(k) \to P(k+1)$ untuk semua $k \geq 0$ (atau $k \geq a$).

Bersama-sama, kedua bagian ini cukup untuk membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua n. Bagaimana kita mengetahuinya? Dengan kata lain, mengapa gaya pembuktian ini sahih? Mari kita yakinkan diri bahwa $P(3)$ benar. Kita tahu $P(0)$ benar. Karena kita mengetahui $P(0) \to P(1)$, kita juga mengetahui bahwa $P(1)$ benar. Karena $P(1) \to P(2)$, kita memperoleh bahwa $P(2)$ benar. Terakhir, karena $P(2) \to P(3)$, kita mengetahui bahwa $P(3)$ benar. Tidak ada yang istimewa dari 3. Kita dapat melanjutkan sejauh yang kita inginkan, ***hingga nilai n berapa pun!***

Bayangkan sederet domino yang didirikan pada sisinya. Kita ingin menyatakan bahwa satu menit kemudian, semua domino akan roboh. Agar hal ini terjadi, Anda perlu mendorong domino pertama. Itulah kasus dasar. Selain itu, domino-domino tersebut harus cukup berdekatan sehingga ketika satu domino roboh, domino itu menyebabkan domino berikutnya roboh. Itulah langkah induksi. Jika kedua syarat ini terpenuhi – Anda merobohkan domino pertama, dan setiap domino menyebabkan domino berikutnya roboh – maka semua domino akan roboh.

Induksi sangat ampuh! Bayangkan betapa lebih mudahnya merobohkan domino ketika Anda tidak perlu mendorong setiap domino sendiri. Anda cukup memulai reaksi berantai, lalu mengandalkan kedekatan antar-domino untuk menyelesaikan sisanya.

Ketika menulis pembuktian dengan induksi, kita akan mengikuti gaya baku. Menulis dengan gaya ini membantu kita menata gagasan dan bahkan dapat membantu kita merumuskan pembuktian.

Berikut struktur umum pembuktian dengan induksi matematika:

Struktur Pembuktian dengan Induksi.

Mulailah dengan menyatakan pernyataan yang ingin Anda buktikan: "Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan. . . ." Untuk membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$, Anda harus membuktikan dua fakta:

1. Kasus dasar: Buktikan bahwa $P(0)$ benar. Lakukan ini secara langsung. Bagian ini sering kali mudah.

2. Langkah induksi: Buktikan bahwa $P(k) \rightarrow P(k+1)$ untuk semua $k \geq 0$. Artinya, buktikan bahwa untuk setiap $k \geq 0$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar. Ini adalah pembuktian pernyataan jika . . . maka . . . , sehingga Anda boleh mengasumsikan bahwa $P(k)$ benar ($P(k)$ disebut *hipotesis induksi*). Selanjutnya Anda harus menjelaskan mengapa $P(k+1)$ juga benar berdasarkan asumsi tersebut.

Jika Anda berhasil membuktikan kedua bagian di atas, Anda dapat menyimpulkan, "Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, pernyataan $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$."

Terkadang pernyataan $P(n)$ hanya benar untuk nilai $n \geq 4$, misalnya, atau mulai dari nilai lain. Dalam kasus tersebut, gantilah semua 0 di atas dengan 4 (atau nilai lain itu).

Sebelum mencoba membuktikan suatu pernyataan dengan induksi matematika, pikirkan terlebih dahulu *mengapa* pernyataan itu benar menggunakan penalaran induktif. Jelaskan mengapa induksi merupakan metode yang tepat, dan secara garis besar mengapa langkah induksi akan berhasil. Setelah itu, tulislah pembuktian formal dengan cermat menggunakan struktur di atas.

4.5.4 Contoh

Berikut beberapa contoh pembuktian dengan induksi matematika.

Contoh 4.5.1

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq 1$, berlaku $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Penyelesaian. Pertama, mari kita pikirkan persamaan ini secara induktif. Sebenarnya, kita tahu persamaan ini benar karena alasan lain (misalnya dengan membalik urutan lalu menjumlahkannya). Namun, mengapa induksi dapat diterapkan? Ruas kiri menjumlahkan bilangan dari 1 sampai n. Jika kita sudah mengetahui jumlah itu, menambahkan satu suku lagi $(n+1)$ tidaklah sulit. Sebagai contoh, jika $n = 100$, misalkan kita tahu bahwa jumlah 100 bilangan pertama adalah 5050 (jadi $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$, yang memang benar). Untuk mencari jumlah 101 bilangan pertama, lebih masuk akal jika

kita cukup menambahkan 101 pada 5050 daripada menghitung ulang seluruh jumlah tersebut. Kita memperoleh $1+2+3+\cdots+100+101 = 5050+101 = 5151$. Sebenarnya, menambahkan satu suku lagi akan selalu mudah. Inilah alasan kita sebaiknya menggunakan induksi.

Sekarang, pembuktian formalnya:

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Kita akan menunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli $n \geq 1$.

Kasus dasar: $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, yang jelas benar.

Langkah induksi: Misalkan $k \geq 1$ suatu bilangan asli. Asumsikan (untuk induksi) bahwa $P(k)$ benar. Artinya, $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Kita akan membuktikan bahwa $P(k + 1)$ juga benar. Dengan kata lain, kita harus membuktikan $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Untuk membuktikan persamaan ini, mulailah dengan menambahkan $k + 1$ pada kedua ruas hipotesis induksi:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1).$$

Dengan menyederhanakan ruas kanan, kita memperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 &= \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{2(k + 1)}{2} \\ &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} \\ &= \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $P(k + 1)$ benar, sehingga berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli $n \geq 1$. ■

Perhatikan bahwa pada bagian pembuktian ketika kita membuktikan $P(k+1)$ dari $P(k)$, kita menggunakan persamaan dalam $P(k)$. Persamaan itu adalah hipotesis induksi. Cara menggunakan hipotesis induksi biasanya mudah terlihat ketika membuktikan fakta tentang penjumlahan seperti ini. Dalam pembuktian lain, tempat penggunaannya mungkin tidak begitu jelas.

Contoh 4.5.2

Buktikan bahwa untuk semua $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ merupakan kelipatan 5.

Penyelesaian. Sekali lagi, mulailah dengan memahami dinamika masalahnya. Apa akibat dari menaikkan n? Mari kita coba beberapa contoh. Jika $n = 1$, maka benar bahwa $6^1 - 1 = 5$ merupakan kelipatan 5. Apa yang terjadi ketika n dinaikkan menjadi 2? Kita memperoleh $6^2 - 1 = 35$, yang

juga merupakan kelipatan 5. Berikutnya, $n = 3$. Namun, alih-alih sekadar mencari $6^3 - 1$, mari kita tanyakan apa akibat kenaikan n tersebut. Kita tetap akan mengurangkan 1, tetapi terlebih dahulu kita mengalikan dengan satu faktor 6 lagi. Dilihat dengan cara lain, kita mengalikan bilangan yang satu lebih besar daripada suatu kelipatan 5 dengan 6 (karena $6^2 - 1$ merupakan kelipatan 5, maka 6^2 satu lebih besar daripada suatu kelipatan 5). Seperti apakah bilangan yang satu lebih besar daripada kelipatan 5? Digit terakhirnya pasti 1 atau 6. Apa yang terjadi jika bilangan semacam itu dikalikan dengan 6? Hasilnya bergantung pada bilangannya, tetapi bagaimanapun juga, digit terakhir bilangan baru itu pasti 6. Jika kemudian kita mengurangkan 1, digit terakhirnya menjadi 5, sehingga hasilnya merupakan kelipatan 5.

Intinya, setiap kali kita mengalikan dengan satu faktor 6 lagi, kita tetap memperoleh bilangan berdigit terakhir 6, sehingga mengurangkan 1 menghasilkan kelipatan 5. Sekarang, pembuktian formalnya:

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "$6^n - 1$ merupakan kelipatan 5." Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Kasus dasar: $P(0)$ benar: $6^0 - 1 = 0$, yang merupakan kelipatan 5.

Langkah induksi: Misalkan k suatu bilangan asli sembarang. Asumsikan, untuk induksi, bahwa $P(k)$ benar. Artinya, $6^k - 1$ merupakan kelipatan 5. Dengan demikian, $6^k - 1 = 5j$ untuk suatu bilangan bulat j. Ini berarti $6^k = 5j + 1$. Kalikan kedua ruas dengan 6:

$$6^{k+1} = 6(5j + 1) = 30j + 6.$$

Namun, kita ingin mengetahui $6^{k+1} - 1$, jadi kurangkan 1 dari kedua ruas:

$$6^{k+1} - 1 = 30j + 5.$$

Tentu saja $30j + 5 = 5(6j + 1)$, sehingga bilangan ini merupakan kelipatan 5.

Oleh karena itu, $6^{k+1} - 1$ merupakan kelipatan 5, atau dengan kata lain, $P(k + 1)$ benar. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

Kita perlu sedikit cerdik (yakni menggunakan aljabar) untuk menemukan $6^k - 1$ di dalam $6^{k+1} - 1$ sebelum dapat menerapkan hipotesis induksi. Hal inilah yang dapat membuat pembuktian dengan induksi terasa menantang.

Dalam dua contoh di atas, kita mulai dari $n = 1$ atau $n = 0$. Jika perlu, kita dapat mulai dari nilai yang lebih besar.

Contoh 4.5.3

Buktikan bahwa $n^2 < 2^n$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 5$.

Penyelesaian. Pertama, perhatikan gagasan argumennya. Apa yang terjadi ketika kita menaikkan n sebesar 1? Pada ruas kiri, kita menaikkan bilangan yang dikuadratkan dan beralih ke bilangan kuadrat berikutnya. Pada ruas kanan, kita menaikkan pangkat 2. Artinya, kita menggandakan bilangan tersebut. Jadi pertanyaannya adalah, bagaimana hubungan menggandakan suatu bilangan dengan beralih ke bilangan kuadrat berikutnya? Perhatikan selisih dua bilangan kuadrat berurutan. Kita memiliki $(n+1)^2 - n^2$. Bentuk ini dapat difaktorkan:

$$(n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1.$$

Sementara itu, menggandakan ruas kanan menambah nilainya sebesar 2^n, sebab $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Ketika n cukup besar, $2^n > 2n+1$.

Yang kita nyatakan di sini adalah bahwa setiap kali n bertambah, pertambahan ruas kiri lebih kecil daripada pertambahan ruas kanan. Jadi, jika ruas kiri bermula lebih kecil (seperti ketika $n = 5$), nilainya tidak akan pernah menyusul. Sekarang, pembuktian formalnya:

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $n^2 < 2^n$. Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq 5$.

Kasus dasar: $P(5)$ adalah pernyataan $5^2 < 2^5$. Karena $5^2 = 25$ dan $2^5 = 32$, kita melihat bahwa $P(5)$ memang benar.

Langkah induksi: Misalkan $k \geq 5$ suatu bilangan bulat sembarang. Asumsikan, untuk induksi, bahwa $P(k)$ benar. Artinya, asumsikan $k^2 < 2^k$. Kita akan membuktikan bahwa $P(k+1)$ benar, yakni $(k+1)^2 < 2^{k+1}$. Untuk membuktikan pertidaksamaan semacam ini, mulailah dari ruas kiri dan bergerak menuju ruas kanan:

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&< 2^k + 2k + 1 && \ldots \text{berdasarkan hipotesis induksi.} \\
&< 2^k + 2^k && \ldots \text{ karena } 2k+1 < 2^k \text{ untuk } k \geq 5. \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Dengan mengikuti rangkaian persamaan dan pertidaksamaan tersebut, kita memperoleh $(k+1)^2 < 2^{k+1}$, atau dengan kata lain, $P(k+1)$ benar. Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 5$. ■

Contoh sebelumnya mungkin mengingatkan Anda pada *prinsip lintasan pacu* dari kalkulus, yang menyatakan bahwa jika $f(a) < g(a)$, dan $f'(x) < g'(x)$ untuk $x > a$, maka $f(x) < g(x)$ untuk $x > a$. Gagasannya sama: fungsi yang lebih besar bertambah lebih cepat daripada fungsi yang lebih kecil, sehingga fungsi yang lebih

besar akan tetap lebih besar. Dalam matematika diskret, kita tidak menggunakan turunan, jadi kita memperhatikan selisih. Oleh sebab itu, induksi merupakan metode yang tepat.

Sebuah Peringatan. Kekuatan besar membawa tanggung jawab besar. Induksi bukanlah sihir. Kemampuan untuk mengasumsikan bahwa $P(k)$ benar tampak sangat ampuh. Lagi pula, kita sedang berusaha membuktikan bahwa $P(n)$ benar, dan satu-satunya perbedaan terletak pada variabelnya: k dibandingkan dengan n. Apakah kita mengasumsikan bahwa hal yang ingin kita buktikan sudah benar? Tidak demikian. Kita mengasumsikan $P(k)$ benar hanya untuk membuktikan bahwa $P(k+1)$ benar.

Meskipun demikian, Anda mungkin mulai percaya bahwa apa pun dapat dibuktikan dengan induksi. Perhatikan "pembuktian" keliru berikut bahwa setiap orang Kanada memiliki warna mata yang sama: Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa sembarang n orang Kanada memiliki warna mata yang sama. $P(1)$ benar, karena setiap orang memiliki warna mata yang sama dengan dirinya sendiri. Sekarang asumsikan $P(k)$ benar. Artinya, asumsikan bahwa dalam sembarang kelompok beranggotakan k orang Kanada, setiap orang memiliki warna mata yang sama. Sekarang perhatikan sembarang kelompok beranggotakan $k+1$ orang Kanada. k orang pertama dalam kelompok itu pasti memiliki warna mata yang sama, karena $P(k)$ benar. Selain itu, k orang terakhir juga pasti memiliki warna mata yang sama, karena $P(k)$ benar. Jadi, semua orang dalam kelompok itu pasti memiliki warna mata yang sama. Dengan demikian, $P(k+1)$ benar. Maka, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua n.

Jelas ada sesuatu yang keliru. Masalahnya adalah pembuktian bahwa $P(k)$ mengimplikasikan $P(k+1)$ mengasumsikan $k \geq 2$. Kita baru menunjukkan bahwa $P(1)$ benar. Padahal, $P(2)$ salah. Cobalah membaca kembali paragraf sebelumnya dengan mengganti setiap k dengan 1. Dapatkah Anda menemukan kekeliruan dalam argumen tersebut?

4.5.5 Pertanyaan Bacaan

1. Misalkan Anda ingin membuktikan dengan induksi matematika bahwa $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ untuk semua nilai $n \geq 1$. Manakah di antara pilihan berikut yang dapat menjadi *baris pertama* pembuktian? Pilih semua yang berlaku.

A. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$."

B. Untuk setiap $n \geq 1$, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2."

C. Asumsikan $1+3+\cdots+2n-1=n^2$ untuk semua $n \geq 1$.

D. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "$1+3+\cdots+2n-1=n^2$ untuk semua $n \geq 1$."

E. Karena $P(1)=1=1^2$, kasus dasarnya benar.

2. Misalkan Anda ingin membuktikan bahwa $P(n,3) \geq \binom{n}{3}$ untuk semua $n \geq 4$. Tuliskan baris pertama pembuktian dengan induksi.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang mungkin membuat Anda atau teman sekelas penasaran setelah membacanya.

4.5.6 Soal Latihan

1. Misalkan Anda sedang mencoba membuktikan dengan induksi matematika bahwa pernyataan $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$. Apa yang perlu Anda buktikan pada *langkah induksi*? (Pilih semua yang berlaku.)

A. Bahwa dengan mengasumsikan $P(k)$ benar untuk suatu $k \geq 0$ sembarang, kita dapat membuktikan bahwa $P(k+1)$ benar.

B. Bahwa $P(k)$ mengimplikasikan $P(k+1)$ untuk semua $k \geq 0$.

C. Bahwa dengan mengasumsikan $P(k+1)$ benar untuk suatu $k \geq 0$ sembarang, kita dapat membuktikan bahwa $P(k)$ benar.

D. Bahwa $P(k+1)$ mengimplikasikan $P(k)$ untuk semua $k \geq 0$.

E. Bahwa $P(k)$ mengimplikasikan $P(k+1)$ untuk setidaknya satu $k \geq 0$.

2. Misalkan Anda ingin membuktikan pernyataan berikut:

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1) \text{ untuk semua } n \geq 1.$$

Apa baris pertama pembuktian dengan induksi yang tepat?

A. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$."

B. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$2+4+6+\cdots+2n=n(n-1)$ untuk semua $n \geq 1$."

C. Asumsikan $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.

D. Misalkan $P(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$.

E. Misalkan $P(n) = n(n + 1)$ untuk semua $n \geq 1$.

3. Misalkan Anda sedang membuktikan pernyataan berikut dengan induksi matematika:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1) \text{ untuk semua } n \geq 1.$$

Apa yang perlu Anda tunjukkan untuk membuktikan kasus dasar?

A. Tunjukkan bahwa $P(1)$ benar. Artinya, tunjukkan bahwa $2 = 1(1 + 1)$.

B. Tunjukkan bahwa $P(2)$ benar. Artinya, tunjukkan bahwa $2 + 4 = 2(2 + 1)$.

C. Tunjukkan bahwa $P(1)$ dan $P(2)$ keduanya benar.

D. Tunjukkan bahwa $P(1)$ mengimplikasikan $P(2)$.

E. Tidak perlu menunjukkan apa pun karena penjumlahan tersebut sudah memiliki lebih dari $n = 1$ suku.

4. Misalkan Anda sedang membuktikan pernyataan berikut dengan induksi matematika:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1) \text{ untuk semua } n \geq 1.$$

Apa baris pertama langkah induksi yang tepat?

A. Asumsikan $P(k)$ benar untuk suatu $k \geq 1$ sembarang; artinya, asumsikan $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$.

B. Asumsikan $P(k)$ benar untuk semua $k \geq 1$; artinya, asumsikan $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$.

C. Asumsikan $P(k)$ mengimplikasikan $P(k+1)$ untuk suatu $k \geq 1$ sembarang.

D. Asumsikan $P(k)$ benar untuk suatu $k \geq 1$ yang besar; misalnya, asumsikan $2 + 4 + 6 + \cdots + 432 = 216(217)$.

5. Susun beberapa pernyataan di bawah ini untuk membentuk pembuktian dengan induksi yang benar bahwa relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} + 4$ dengan syarat awal $a_0 = 0$ memiliki rumus tertutup $a_n = 5^n - 1$.

- Bentuk ini menyederhana menjadi $a_{k+1} = 5^{k+1} - 5 + 4 = 5^{k+1} - 1$, sehingga $P(k + 1)$ benar.
- Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(k + 1)$ benar untuk suatu bilangan bulat

sembarang $k \geq 0$.

- Dengan demikian, $a_{k+1} = 5a_k + 4$, sehingga $P(k+1)$ benar.
- Dengan demikian, $a_k = 5^k - 1$.
- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$a_n = 5^n - 1$".
- Berdasarkan relasi rekurensi, kita memiliki $a_{k+1} = 5a_k + 4 = 5(5^k - 1) + 4$.
- Perhatikan bahwa $a_0 = 5^0 - 1 = 0$, sehingga $P(0)$ benar.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu bilangan bulat sembarang $k \geq 0$.

6. Susun beberapa pernyataan di bawah ini untuk membentuk pembuktian dengan induksi yang benar bahwa untuk semua $n \geq 1$, bilangan $14^n - 1$ merupakan kelipatan 13.

- Dengan demikian, $14^k - 1 = 13 \cdot j$ untuk suatu bilangan bulat j.
- Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.
- Perhatikan bahwa $14^2 - 1 = (14-1)(14+1)$ berdasarkan selisih kuadrat, sehingga bilangan ini merupakan kelipatan 13.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.
- Jadi, $14^k = \frac{14^{k+1}-1}{14}$, yang juga pasti merupakan kelipatan 13.
- Karena $14^{k+1} - 1 = 14(14^k - 1) + 14 - 1 = 14(13 \cdot j) + 13$, kita melihat bahwa $14^{k+1} - 1$ merupakan kelipatan 13.
- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "$14^n - 1$ merupakan kelipatan 13."
- Jadi, $P(k+1)$ benar.
- Perhatikan bahwa $14^1 - 1 = 13$, sehingga bilangan ini jelas merupakan kelipatan 13.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu bilangan bulat sembarang $k \geq 1$.

7. Susun beberapa pernyataan di bawah ini untuk membentuk pembuktian dengan induksi yang benar bahwa untuk semua $n \geq 1$, berlaku $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$, dengan F_n bilangan Fibonacci ke-n.

- Berdasarkan definisi bilangan Fibonacci, $F_{k+1} + F_{k+2} = F_{k+3}$, sehingga ruas kanan menyederhana menjadi $F_{k+3} - 1$.
- Kemudian, berdasarkan hipotesis induksi, $1+1+2+3+\cdots+F_{k+1} = F_{k+2}-1$.

- Artinya, asumsikan $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$.
- Untuk kasus dasar, perhatikan bahwa $1 + 1 + 2 = 4 = F_5 - 1$.
- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$."
- Jadi, $P(k + 1)$ benar, dan oleh karena itu berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.
- Dengan menambahkan F_{k+1} pada kedua ruas, kita memperoleh $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + F_k + F_{k+1} = F_{k+1} + F_{k+2} - 1$.
- Untuk kasus dasar, perhatikan bahwa $P(1)$ dan $P(2)$ benar karena $1 = 2-1$ dan $1 + 1 = 3 - 1$.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu bilangan bulat sembarang $k \geq 2$.
- Mengurangkan F_{k+1} dari kedua ruas menghasilkan $P(k)$, yang juga telah kita asumsikan benar.

4.5.7 Latihan Tambahan

1. Dalam perjalanan ke pasar, Anda menukar sapi Anda dengan sejumlah biji espreso cokelat hitam ajaib. Biji-biji ini memiliki sifat bahwa setiap malam tepat tengah malam, setiap biji membelah menjadi dua sehingga jumlah koleksi Anda berlipat ganda. Anda memutuskan untuk memanfaatkan hal ini, dan setiap pagi (sekitar pukul 08.00) Anda memakan 5 biji.

(a) Jelaskan mengapa benar bahwa *jika* pada tengah hari di hari ke-n jumlah biji Anda berakhiran 5, maka pada tengah hari di hari ke-$n + 1$ jumlah biji Anda juga akan berakhiran 5.

(b) Mengapa fakta sebelumnya belum cukup untuk menyimpulkan bahwa jumlah biji Anda akan selalu berakhiran 5? Fakta tambahan apa yang Anda perlukan?

(c) Dengan mengasumsikan bahwa Anda memiliki fakta tambahan pada bagian (b) dan telah berhasil membuktikan fakta pada bagian (a), bagaimana Anda mengetahui bahwa jumlah biji Anda akan selalu berakhiran 5? Gambarkan apa yang terjadi dengan menjelaskan secara cermat bagaimana kedua fakta di atas membuktikan bahwa jumlah biji Anda akan berakhiran 5, khususnya pada *hari ke-4*. Dengan kata lain, jelaskan mengapa induksi berlaku dalam konteks ini.

2. Gunakan induksi untuk membuktikan bahwa untuk semua $n \in \mathbb{N}$, berlaku $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

3. Buktikan bahwa $7^n - 1$ merupakan kelipatan 6 untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

4. Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ untuk semua $n \geq 1$.

5. Buktikan bahwa $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$, dengan F_n bilangan Fibonacci ke-n.

6. Buktikan bahwa $2^n < n!$ untuk semua $n \geq 4$. (Ingat, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.)

7. Buktikan, dengan induksi matematika, bahwa $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$, dengan F_n bilangan Fibonacci ke-n ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$ dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$).

8. Zombi Euler dan Zombi Cauchy, dua matematikawan zombi terkenal, baru saja mendaftar akun Myspace. Setelah satu hari, Zombi Cauchy memiliki lebih banyak pengikut daripada Zombi Euler. Setiap hari setelah itu, jumlah pengikut baru Zombi Cauchy persis sama dengan jumlah pengikut baru Zombi Euler (dan keduanya tidak kehilangan pengikut). Jelaskan bagaimana pembuktian dengan induksi matematika dapat menunjukkan bahwa pada setiap hari setelah hari pertama, Zombi Cauchy akan memiliki lebih banyak pengikut daripada Zombi Euler. Artinya, jelaskan kasus dasar dan langkah induksinya, serta mengapa keduanya membuktikan bahwa Zombi Cauchy akan memiliki lebih banyak pengikut pada hari keempat.

9. Tentukan jumlah poin terbesar yang tidak mungkin diperoleh secara tepat oleh sebuah tim sepak bola Amerika hanya dengan gol lapangan bernilai 3 poin dan touchdown bernilai 7 poin (abaikan kemungkinan safety, kegagalan poin tambahan, dan konversi dua poin). Buktikan dengan induksi matematika bahwa jawaban Anda benar.

10. Buktikan bahwa jumlah kuadrat dari n bilangan asli pertama diberikan oleh rumus berikut

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

11. Buktikan bahwa jumlah sudut dalam segi-n cembung adalah $(n - 2) \cdot 180°$. (Segi-n cembung adalah poligon bersisi n yang setiap sudut dalamnya kurang dari 180°.)

12. Apa yang salah dengan "pembuktian" berikut atas "fakta" bahwa $n + 3 = n + 7$ untuk semua nilai n (selain, tentu saja, bahwa pernyataan yang hendak dibuktikannya memang salah)?

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $n + 3 = n + 7$. Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Untuk langkah induksi, asumsikan bahwa $P(k)$ benar. Artinya, $k + 3 = k + 7$. Kita harus menunjukkan bahwa $P(k + 1)$ benar. Karena $k + 3 = k + 7$, tambahkan 1 pada kedua ruas. Ini menghasilkan $k + 3 + 1 = k + 7 + 1$. Dengan mengelompokkan kembali, diperoleh $(k + 1) + 3 = (k + 1) + 7$. Namun, ini tepat merupakan $P(k + 1)$. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

13. Pembuktian pada soal sebelumnya tidak berhasil. Namun, jika kita mengubah "fakta" tersebut, kita dapat memperoleh pembuktian yang benar. Buktikan

bahwa $n + 3 < n + 7$ untuk semua nilai $n \in \mathbb{N}$. Anda dapat membuktikannya secara aljabar (tanpa induksi), tetapi tujuan latihan ini adalah menuliskan pembuktian induksi yang sah.

14. Temukan kekeliruan dalam "pembuktian" berikut atas "fakta" bahwa $n < 100$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $n < 100$. Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Pertama, kita membuktikan kasus dasar: ketika $n = 0$, $P(n)$ benar karena $0 < 100$. Sekarang, untuk langkah induksi, asumsikan bahwa $P(k)$ benar. Artinya, $k < 100$. Jika $k < 100$, maka k adalah suatu bilangan, misalnya 80. Tentu saja, $80+1 = 81$, yang masih kurang dari 100. Jadi, $k + 1 < 100$ juga berlaku. Namun, inilah yang dinyatakan oleh $P(k + 1)$, sehingga kita telah menunjukkan bahwa $P(k) \rightarrow P(k + 1)$. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

15. Meskipun pembuktian di atas tidak berhasil (memang tidak mungkin berhasil karena pernyataan yang hendak dibuktikannya salah!), kita dapat membuktikan sesuatu yang serupa. Buktikan bahwa terdapat barisan bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yang naik tegas (bilangan-bilangan itu tidak harus bulat) sedemikian sehingga $a_n < 100$ untuk semua $n \geq 1$. (Yang dimaksud dengan **naik tegas** adalah $a_n < a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$. Jadi, setiap suku harus lebih besar daripada suku sebelumnya.)

16. Apa yang salah dengan "pembuktian" berikut atas "fakta" bahwa untuk semua $n \in \mathbb{N}$, bilangan $n^2 + n$ adalah ganjil?

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$n^2 + n$ adalah ganjil." Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Untuk langkah induksi, andaikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu bahwa $k^2 + k$ adalah ganjil. Sekarang perhatikan pernyataan $P(k+1)$. Kita mempunyai $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + k + 2k + 2$. Berdasarkan hipotesis induksi, $k^2 + k$ adalah ganjil, dan tentu saja $2k + 2$ adalah genap. Bilangan ganjil ditambah bilangan genap selalu ganjil, sehingga $(k + 1)^2 + (k + 1)$ adalah ganjil. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

17. Sekarang berikan pembuktian yang sah (dengan induksi, meskipun Anda mungkin dapat membuktikannya tanpa induksi) untuk pernyataan "Untuk semua $n \in \mathbb{N}$, bilangan $n^2 + n$ adalah genap."

18. Buktikan bahwa terdapat barisan bilangan real positif $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sedemikian sehingga jumlah parsial $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ kurang dari 2 untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Petunjuk: Pikirkan bagaimana Anda dapat mendefinisikan a_{k+1} agar argumen induksi berhasil.

19. Gunakan induksi untuk membuktikan bahwa jika n orang semuanya berjabat tangan satu sama lain, jumlah seluruh jabat tangan adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

20. Gunakan induksi untuk membuktikan bahwa $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Dengan kata lain,

jumlah pada baris ke-n segitiga Pascal adalah 2^n.

21. Gunakan induksi untuk membuktikan $\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{4+n}{n} = \binom{5+n}{n}$. (Ini merupakan salah satu contoh teorema tongkat hoki.)

22. Gunakan aturan hasil kali logaritma ($\log(ab) = \log(a) + \log(b)$) untuk membuktikan, dengan induksi pada n, bahwa $\log(a^n) = n\log(a)$, untuk setiap bilangan real positif a dan setiap bilangan asli $n \geq 2$.

23. Misalkan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ adalah fungsi-fungsi terdiferensialkan. Buktikan, dengan menggunakan induksi, bahwa

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'.$$

Anda boleh mengasumsikan $(f + g)' = f' + g'$ untuk sembarang fungsi terdiferensialkan f dan g.

24. Misalkan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ adalah fungsi-fungsi terdiferensialkan. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan aturan hasil kali umum:

$$(f_1 f_2 f_3 \cdots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + f_1 f_2 f_3' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 f_3 \cdots f_n'.$$

Anda boleh mengasumsikan bahwa aturan hasil kali untuk dua fungsi berlaku.

25. Dalam Latihan 1.3.8, kita telah membuktikan bahwa berikut ini merupakan aturan deduksi yang sah:

$$\begin{array}{rl} & P \to Q \\ & Q \to R \\ \hline \therefore & P \to R \end{array}$$

Sekarang gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa sebanyak apa pun implikasi semacam ini dapat dirangkai. Dengan kata lain, buktikan untuk setiap $n \geq 3$ bahwa berikut ini merupakan aturan deduksi yang sah:

$$\begin{array}{rl} & P_1 \to P_2 \\ & P_2 \to P_3 \\ & \vdots \\ & P_{n-1} \to P_n \\ \hline \therefore & P_1 \to P_n. \end{array}$$

4.6 Induksi Kuat

Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan bagian ini, Anda diharapkan mampu melakukan hal-hal berikut.

1. Menjelaskan perbedaan antara pembuktian dengan induksi dan pembuktian dengan induksi kuat.
2. Menggunakan induksi kuat untuk membuktikan pernyataan.

4.6.1 Pratinjau Bagian

Selidiki!

Mulailah dengan selembar kertas berbentuk persegi. Anda ingin memotong persegi ini menjadi persegi-persegi yang lebih kecil tanpa menyisakan bagian terbuang (setiap potongan kertas yang dihasilkan harus berbentuk persegi). Jelas bahwa persegi tersebut dapat dipotong menjadi 4 persegi. Anda juga dapat memotongnya menjadi 9 persegi. Ternyata persegi tersebut dapat dipotong menjadi 7 persegi (meskipun ukurannya tidak semuanya sama). Jumlah persegi berapa saja yang mungkin dihasilkan?

Terkadang, untuk membuktikan bahwa $P(k+1)$ benar, akan membantu jika kita mengetahui bahwa $P(k)$ *dan* $P(k-1)$ *dan* $P(k-2)$ semuanya benar. Hal ini tentu terjadi ketika kita membuktikan sesuatu tentang relasi rekurensi yang dinyatakan sebagai kombinasi dua suku sebelumnya.

Contoh 4.6.1

Buktikan bahwa 2^n merupakan solusi bagi relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$.

Penyelesaian.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "$a_n = 2^n$." Kita akan menunjukkan bahwa pernyataan ini benar untuk semua $n \geq 0$.

Kasus dasar: $a_0 = 2^0 = 1$ dan $a_1 = 2^1 = 2$ keduanya sesuai dengan syarat awal.

Langkah induksi: Misalkan $k \geq 1$ sembarang. Asumsikan $P(k)$ dan $P(k-1)$ keduanya benar. Artinya, asumsikan $a_k = 2^k$ dan $a_{k-1} = 2^{k-1}$. Kita

akan menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar. Perhatikan a_{k+1}. Kita memiliki

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5a_k - 6a_{k-1} \\ &= 5 \cdot 2^k - 6 \cdot 2^{k-1} \\ &= 10 \cdot 2^{k-1} - 6 \cdot 2^{k-1} \\ &= 4 \cdot 2^{k-1} \\ &= 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$. ■

Sebenarnya, hampir saja kita menerapkan prinsip induksi matematika. Apakah yang kita lakukan sah?

Ada pula kalanya kita ingin meninjau lebih jauh ke belakang dan menggunakan asumsi bahwa $P(j)$ benar untuk j yang jauh lebih kecil daripada $k+1$. Inilah gagasan di balik **induksi kuat** dan topik bagian singkat ini.

Kegiatan Pratinjau

1. Perhatikan teka-teki berikut:

Anda memiliki sebatang cokelat berbentuk persegi panjang yang tersusun atas n petak cokelat identik. Anda dapat mematahkan batang tersebut sepanjang garis di antara sembarang baris atau kolom. Berapa kali Anda harus mematahkan batang itu agar terurai menjadi n petak cokelat tunggal?

Pada awalnya, pertanyaan ini mungkin tampak mustahil dijawab. Mungkin yang dimaksud adalah jumlah *paling sedikit* pematahan yang diperlukan. Mari kita selidiki.

(a) Misalkan Anda memulai dengan batang berukuran 1×3. Berapa kali Anda perlu mematahkannya agar terurai menjadi petak-petak tunggal?

(b) Jika Anda memiliki batang berukuran 1×4, berapa kali pematahan yang diperlukan?

Jika Anda memiliki 4 petak yang tersusun sebagai persegi 2×2, pematahan pertama akan membagi cokelat menjadi dua batang berukuran 1×2. Kemudian masing-masing batang memerlukan _____ kali pematahan lagi, sehingga diperlukan total _____ kali pematahan untuk menguraikan persegi 2×2 menjadi petak-petak tunggal.

(c) Batang yang terdiri atas 6 petak dapat berukuran 1×6, yang memerlukan _____ kali pematahan, atau berukuran 2×3.

Sekarang ada dua cara untuk melanjutkan.

a. Patahkan batang menjadi dua batang berukuran 1×3. Masing-masing memerlukan _____ kali pematahan lagi, sehingga semuanya memerlukan _____ kali pematahan.

b. Patahkan batang menjadi satu batang berukuran 1×2 dan satu batang berukuran 2×2. Batang 1×2 memerlukan _____ kali pematahan lagi dan batang 2×2 memerlukan _____ kali pematahan lagi, sehingga semuanya memerlukan _____ kali pematahan.

(d) Berdasarkan data di atas, apa dugaan kita mengenai jumlah pematahan yang diperlukan untuk menguraikan batang yang terdiri atas n petak menjadi petak-petak tunggal, jika dinyatakan dalam n?

Diperlukan _____ kali pematahan untuk menguraikan batang yang terdiri atas n petak menjadi petak-petak tunggal.

(e) Apakah kita memercayai dugaan ini? Misalkan satu pematahan membagi batang menjadi dua batang yang lebih kecil, masing-masing terdiri atas a dan b petak. Jika dugaan tersebut benar, berapa kali pematahan lagi yang diperlukan untuk menguraikan batang berukuran a?

Berapa kali pematahan lagi yang diperlukan untuk menguraikan batang berukuran b?

Dengan menyertakan pematahan pertama, berapa jumlah seluruh pematahan tersebut jika dinyatakan dalam a dan b?

Namun, berapakah $a + b$? Kita memperoleh a dan b dengan membagi n petak menjadi dua bagian, sehingga $a + b =$_____. Jadi, jumlah seluruh pematahan adalah _____.

4.6.2 Bagi dan Taklukkan

Bayangkan definisi rekursif sebagai petunjuk untuk membangun tangga. Anda dapat membangun tangga setinggi yang diinginkan karena Anda memiliki petunjuk untuk membuat anak tangga berikutnya, asalkan Anda sedang berdiri di anak tangga sebelumnya.

Induksi adalah teknik pembuktian yang bersesuaian. Untuk membuktikan bahwa Anda dapat menaiki tangga setinggi yang diinginkan, Anda membuktikan bahwa Anda dapat naik ke anak tangga pertama (kasus dasar), lalu membuktikan bahwa dari sembarang anak tangga Anda dapat mencapai anak tangga berikutnya (langkah induksi).

Lebih khusus lagi, misalkan Anda mencoba membuktikan bahwa Anda dapat mencapai anak tangga ke-4. Anda telah berhasil membuktikan bahwa Anda dapat mencapai anak tangga ke-1 dan bahwa dari sembarang anak tangga Anda dapat mencapai anak tangga berikutnya. Jadi, Anda dapat mencapai anak tangga ke-1, lalu dari anak tangga ke-1 mencapai anak tangga ke-2. Dari anak tangga ke-2 Anda dapat mencapai anak tangga ke-3, dan dari anak tangga ke-3 mencapai anak tangga ke-4. Oleh karena itu, Anda dapat mencapai anak tangga ke-4.

Namun, perhatikan bahwa sepanjang proses itu Anda mengetahui bahwa Anda telah melewati anak tangga ke-1 sampai ke-3. Dengan demikian, kita dapat saja mengasumsikan bahwa kita telah melewati semua anak tangga di bawah anak tangga berikutnya yang hendak dicapai. Inilah gagasan di balik **induksi kuat**.

Metafora tangga yang lebih baik untuk induksi kuat adalah membayangkan tangga-tangga sebagai benda yang dapat ditumpuk. Kita ingin menunjukkan bahwa 20 anak tangga dapat dinaiki. Mari kita membaginya menjadi dua tangga yang lebih kecil, misalnya tangga dengan 12 anak tangga dan tangga dengan 8 anak tangga. Kita dapat mengasumsikan bahwa kedua tangga ini dapat dinaiki karena 20 adalah ukuran terkecil yang belum kita yakini dapat dinaiki. Jika kedua tangga itu disatukan, kita memperoleh $12 + 8 = 20$ anak tangga.

Sebaiknya kita turun dari metafora yang goyah ini sebelum terluka. Mari kita lihat definisi formal induksi kuat.

Struktur Pembuktian dengan Induksi Kuat.

Mulailah dengan menyatakan apa yang ingin kita buktikan: "Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan. . . ." Kemudian buktikan dua fakta:

1. Kasus dasar: Buktikan bahwa $P(0)$ benar. (Mungkin Anda juga perlu membuktikan kasus dasar lain yang diperlukan.)
2. Langkah induksi: Asumsikan $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$. Buktikan bahwa $P(k+1)$ benar.

Simpulkan, "Oleh karena itu, berdasarkan induksi kuat, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$."

Tentu saja, jika diperlukan, 0 boleh diganti dengan kasus dasar yang lebih besar.[2]

Untuk menggambarkan induksi kuat, mari kita kembali ke masalah batang cokelat.

Proposisi 4.6.2

Untuk batang cokelat persegi panjang yang terdiri atas n petak, selalu diperlukan $n-1$ kali pematahan untuk menguraikan batang tersebut menjadi petak-petak tunggal.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "Diperlukan $n-1$ kali pematahan untuk menguraikan batang cokelat yang terdiri atas n petak menjadi petak-petak tunggal."

Kasus dasar: Perhatikan $P(2)$. Petak-petak tersebut harus tersusun sebagai

[2]Secara teknis, induksi kuat tidak mengharuskan Anda membuktikan kasus dasar secara terpisah. Hal ini karena ketika membuktikan langkah induksi, Anda harus menunjukkan bahwa $P(0)$ benar dengan mengasumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk semua $k < 0$. Namun, asumsi ini tidak membantu, sehingga Anda tetap harus membuktikan $P(0)$. Untuk amannya, kita akan selalu mencantumkan kasus dasar secara terpisah.

persegi panjang 1×2, dan kita memerlukan $2 - 1 = 1$ kali pematahan untuk menguraikannya menjadi petak-petak tunggal.

Langkah induksi: Tetapkan $k \geq 2$ sembarang dan asumsikan $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$. Perhatikan batang cokelat persegi panjang yang terdiri atas $(k+1)$ petak. Patahkan batang itu sekali sepanjang sembarang garis antarbaris atau antarkolom. Hasilnya adalah dua batang cokelat, misalnya masing-masing berukuran a dan b. Artinya, kita memiliki batang cokelat persegi panjang yang terdiri atas a petak, batang cokelat persegi panjang yang terdiri atas b petak, dan $a + b = k + 1$.

Kita juga mengetahui bahwa $a \leq k$ dan $b \leq k$, sehingga berdasarkan hipotesis induksi, $P(a)$ dan $P(b)$ benar. Untuk menguraikan batang yang terdiri atas a petak menjadi petak-petak tunggal diperlukan $a - 1$ kali pematahan; untuk menguraikan batang yang terdiri atas b petak menjadi petak-petak tunggal diperlukan $b - 1$ kali pematahan. Dengan melakukan ini, batang semula terurai menjadi petak-petak tunggal. Secara keseluruhan, kita melakukan pematahan pertama, ditambah $a - 1$ dan $b - 1$ kali pematahan, sehingga jumlahnya

$$1 + a - 1 + b - 1 = a + b - 1 = k + 1 - 1 = k$$

kali pematahan. Jadi, $P(k+1)$ benar.

Oleh karena itu, berdasarkan induksi kuat, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 2$.

Berikut ini contoh yang lebih relevan secara matematis:

Contoh 4.6.3

Buktikan bahwa setiap bilangan asli yang lebih besar dari 1 merupakan bilangan prima atau dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Penyelesaian. Pertama, gagasannya: Jika kita mengambil suatu bilangan n, mungkin bilangan itu prima. Jika demikian, kita selesai. Jika tidak, bilangan itu komposit, sehingga merupakan hasil kali dua bilangan yang lebih kecil. Masing-masing faktor ini lebih kecil daripada n (tetapi setidaknya 2), sehingga kita dapat mengulangi argumen tersebut untuk kedua bilangan itu. Kita telah mereduksi masalah menjadi kasus yang lebih kecil.

Sekarang pembuktian formalnya:

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "n merupakan bilangan prima atau dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima." Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 2$.

Kasus dasar: $P(2)$ benar karena 2 memang bilangan prima.

Langkah induksi: Asumsikan $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$. Kita ingin menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar. Artinya, kita ingin menunjukkan bahwa $k+1$ merupakan bilangan prima atau merupakan hasil kali bilangan-bilangan prima. Jika $k+1$ prima, kita selesai. Jika tidak, $k+1$ memiliki lebih dari 2 pembagi, sehingga kita dapat menulis $k + 1 = m_1 \cdot m_2$, dengan m_1 dan m_2 lebih kecil daripada $k+1$ (dan lebih besar dari 1). Berdasarkan hipotesis

induksi, m_1 dan m_2 masing-masing merupakan bilangan prima atau dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. Dalam kedua hal tersebut, kita memperoleh bahwa $m_1 \cdot m_2 = k + 1$ dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Jadi, berdasarkan induksi kuat, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 2$. ■

Pilihan antara induksi biasa dan induksi kuat bergantung pada pernyataan yang ingin Anda buktikan. Agar aman, Anda selalu dapat menggunakan induksi kuat. Metode ini memang *lebih kuat*, sehingga dapat melakukan semua yang dapat dilakukan oleh induksi "lemah". Meskipun demikian, induksi biasa sering kali lebih mudah digunakan karena hipotesis induksi hanya dapat digunakan di satu tempat. Selain itu, ada nilai *keanggunan* dalam pembuktian. Jika suatu pernyataan dapat dibuktikan dengan alat yang lebih sederhana, sebaiknya kita melakukannya.

4.6.3 Pertanyaan Bacaan

1. Benar atau Salah?

Benar atau salah: Untuk membuktikan langkah induksi dalam pembuktian dengan induksi kuat, Anda harus mengasumsikan bahwa $P(k + 1)$ benar dan membuktikan bahwa $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$.

2. Manakah di antara pernyataan berikut tentang hubungan antara pembuktian dengan induksi dan pembuktian dengan induksi kuat yang benar?

A. Setiap pembuktian dengan induksi dapat ditulis sebagai pembuktian dengan induksi kuat.

B. Setiap pembuktian dengan induksi kuat dapat ditulis sebagai pembuktian dengan induksi.

C. Induksi kuat "lebih kuat" karena kasus dasarnya lebih kuat.

D. Induksi kuat "lebih kuat" karena hipotesis induksinya lebih kuat.

3. Apa yang ingin Anda tanyakan? Tuliskan setidaknya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang mungkin membuat Anda atau teman sekelas penasaran setelah membaca bagian ini.

4.6.4 Soal Latihan

1. Misalkan Anda sedang mencoba membuktikan dengan induksi kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$. Apa yang akan Anda coba buktikan pada *langkah induksi* dalam pembuktian tersebut? (Pilih semua yang berlaku.)

A. Bahwa dengan mengasumsikan $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$, untuk suatu $k \geq 0$ sembarang, kita dapat membuktikan bahwa $P(k + 1)$ benar.

B. Bahwa $(P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(k))$ mengimplikasikan $P(k+1)$ untuk semua $k \geq 0$.

C. Bahwa dengan mengasumsikan $P(k+1)$ benar untuk suatu $k \geq 0$ sembarang, kita dapat membuktikan bahwa $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$.

D. Bahwa $P(k+1)$ mengimplikasikan $P(j)$ untuk semua $j \leq k$.

E. Bahwa $P(k-2)$ mengimplikasikan $P(k+1)$ untuk setidaknya satu $k \geq 0$.

2. Versi yang lebih sederhana dari masalah batang cokelat adalah sebagai berikut: Misalkan Anda memiliki batang cokelat yang panjangnya n petak. Anda dapat membagi batang cokelat menjadi dua bagian dengan satu pematahan lurus melintang pada batang. Di mana pun setiap pematahan dilakukan, Anda akan menguraikan batang cokelat itu menjadi n bagian setelah melakukan $n-1$ kali pematahan.

Susun beberapa pernyataan berikut dalam urutan yang tepat untuk membentuk pembuktian klaim ini dengan induksi kuat.

- Asumsikan bahwa $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$, untuk suatu $k \geq 1$ sembarang.
- Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi kuat, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.
- $P(1)$ benar karena batang cokelat yang panjangnya 1 petak sudah berupa satu bagian.
- Perhatikan batang cokelat yang panjangnya $k+1$ petak.
- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa batang cokelat yang panjangnya n petak dapat diuraikan menjadi n bagian dengan melakukan $n-1$ kali pematahan.
- Di mana pun Anda mematahkan batang ini, hasilnya adalah dua batang yang lebih kecil, misalnya masing-masing dengan panjang a dan b.
- Jadi, jumlah seluruh pematahan adalah $a-1+b-1+1 = a+b-1$, yaitu $k+1-1 = k$.
- Karena a dan b tidak lebih besar daripada k, berdasarkan hipotesis induksi kedua batang yang lebih kecil ini dapat diuraikan menjadi petak-petak tunggal dengan masing-masing $a-1$ dan $b-1$ kali pematahan.

4.6.5 Latihan Tambahan

1. Misalkan sebuah tim sepak bola Amerika hanya mencetak gol lapangan bernilai 3 poin dan touchdown bernilai 7 poin (abaikan kemungkinan safety, kegagalan poin tambahan, dan konversi dua poin). Buktikan dengan induksi *kuat* bahwa tim tersebut dapat memperoleh setiap jumlah poin yang sedikitnya 12.

2. Buktikan dengan induksi *kuat* bahwa jumlah sudut dalam sebuah segi-n konveks adalah $(n-2)\cdot 180^\circ$. (Segi-n konveks adalah poligon bersisi n yang setiap sudut dalamnya kurang dari 180°.)

3. Buktikan bahwa setiap bilangan bulat positif merupakan pangkat dari 2 atau dapat ditulis sebagai jumlah beberapa pangkat dari 2 yang saling berbeda.

4. Buktikan dengan induksi kuat bahwa setiap bilangan asli merupakan bilangan Fibonacci atau dapat ditulis sebagai *jumlah* bilangan-bilangan Fibonacci yang *berbeda*.

5. Sebelumnya kita telah membuktikan bahwa untuk setiap pohon, banyaknya sisi selalu satu kurangnya dari banyaknya simpul. Artinya, pohon dengan v simpul dan e sisi memenuhi $v = e + 1$.

Berikan pembuktian alternatif untuk fakta ini dengan menggunakan induksi kuat pada banyaknya simpul. Lakukan dengan mengambil sebuah simpul bukan daun dan "membelahnya" menjadi dua simpul yang masing-masing termasuk dalam pohon yang berbeda.

6. Misalkan suatu bilangan riil x memiliki sifat bahwa $x + \frac{1}{x}$ merupakan bilangan bulat. Buktikan bahwa $x^n + \frac{1}{x^n}$ merupakan bilangan bulat untuk semua bilangan asli n.

7. Berikut ini contoh teknik induksi yang lebih rumit, yang disebut **induksi ganda**.

Anda akan membuktikan bahwa bilangan-bilangan Fibonacci memenuhi identitas $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$. Salah satu caranya adalah dengan membuktikan identitas yang lebih umum,

$$F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} = F_{m+n+1},$$

lalu memperhatikan bahwa ketika $m = n$, kita memperoleh hasil yang diinginkan.

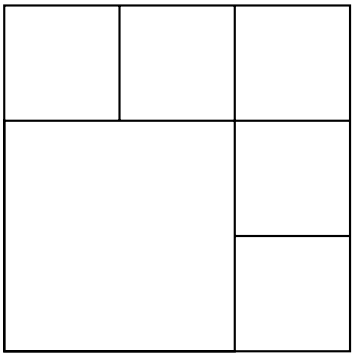
Perhatikan bahwa sekarang kita memiliki dua variabel, sehingga kita ingin membuktikan hal ini untuk semua $m \geq 0$ *dan* semua $n \geq 0$ secara bersamaan. Untuk setiap pasangan (m, n) tersebut, misalkan $P(m, n)$ adalah pernyataan $F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} = F_{m+n+1}$.

(a) Pertama, tetapkan $m = 0$, lalu berikan pembuktian dengan induksi matematika bahwa $P(0, n)$ berlaku untuk semua $n \geq 0$. Perhatikan bahwa pembuktian ini akan sangat mudah.

(b) Sekarang tetapkan n sembarang, lalu berikan pembuktian dengan induksi matematika *kuat* bahwa $P(m, n)$ berlaku untuk semua $m \geq 0$.

(c) Sekarang Anda dapat menyimpulkan bahwa $P(m, n)$ berlaku untuk semua $m, n \geq 0$. Apakah Anda memercayainya? Jelaskan mengapa induksi semacam ini sah. Sebagai contoh, mengapa pembuktian Anda di atas menjamin bahwa $P(2, 3)$ benar?

8. Diberikan sebuah persegi, Anda dapat memotongnya menjadi persegi-persegi yang lebih kecil dengan membuat potongan sepanjang garis-garis yang sejajar dengan sisi persegi semula (garis-garis ini tidak harus membentang sepanjang seluruh sisi persegi semula). Sebagai contoh, dengan memotong sepanjang garis-garis di bawah ini, Anda akan membagi sebuah persegi menjadi 6 persegi yang lebih kecil:



Buktikan dengan induksi kuat bahwa sebuah persegi dapat dipotong menjadi n persegi yang lebih kecil untuk setiap $n \geq 6$.

4.7 Ringkasan Bab

Selidiki!

Setiap hari persediaan biji kopi espresso ajaib berlapis cokelat Anda menjadi dua kali lipat (setiap biji membelah menjadi dua), tetapi kemudian Anda memakan 5 biji. Pada awal hari ke-0 Anda memiliki 10 biji.

1. Tuliskan beberapa suku pertama barisan tersebut. Kemudian berikan definisi rekursif untuk barisan itu dan jelaskan bagaimana Anda mengetahui bahwa definisi tersebut benar.
2. Buktikan dengan induksi bahwa digit terakhir dari banyaknya biji yang Anda miliki pada hari ke-n selalu 5 untuk setiap $n \geq 1$.
3. Temukan rumus tertutup untuk suku ke-n barisan tersebut dan buktikan kebenarannya dengan induksi.

Dalam bab ini, kita mempelajari barisan dan induksi matematika. Pada awalnya, keduanya mungkin tampak tidak sepenuhnya berkaitan, tetapi terdapat satu penghubung: penalaran rekursif. Ketika terdapat banyak kasus (bahkan mungkin tak berhingga), sering kali lebih mudah menjelaskan suatu kasus tertentu dengan menyatakan hubungannya dengan kasus-kasus lain daripada menjelaskannya dari awal. Untuk barisan, kita dapat menjelaskan suku ke-n dengan menyatakan hubungannya dengan suku *sebelumnya*. Ketika menunjukkan bahwa suatu pernyataan yang melibatkan peubah n benar untuk setiap nilai n, kita dapat menjelaskan mengapa kasus $n = k$ benar berdasarkan alasan mengapa kasus $n = k - 1$ benar.

Meskipun memikirkan masalah secara rekursif sering kali lebih mudah daripada memikirkannya secara langsung (setidaknya setelah Anda terbiasa dengan cara berpikir ini), tujuan akhir kita adalah melampaui deskripsi rekursif tersebut. Untuk barisan, kita ingin menemukan *rumus tertutup* bagi suku ke-n. Untuk pembuktian, kita ingin mengetahui bahwa pernyataan itu benar untuk suatu n tertentu (bukan hanya dengan mengasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk nilai n sebelumnya). Dalam bab ini, kita melihat beberapa metode untuk beralih dari deskripsi rekursif ke deskripsi langsung.

- Jika suku-suku suatu barisan bertambah dengan beda tetap atau rasio tetap (keduanya merupakan deskripsi rekursif), maka barisan dengan beda tetap merupakan barisan aritmetika, sedangkan barisan dengan rasio tetap merupakan barisan geometri, dan kita memiliki rumus tertutup untuk keduanya berdasarkan suku awal serta beda atau rasio tetapnya.
- Jika suku-suku suatu barisan bertambah dengan laju polinomial (yaitu, jika beda antarsukunya membentuk barisan dengan rumus tertutup polinomial), maka barisan tersebut diberikan oleh suatu rumus tertutup polinomial (dengan

derajat satu lebih tinggi daripada derajat rumus untuk barisan bedanya).

- Jika suku-suku suatu barisan bertambah dengan laju eksponensial, kita mengharapkan rumus tertutup barisan tersebut berbentuk eksponensial. Barisan-barisan ini sering memiliki rumus rekursif yang relatif sederhana, dan *teknik akar karakteristik* memungkinkan kita menemukan rumus tertutupnya.
- Jika kita ingin membuktikan bahwa suatu pernyataan benar untuk setiap nilai n (mulai dari suatu nilai awal yang kecil), dan kita dapat menjelaskan mengapa pernyataan untuk $n = k$ mengakibatkan pernyataan untuk $n = k + 1$, maka *prinsip induksi matematika* menjamin bahwa pernyataan tersebut benar untuk setiap nilai n (mulai dari kasus dasarnya).

Sepanjang bab ini, kita berusaha memahami *mengapa* fakta-fakta di atas benar. Sebagian dari tujuan pembuktian, baik dengan induksi maupun tidak, adalah mencapai pemahaman tersebut: pembuktian menjelaskan mengapa kebenaran matematika memang benar. Ketika mengembangkan kemampuan bernalar tentang matematika, kita perlu memastikan bahwa metode penalaran kita sahih. Cabang matematika yang menentukan apakah suatu penalaran sahih atau tidak adalah *logika matematika*, yang telah dibahas dalam bab Logika.

Tinjauan Bab

1. Hitung $7 + 13 + 19 + \cdots + 1243$.

2. Perhatikan barisan $28, 38, 48, 58, \ldots, 10n - 2$.

a. Ada berapa suku dalam barisan tersebut?

b. Berapakah suku kedua dari belakang?

c. Tentukan jumlah semua suku dalam barisan tersebut.

3. Perhatikan barisan yang diberikan oleh $a_n = 6 \cdot 5^{n-1}$.

a. Tentukan 4 suku pertama barisan tersebut.

$a_1 =$ ___, $a_2 =$ ___, $a_3 =$ ___, $a_4 =$ ___ ,...

Jenis barisan apakah ini?

(□ aritmetika □ geometri □ bukan keduanya)

b. Tentukan *jumlah* 22 suku pertamanya, yaitu hitung $\sum_{k=1}^{22} a_k$.

4. Perhatikan barisan $5, 11, 19, 29, 41, 55, \ldots$. Anggap $a_1 = 5$.

(a) Temukan rumus tertutup untuk a_n, suku ke-n barisan tersebut, dengan menuliskan setiap suku sebagai jumlah suatu barisan. Petunjuk: tentukan dahulu a_0, tetapi abaikan suku itu ketika menyederhanakan jumlahnya.

(b) Temukan kembali suatu rumus tertutup, kali ini dengan menggunakan

pencocokan polinomial atau teknik akar karakteristik (pilih yang sesuai). Tunjukkan langkah-langkah Anda.

(c) Temukan sekali lagi suatu rumus tertutup, kali ini dengan mengenali barisan tersebut sebagai modifikasi dari satu atau beberapa barisan yang terkenal. Jelaskan.

5. Gunakan pencocokan polinomial untuk menentukan rumus suku ke-n dari barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ yang diawali dengan

$$11, 22, 35, 50, 67, \ldots$$

Perhatikan bahwa suku pertama di atas adalah a_1, bukan a_0.

$a_n =$ _____

6. Misalkan rumus tertutup suatu barisan tertentu merupakan polinom berderajat 3. Apa yang dapat Anda simpulkan tentang rumus tertutup untuk:

(a) Barisan jumlah parsial?

(b) Barisan beda kedua?

7. Perhatikan barisan yang diberikan secara rekursif oleh $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, dan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

(a) Tuliskan 6 suku pertama barisan tersebut.

(b) Mungkinkah rumus tertutup untuk a_n berupa polinom? Jelaskan.

8. Barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ diawali oleh $-1, 0, 2, 5, 9, 14 \ldots$ dan memiliki rumus tertutup

$$a_n = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Gunakan fakta ini untuk menemukan rumus tertutup bagi barisan $(b_n)_{n\geq 1}$ yang diawali oleh $4, 10, 18, 28, 40, \ldots$.

9. Dalam lagu *The Twelve Days of Christmas*, kekasih saya mula-mula memberi saya 1 hadiah; kemudian 2 hadiah dan 1 hadiah; lalu 3 hadiah, 2 hadiah, dan 1 hadiah; dan seterusnya. Berapa jumlah seluruh hadiah yang diberikan kekasih saya selama dua belas hari tersebut?

10. Perhatikan relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 20a_{n-2}$ dengan dua suku pertama $a_0 = 4$ dan $a_1 = 9$.

a. Tuliskan 5 suku pertama barisan yang didefinisikan oleh relasi rekurensi tersebut.

$a_2 =$ ___, $a_3 =$ ___, $a_4 =$ ___, ...

b. Selesaikan relasi rekurensi tersebut, yaitu tentukan rumus tertutup untuk a_n.

$a_n =$ _____

11. Perhatikan relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} + 18a_{n-2}$ dengan dua suku pertama $a_0 = 5$ dan $a_1 = 7$.

a. Tentukan dua suku berikutnya dari barisan tersebut (a_2 dan a_3):

$a_2 =$ ___

$a_3 =$ ___

b. Selesaikan relasi rekurensi tersebut, yaitu tentukan rumus tertutup bagi a_n.

$a_n =$ _____

12. Kelinci cokelat ajaib Anda berkembang biak seperti kelinci: setiap kelinci besar menghasilkan 2 kelinci mini baru setiap hari, dan setiap hari, semua kelinci mini yang lahir pada hari sebelumnya tumbuh menjadi kelinci besar. Anggap Anda mulai dengan 2 kelinci mini dan tidak ada kelinci yang pernah mati (atau dimakan).

(a) Tuliskan beberapa suku pertama barisan tersebut.

(b) Berikan definisi rekursif bagi barisan tersebut dan jelaskan mengapa definisi itu benar.

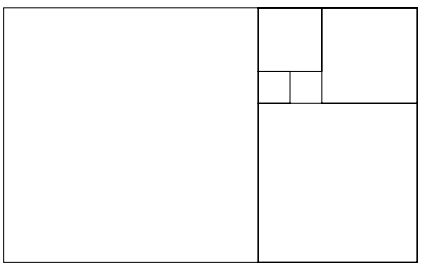
(c) Temukan rumus tertutup untuk suku ke-n barisan tersebut.

13. Perhatikan barisan jumlah parsial *kuadrat* bilangan Fibonacci: F_1^2, $F_1^2 + F_2^2$, $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2, \ldots$. Barisan tersebut diawali oleh $1, 2, 6, 15, 40, \ldots$.

(a) Tebak suatu rumus untuk jumlah parsial ke-n yang dinyatakan menggunakan bilangan Fibonacci. Petunjuk: tuliskan setiap suku sebagai hasil kali.

(b) Buktikan kebenaran rumus Anda dengan induksi matematika.

(c) Jelaskan hubungan masalah ini dengan gambar berikut:



14. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut dengan induksi matematika:

(a) $n! < n^n$ untuk $n \geq 2$

(b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) $4^n - 1$ merupakan kelipatan 3 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

(d) Nilai perangko *terbesar* yang *tidak dapat* Anda bentuk tepat dengan perangko 4 sen dan 9 sen adalah 23 sen.

(e) Kuadrat setiap bilangan genap habis dibagi 4.

15. Buktikan dengan induksi matematika bahwa $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ berlaku untuk setiap $n \geq 1$.

16. Misalkan $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ dan $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Buktikan dengan induksi kuat bahwa $a_n = 1$ untuk setiap n.

17. Buktikan dengan induksi bahwa setiap himpunan yang memuat n anggota memiliki 2^n himpunan bagian yang berbeda untuk setiap $n \geq 1$.

Meninjau Kembali Struktur Diskret

Sepanjang bab-bab sebelumnya, kita telah menjumpai banyak contoh struktur diskret beserta sifat dan kegunaannya. Bagian-bagian berikut memberikan tinjauan mandiri atas setiap struktur utama yang telah kita pelajari. Bagian-bagian ini dapat dipelajari sebelum materi lain dalam buku ini atau digunakan sesudahnya sebagai ulasan dan rujukan.

5.1 Himpunan

Perhatikan bahwa bagian ini memuat banyak perincian tentang hal-hal yang dapat kita nyatakan mengenai himpunan. Jika Anda belum pernah mempelajari gabungan atau diagram Venn, bagian ini perlu dibaca dengan saksama.

Objek paling mendasar yang akan kita gunakan dalam pembelajaran ini (dan sebenarnya dalam seluruh matematika) adalah *himpunan*. Sebagian besar pembahasan berikut mungkin merupakan tinjauan ulang, tetapi sangat penting bagi Anda untuk menguasai bahasa teori himpunan. Sebagian besar notasi yang kita gunakan di bawah ini bersifat baku, meskipun beberapa di antaranya mungkin sedikit berbeda dari yang pernah Anda jumpai.

Bagi kita, sebuah **himpunan** hanyalah kumpulan objek yang tidak terurut. Perhatikan dua contoh berikut. Kita dapat meninjau himpunan semua aktor yang pernah memerankan *The Doctor* dalam *Doctor Who*, atau himpunan bilangan asli dari 1 sampai dengan 10. Dalam kasus pertama, Tom Baker merupakan elemen (atau anggota) himpunan tersebut, sedangkan Idris Elba, di antara banyak orang lainnya, bukan merupakan elemennya. Selain itu, kedua contoh tersebut merupakan himpunan yang berbeda. Dua himpunan sama jika dan hanya jika keduanya memuat elemen-elemen yang persis sama. Sebagai contoh, himpunan yang memuat semua huruf vokal dalam Declaration of Independence sama persis dengan himpunan huruf vokal dalam kata "questionably" (yaitu, semua huruf vokal); urutan dan pengulangan tidak kita perhatikan, yang penting hanyalah apakah suatu elemen terdapat dalam himpunan tersebut.

5.1.1 Notasi

Kita memerlukan beberapa notasi agar lebih mudah membicarakan himpunan. Perhatikan,

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Ini dibaca, "A adalah himpunan yang memuat elemen 1, 2, dan 3." Kita menggunakan kurung kurawal "{, }" untuk mengapit elemen-elemen suatu himpunan. Berikut notasi lainnya:

$$a \in \{a, b, c\}.$$

Simbol "$\in$" dibaca "terdapat dalam" atau "merupakan elemen dari." Jadi, pernyataan di atas berarti bahwa a merupakan elemen himpunan yang memuat huruf a, b, dan c. Perhatikan bahwa pernyataan ini benar. Pernyataan bahwa d tidak terdapat dalam himpunan tersebut juga benar:

$$d \notin \{a, b, c\}.$$

Perlu diperhatikan: Kita menulis "$x \in A$" ketika ingin menyatakan bahwa salah satu elemen himpunan A adalah x. Sebagai contoh, perhatikan himpunan

$$A = \{1, b, \{x, y, z\}, \emptyset\}.$$

Himpunan ini memang tidak biasa. Himpunan tersebut memuat empat elemen: bilangan 1, huruf b, himpunan $\{x, y, z\}$, dan himpunan kosong $\emptyset = \{\}$, yaitu himpunan yang tidak memuat elemen apa pun. Apakah x terdapat dalam A? Jawabannya tidak. Tidak satu pun dari keempat elemen A merupakan huruf x, sehingga harus kita simpulkan bahwa $x \notin A$. Demikian pula, perhatikan himpunan $B = \{1, b\}$. Meskipun elemen-elemen B merupakan elemen-elemen A, kita tidak dapat mengatakan bahwa *himpunan B* merupakan salah satu elemen A. Oleh karena itu, $B \notin A$. (Sebentar lagi kita akan melihat bahwa B merupakan *himpunan bagian* dari A, tetapi hal ini berbeda dengan menjadi *elemen* dari A.)

Kita telah mendeskripsikan himpunan-himpunan di atas dengan mencantumkan elemen-elemennya. Kadang-kadang hal ini sulit dilakukan, terutama ketika suatu himpunan memiliki sangat banyak elemen (mungkin tak berhingga banyaknya). Sebagai contoh, jika kita ingin A menjadi himpunan semua bilangan asli genap, kita dapat menulis

$$A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\},$$

tetapi cara ini sedikit kurang tepat. Cara yang lebih baik adalah

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \text{ terdapat } n \in \mathbb{N} \text{ sedemikian sehingga } x = 2n\}.$$

Mari kita telaah dengan saksama. Pertama, ada beberapa simbol baru yang perlu dipahami: "$\mathbb{N}$" merupakan simbol yang biasanya digunakan untuk menyatakan **bilangan asli**, yang kita definisikan sebagai himpunan $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Selanjutnya, tanda titik dua, ":", dibaca *sedemikian sehingga*; tanda ini memisahkan elemen-elemen yang berada dalam himpunan dari syarat yang harus dipenuhi oleh elemen-elemen tersebut. Dengan menggabungkan semua keterangan tersebut, kita membaca himpunan itu sebagai, "himpunan semua x dalam bilangan asli, sedemikian sehingga terdapat suatu n dalam bilangan asli yang membuat x sama dengan dua kali n." Dengan kata lain, himpunan semua bilangan asli genap. Berikut cara lain untuk menuliskan himpunan yang sama.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ genap}\}.$$

Catatan: Kadang-kadang matematikawan menggunakan | atau ∍ sebagai simbol "sedemikian sehingga" sebagai pengganti tanda titik dua. Selain itu, pendapat

matematikawan cukup berimbang mengenai apakah 0 merupakan elemen bilangan asli, jadi berhati-hatilah mengenai hal ini.

Notasi ini biasanya disebut **notasi pembentuk himpunan**. Notasi tersebut memberi tahu kita cara *membentuk* suatu himpunan dengan menyatakan secara tepat syarat yang harus dipenuhi elemen agar termasuk di dalamnya (syarat itu merupakan pernyataan logis setelah simbol ":"). Membaca dan memahami himpunan yang ditulis dengan cara ini memerlukan latihan. Berikut beberapa contoh lainnya:

Contoh 5.1.1

Deskripsikan setiap himpunan berikut dengan kata-kata dan dengan mencantumkan cukup banyak elemen untuk melihat polanya.

1. $\{x : x + 3 \in \mathbb{N}\}$.
2. $\{x \in \mathbb{N} : x + 3 \in \mathbb{N}\}$.
3. $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ atau } -x \in \mathbb{N}\}$.
4. $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ dan } -x \in \mathbb{N}\}$.

Penyelesaian.

1. Ini merupakan himpunan semua bilangan yang nilainya 3 kurang dari suatu bilangan asli (yaitu, jika ditambah 3, hasilnya merupakan bilangan asli). Himpunan tersebut juga dapat ditulis sebagai $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (perhatikan bahwa 0 merupakan bilangan asli, sehingga -3 berada dalam himpunan ini karena $-3 + 3 = 0$).
2. Ini merupakan himpunan semua bilangan asli yang nilainya 3 kurang dari suatu bilangan asli. Jadi, di sini kita hanya memperoleh $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. Ini merupakan himpunan semua bilangan bulat (bilangan bulat positif, bilangan bulat negatif, dan nol, ditulis $\mathbb{Z}$). Dengan kata lain, $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
4. Di sini kita menginginkan semua bilangan x sedemikian sehingga x dan $-x$ merupakan bilangan asli. Hanya ada satu bilangan seperti itu: 0. Jadi, kita memperoleh himpunan $\{0\}$.

Ada pula variasi halus dalam notasi pembentuk himpunan. Meskipun syarat umumnya diberikan setelah "sedemikian sehingga", terkadang syarat tersebut tersirat dalam bagian pertama. Berikut contohnya.

Contoh 5.1.2

Cantumkan beberapa elemen dari himpunan-himpunan di bawah ini dan deskripsikan dengan kata-kata. Himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan **bilangan bulat**, yaitu bilangan bulat positif, bilangan bulat negatif, dan nol.

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$

Penyelesaian.

1. Himpunan bilangan bulat yang memenuhi syarat bahwa kuadratnya merupakan bilangan asli. Setiap bilangan bulat, ketika dikuadratkan, menghasilkan bilangan bulat taknegatif, sehingga merupakan bilangan asli. Jadi, $A = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
2. Di sini kita mencari himpunan semua x^2 dengan x suatu bilangan asli. Jadi, himpunan ini tidak lain adalah himpunan kuadrat sempurna. $B = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

   Dengan notasi pembentuk himpunan yang lebih ketat, himpunan ini juga dapat ditulis sebagai $B = \{x \in \mathbb{N} : x = n^2 \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{N}\}$.

Kita sudah memiliki banyak notasi, dan masih ada lagi. Di bawah ini terdapat tabel simbol yang berguna. Beberapa simbol tersebut akan dibahas lebih terperinci dalam pembahasan selanjutnya.

Himpunan Khusus.

$\emptyset$	**Himpunan kosong** adalah himpunan yang tidak memuat elemen apa pun.
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli. Yaitu, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat. Yaitu, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional.
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real.
$\mathcal{P}(A)$	**Himpunan kuasa** dari sembarang himpunan A adalah himpunan semua himpunan bagian A.

Notasi Teori Himpunan.

$\{,\}$	Kita menggunakan **kurung kurawal** ini untuk mengapit elemen-elemen suatu himpunan. Jadi, $\{1,2,3\}$ merupakan himpunan yang memuat 1, 2, dan 3.
$:$	$\{x : x > 2\}$ merupakan himpunan semua x **sedemikian sehingga** x lebih besar dari 2.
$\in$	$2 \in \{1,2,3\}$ menyatakan bahwa 2 **merupakan elemen dari** himpunan $\{1,2,3\}$.
$\notin$	$4 \notin \{1,2,3\}$ karena 4 **bukan merupakan elemen dari** himpunan $\{1,2,3\}$.
$\subseteq$	$A \subseteq B$ menyatakan bahwa A **merupakan himpunan bagian dari** B: Setiap elemen A juga merupakan elemen B.
$\subset$	$A \subset B$ menyatakan bahwa A **merupakan himpunan bagian sejati dari** B: Setiap elemen A juga merupakan elemen B, tetapi $A \neq B$.
$\cap$	$A \cap B$ merupakan **irisan** A **dan** B: himpunan yang memuat semua elemen yang sekaligus merupakan elemen A dan B.
$\cup$	$A \cup B$ merupakan **gabungan** A **dan** B: himpunan yang memuat semua elemen yang merupakan elemen A atau B, atau keduanya.
$\times$	$A \times B$ merupakan **hasil kali Kartesius** A **dan** B: himpunan semua pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.
$\setminus$	$A \setminus B$ merupakan **selisih himpunan** A **dan** B: himpunan yang memuat semua elemen A yang bukan merupakan elemen B.
$\overline{A}$	**Komplemen** A adalah himpunan segala sesuatu yang bukan merupakan elemen A.
$\lvert A \rvert$	**Kardinalitas (atau ukuran)** A adalah banyaknya elemen dalam A.

Selidiki!

1. Tentukan kardinalitas setiap himpunan di bawah ini.
   (a) $A = \{3,4,\ldots,15\}$.
   (b) $B = \{n \in \mathbb{N} : 2 < n \leq 200\}$.
   (c) $C = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100$ dan untuk suatu $m \in \mathbb{N}, (n = 2m+1)\}$.
2. Carilah dua himpunan A dan B yang memenuhi $|A| = 5$, $|B| = 6$, dan $|A \cup B| = 9$. Berapakah $|A \cap B|$?

3. Carilah himpunan A dan B dengan $|A| = |B|$ sedemikian sehingga $|A \cup B| = 7$ dan $|A \cap B| = 3$. Berapakah $|A|$?

4. Misalkan $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Definisikan $\mathcal{B}_2 = \{B \subseteq A : |B| = 2\}$. Tentukan $|\mathcal{B}_2|$.

5. Untuk sembarang himpunan A dan B, definisikan $AB = \{ab : a \in A \text{ dan } b \in B\}$. Jika $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{2, 3, 4\}$, berapakah $|AB|$? Berapakah $|A \times B|$?

5.1.2 Hubungan Antarhimpunan

Kita telah menjelaskan arti kesamaan dua himpunan: Keduanya memiliki elemen-elemen yang persis sama. Jadi, sebagai contoh,

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}.$$

(Ingatlah, urutan penulisan elemen-elemen tidaklah penting.) Selain itu,

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 1 + 1, 1 + 1 + 1\} = \{I, II, III\} = \{1, 2, 3, 1 + 2\}$$

karena semua bentuk tersebut merupakan cara untuk menuliskan himpunan yang memuat tiga bilangan bulat positif pertama (cara penulisannya tidak penting; yang penting adalah nilai elemen-elemennya).

Bagaimana dengan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$? Jelas bahwa $A \neq B$, tetapi perhatikan bahwa setiap elemen A juga merupakan elemen B. Karena itu, kita mengatakan bahwa A merupakan *himpunan bagian* dari B, atau dalam simbol, $A \subset B$ atau $A \subseteq B$. Kedua simbol tersebut dibaca "merupakan himpunan bagian dari." Perbedaannya adalah bahwa terkadang kita ingin menyatakan bahwa A sama dengan atau merupakan himpunan bagian dari B, dan dalam kasus ini kita menggunakan $\subseteq$. Hal ini serupa dengan perbedaan antara $<$ dan $\leq$.

Contoh 5.1.3

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{7, 8, 9\}$. Tentukan apakah masing-masing pernyataan berikut benar, salah, atau tidak bermakna.

1. $A \subset B$.
2. $B \subset A$.
3. $B \in C$.
4. $\emptyset \in A$.
5. $\emptyset \subset A$.
6. $A < D$.
7. $3 \in C$.
8. $3 \subset C$.
9. $\{3\} \subset C$.

Penyelesaian.

1. Salah. Sebagai contoh, $1 \in A$, tetapi $1 \notin B$.
2. Benar. Setiap elemen B merupakan elemen A.
3. Salah. Elemen-elemen C adalah 1, 2, dan 3. *Himpunan* B tidak sama dengan 1, 2, ataupun 3.
4. Salah. A memiliki tepat 6 elemen, dan tidak satu pun merupakan himpunan kosong.
5. Benar. Semua yang berada dalam himpunan kosong (tidak ada) juga merupakan elemen A. Perhatikan bahwa himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.
6. Tidak bermakna. Suatu himpunan tidak dapat bernilai kurang dari himpunan lain.
7. Benar. 3 merupakan salah satu elemen himpunan C.
8. Tidak bermakna. 3 bukanlah suatu himpunan, sehingga tidak mungkin merupakan himpunan bagian dari himpunan lain.
9. Benar. 3 merupakan satu-satunya elemen himpunan $\{3\}$ dan merupakan elemen C, sehingga setiap elemen $\{3\}$ merupakan elemen C.

Dalam contoh di atas, B merupakan himpunan bagian dari A. Anda mungkin bertanya-tanya himpunan lain apa saja yang merupakan himpunan bagian dari A. Jika semua himpunan bagian A tersebut kita kumpulkan ke dalam suatu himpunan baru, kita memperoleh suatu himpunan yang elemen-elemennya juga berupa himpunan. Himpunan semua himpunan bagian A disebut **himpunan kuasa** dari A, dan ditulis $\mathcal{P}(A)$.

Contoh 5.1.4

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan $\mathcal{P}(A)$.

Penyelesaian. $\mathcal{P}(A)$ merupakan himpunan yang elemen-elemennya juga berupa himpunan, dan semuanya merupakan himpunan bagian dari A. Jadi,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Perhatikan bahwa meskipun $2 \in A$, penulisan $2 \in \mathcal{P}(A)$ salah karena tidak satu pun elemen $\mathcal{P}(A)$ berupa bilangan! Di sisi lain, kita memang memiliki $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$ karena $\{2\} \subseteq A$.

Seperti apakah himpunan bagian dari $\mathcal{P}(A)$? Perhatikan bahwa $\{2\} \nsubseteq \mathcal{P}(A)$ karena tidak semua yang berada dalam $\{2\}$ berada dalam $\mathcal{P}(A)$. Namun, kita memang memiliki $\{\{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Satu-satunya elemen $\{\{2\}\}$ adalah himpunan $\{2\}$, yang juga merupakan elemen $\mathcal{P}(A)$. Kita dapat mengambil

kumpulan semua himpunan bagian $\mathcal{P}(A)$ dan menyebutnya $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Kita bahkan dapat mengambil himpunan kuasa dari himpunan yang elemen-elemennya berupa himpunan yang elemen-elemennya juga berupa himpunan.

Cara lain untuk membandingkan himpunan adalah berdasarkan *ukurannya*. Perhatikan bahwa dalam contoh sebelumnya, A memiliki 6 elemen, sedangkan B, C, dan D masing-masing memiliki 3 elemen. Ukuran suatu himpunan disebut **kardinalitas** himpunan tersebut. Kita menulis $|A| = 6$, $|B| = 3$, dan seterusnya. Untuk himpunan yang memiliki elemen berhingga banyaknya, kardinalitas himpunan tersebut tidak lain adalah banyaknya elemen di dalamnya. Perhatikan bahwa kardinalitas $\{1, 2, 3, 2, 1\}$ adalah 3. Kita tidak menghitung pengulangan (bahkan, $\{1, 2, 3, 2, 1\}$ merupakan himpunan yang persis sama dengan $\{1, 2, 3\}$). Ada himpunan-himpunan dengan kardinalitas tak berhingga, seperti $\mathbb{N}$, himpunan bilangan rasional (ditulis $\mathbb{Q}$), himpunan bilangan asli genap, dan himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$). Kita dapat membedakan berbagai kardinalitas tak berhingga, tetapi pembahasan itu berada di luar cakupan buku ini. Bagi kita, suatu himpunan dapat bersifat tak berhingga atau berhingga; jika berhingga, kardinalitasnya dapat kita tentukan dengan menghitung elemen-elemennya.

Contoh 5.1.5

1. Tentukan kardinalitas $A = \{23, 24, \ldots, 37, 38\}$.
2. Tentukan kardinalitas $B = \{1, \{2, 3, 4\}, \emptyset\}$.
3. Jika $C = \{1, 2, 3\}$, berapakah kardinalitas $\mathcal{P}(C)$?

Penyelesaian.

1. Karena $38 - 23 = 15$, kita dapat menyimpulkan bahwa kardinalitas himpunan tersebut adalah $|A| = 16$ (Anda perlu menambahkan satu karena 23 juga disertakan).
2. Di sini $|B| = 3$. Ketiga elemennya adalah bilangan 1, himpunan $\{2, 3, 4\}$, dan himpunan kosong.
3. Di atas kita telah mencantumkan elemen-elemen himpunan kuasa $\mathcal{P}(C)$, dan terdapat 8 elemen (yang masing-masing merupakan suatu himpunan). Jadi, $|\mathcal{P}(C)| = 8$. (Anda mungkin bertanya-tanya apakah terdapat hubungan antara $|A|$ dan $|\mathcal{P}(A)|$ untuk semua himpunan A. Pertanyaan ini menarik dan akan kita kaji dalam Bab 3.)

5.1.3 Operasi pada Himpunan

Dapatkah kita menjumlahkan dua himpunan? Sebenarnya tidak, tetapi ada operasi yang serupa. Jika kita ingin menggabungkan dua himpunan untuk memperoleh

kumpulan objek yang terdapat dalam salah satu himpunan, kita dapat mengambil **gabungan** kedua himpunan tersebut. Secara simbolis,

$$C = A \cup B,$$

dibaca, "C merupakan gabungan A dan B," berarti bahwa elemen-elemen C tepat merupakan elemen yang berada dalam A atau dalam B (atau dalam keduanya). Sebagai contoh, jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 3, 4\}$, maka $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Operasi umum lainnya pada himpunan adalah **irisan**. Kita menulis,

$$C = A \cap B$$

dan mengatakan, "C merupakan irisan A dan B," apabila elemen-elemen C tepat merupakan elemen yang sekaligus berada dalam A dan B. Jadi, jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 3, 4\}$, maka $A \cap B = \{2, 3\}$.

Ketika membahas himpunan, kita sering memiliki pemahaman tertentu mengenai apa yang dimaksud dengan "segala sesuatu". Mungkin kita hanya memperhatikan bilangan asli. Dalam hal ini, kita mengatakan bahwa **semesta** kita adalah $\mathbb{N}$. Terkadang kita menyatakan semesta ini dengan $\mathcal{U}$. Dalam konteks tersebut, kita mungkin ingin membicarakan semua elemen yang *tidak* berada dalam suatu himpunan tertentu. Kita mengatakan bahwa B merupakan **komplemen** dari A, dan menulis,

$$B = \overline{A}$$

apabila B memuat setiap elemen yang tidak termuat dalam A. Jadi, jika semesta kita adalah $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$, dan $A = \{2, 3, 5, 7\}$, maka $\overline{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

Tentu saja, kita dapat melakukan lebih dari satu operasi sekaligus. Sebagai contoh, perhatikan

$$A \cap \overline{B}.$$

Ini merupakan himpunan semua elemen yang berada dalam A sekaligus tidak berada dalam B. Apa yang telah kita lakukan? Kita memulai dengan A lalu menghapus semua elemen yang berada dalam B. Cara lain untuk menuliskan hal ini adalah menggunakan **selisih himpunan**:

$$A \cap \overline{B} = A \setminus B.$$

Penting untuk diingat bahwa operasi-operasi pada himpunan ini (gabungan, irisan, komplemen, dan selisih) menghasilkan himpunan lain. Jangan mencampuradukkannya dengan simbol-simbol dari bagian sebelumnya (elemen dari dan himpunan bagian dari). $A \cap B$ merupakan suatu himpunan, sedangkan $A \subseteq B$ bernilai benar atau salah. Perbedaan ini sama seperti perbedaan antara $3 + 2$ (yang merupakan suatu bilangan) dan $3 \leq 2$ (yang bernilai salah).

Contoh 5.1.6

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,2,3\}$, dan $D = \{7,8,9\}$. Jika semestanya adalah $\mathcal{U} = \{1,2,\ldots,10\}$, tentukan:

1. $A \cup B$.
2. $A \cap B$.
3. $B \cap C$.
4. $A \cap D$.
5. $\overline{B \cup C}$.
6. $A \setminus B$.
7. $(D \cap \overline{C}) \cup \overline{A \cap B}$.
8. $\emptyset \cup C$.
9. $\emptyset \cap C$.

Penyelesaian.

1. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = A$ karena semua yang berada dalam B sudah berada dalam A.
2. $A \cap B = \{2,4,6\} = B$ karena semua yang berada dalam B juga berada dalam A.
3. $B \cap C = \{2\}$ karena satu-satunya elemen yang sekaligus berada dalam B dan C adalah 2.
4. $A \cap D = \emptyset$ karena A dan D tidak memiliki elemen yang sama.
5. $\overline{B \cup C} = \{5,7,8,9,10\}$. Pertama, kita memperoleh $B \cup C = \{1,2,3,4,6\}$, lalu mengambil segala sesuatu yang tidak berada dalam himpunan tersebut.
6. $A \setminus B = \{1,3,5\}$ karena elemen 1, 3, dan 5 berada dalam A, tetapi tidak dalam B. Himpunan ini sama dengan $A \cap \overline{B}$.
7. $(D \cap \overline{C}) \cup \overline{A \cap B} = \{1,3,5,7,8,9,10\}$. Himpunan tersebut memuat semua elemen yang berada dalam D, tetapi tidak dalam C (yaitu, $\{7,8,9\}$), atau tidak sekaligus berada dalam A dan B (yaitu, $\{1,3,5,7,8,9,10\}$).
8. $\emptyset \cup C = C$ karena himpunan kosong tidak menambahkan apa pun.
9. $\emptyset \cap C = \emptyset$ karena tidak ada sesuatu yang sekaligus dapat berada dalam suatu himpunan dan dalam himpunan kosong.

Notasi seperti ini berguna. Kita akan sering ingin menambahkan atau menghapus elemen dari suatu himpunan, dan notasi kita memungkinkan hal tersebut dilakukan secara tepat.

Contoh 5.1.7

Jika $A = \{1, 2, 3\}$, kita dapat mendeskripsikan himpunan yang diperoleh dengan menambahkan bilangan 4 sebagai $A \cup \{4\}$. Jika ingin menyatakan himpunan yang diperoleh dengan menghapus bilangan 2 dari A, kita dapat menulis $A \setminus \{2\}$.

Namun, berhati-hatilah. Jika Anda menambahkan suatu elemen ke sebuah himpunan, Anda memperoleh himpunan baru! Jadi, Anda akan memiliki $B = A \cup \{4\}$ dan dapat mengatakan dengan benar bahwa B memuat 4, tetapi A tidak.

Ada satu cara lagi untuk menggabungkan himpunan yang akan berguna bagi kita: **hasil kali Kartesius**, $A \times B$. Istilah ini terdengar rumit, tetapi konsepnya sudah pernah Anda jumpai. Ketika menggambar grafik suatu fungsi dalam kalkulus, Anda menggambarnya pada bidang Kartesius. Bidang ini merupakan himpunan semua pasangan terurut bilangan real (x, y). Kita dapat melakukan hal yang sama untuk *sembarang* pasangan himpunan, bukan hanya bilangan real dengan dirinya sendiri.

Dengan kata lain, $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ dan } b \in B\}$. Koordinat pertama berasal dari himpunan pertama, dan koordinat kedua berasal dari himpunan kedua. Terkadang kita ingin mengambil hasil kali Kartesius suatu himpunan dengan dirinya sendiri, dan hal ini tidak bermasalah: $A \times A = \{(a, b) : a, b \in A\}$ (kita juga dapat menulis A^2 untuk himpunan ini). Perhatikan bahwa dalam $A \times A$, kita tetap menginginkan *semua* pasangan terurut, bukan hanya pasangan dengan koordinat pertama dan kedua yang sama. Kita juga dapat mengambil hasil kali 3 himpunan atau lebih, sehingga memperoleh tripel terurut, kuadrupel terurut, dan seterusnya.

Contoh 5.1.8

Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$. Tentukan $A \times B$ dan $A \times A$. Menurut dugaan Anda, berapa banyak elemen dalam $B \times B$?

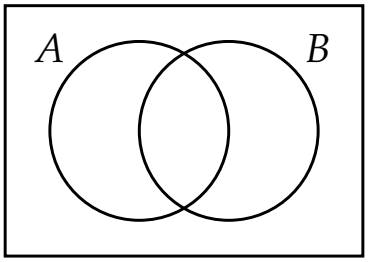
Penyelesaian. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$.

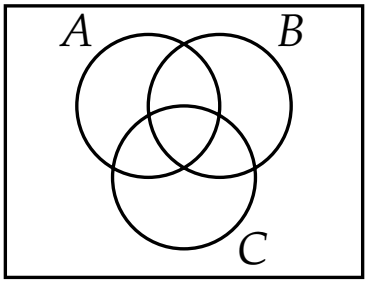
$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

$|B \times B| = 9$. Terdapat 3 pasangan dengan koordinat pertama 3, tiga pasangan lagi dengan koordinat pertama 4, dan tiga pasangan terakhir dengan koordinat pertama 5.

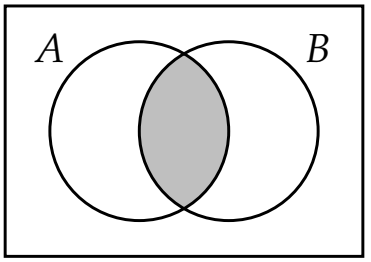
5.1.4 Diagram Venn

Ada alat visual yang sangat baik untuk merepresentasikan operasi pada himpunan. **Diagram Venn** menampilkan himpunan sebagai lingkaran-lingkaran yang beririsan. Kita dapat mengarsir daerah yang sedang dibicarakan ketika menjalankan suatu operasi. Kardinalitas suatu himpunan tertentu juga dapat direpresentasikan dengan menempatkan bilangannya pada daerah yang bersesuaian.

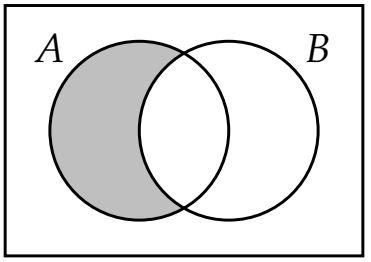




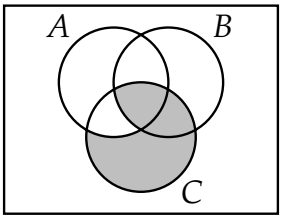
Setiap lingkaran merepresentasikan suatu himpunan. Persegi panjang yang memuat lingkaran-lingkaran tersebut merepresentasikan semesta. Untuk merepresentasikan kombinasi himpunan-himpunan ini, kita mengarsir daerah yang bersesuaian. Sebagai contoh, kita dapat menggambarkan $A \cap B$ sebagai berikut:



Berikut representasi $A \cap \overline{B}$, atau secara ekuivalen $A \setminus B$:



Contoh yang lebih rumit adalah $(B \cap C) \cup (C \cap \overline{A})$, seperti terlihat di bawah ini.



Perhatikan bahwa daerah-daerah yang diarsir di atas juga dapat diperoleh dengan cara lain. Kita dapat memulai dengan seluruh C, lalu mengecualikan daerah tempat C dan A bertumpang tindih di luar B. Daerah tersebut adalah $(A \cap C) \cap \overline{B}$. Jadi, diagram Venn di atas juga merepresentasikan $C \cap \overline{\left((A \cap C) \cap \overline{B}\right)}$. Dengan

hanya menggunakan gambar, kita telah menentukan bahwa

$$(B \cap C) \cup (C \cap \overline{A}) = C \cap \overline{\left((A \cap C) \cap \overline{B}\right)}.$$

5.1.5 Latihan

1. $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ Tentukan setiap himpunan berikut. Jawaban Anda harus menyertakan tanda kurung kurawal.

a. $A \cup B$.

b. $A \cap B$.

c. $A \setminus B$.

d. $B \setminus A$.

2. Tentukan elemen terkecil dari setiap himpunan berikut, jika ada.

a. $\{n \in \mathbb{N} : n^2 - 3 \geq 4\}$

b. $\{n \in \mathbb{N} : n^2 - 7 \in \mathbb{N}\}$

c. $\{n^2 + 4 : n \in \mathbb{N}\}$

d. $\{n \in \mathbb{N} : n = k^2 + 4 \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{N}\}$

3. Tentukan kardinalitas berikut.

a. $|A|$ jika $A = \{4, 5, 6, 7, \ldots, 33\}$.

b. $|A|$ jika $A = \{x \in \mathbb{Z} : -7 \leq x \leq 91\}$.

c. $|A \cap B|$ jika $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 27\}$ dan $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ prima }\}$.

4. Misalkan $A = \{8, 10, 11, 12, 13\}$ dan $B = \{8, 16, 17, 24, 32\}$. Tentukan himpunan berukuran sebesar mungkin yang merupakan himpunan bagian dari A dan B.

5. Tentukan himpunan berukuran sekecil mungkin yang memuat {4,6,7,9} dan {5,6,7,9,10} sebagai himpunan bagian.

6. Misalkan $A = \{n \in \mathbb{N} : 39 \leq n < 55\}$ dan $B = \{n \in \mathbb{N} : 16 < n \leq 44\}$. Misalkan C adalah himpunan sedemikian sehingga $C \subseteq A$ dan $C \subseteq B$. Berapa kardinalitas terbesar yang mungkin bagi C?

7. Misalkan $A = \{1, 4, 7, 12, 14\}$ dan $B = \{1, 4, 14\}$. Berapa banyak himpunan C yang memenuhi $C \subseteq A$ dan $B \subseteq C$?

8. Misalkan $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, dan $C = \{3, 6, 8\}$.

a. Tentukan $A \cap B$.

b. Tentukan $A \cup B$.

c. Tentukan $A \setminus B$.

d. Tentukan $A \cap \overline{(B \cup C)}$.

9. Misalkan $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x < 14\}$ dan $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ genap}\}$.

a. Tentukan $A \cap B$.

b. Tentukan $A \setminus B$.

10. Misalkan $A = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 13\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ genap}\}$, dan $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ganjil}\}$.

(a) Tentukan $A \cap B$.

(b) Tentukan $A \cup B$.

(c) Tentukan $B \cap C$.

(d) Tentukan $B \cup C$.

11. Berikan contoh himpunan A dan B sedemikian sehingga $A \cap B = \{3, 5\}$ dan $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 8\}$.

12. Berikan contoh himpunan A dan B sedemikian sehingga $A \subseteq B$ dan $A \in B$.

13. Ingat bahwa $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (himpunan bilangan bulat). Misalkan $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ adalah himpunan bilangan bulat positif. Misalkan $2\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat genap, $3\mathbb{Z}$ adalah himpunan kelipatan 3, dan seterusnya.

(a) Apakah $\mathbb{Z}^+ \subseteq 2\mathbb{Z}$? Jelaskan.

(b) Apakah $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}^+$? Jelaskan.

(c) Tentukan $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$. Deskripsikan himpunan tersebut dengan kata-kata dan dengan notasi himpunan.

(d) Nyatakan $\{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z}(x = 2y \vee x = 3y)\}$ sebagai gabungan atau irisan dua himpunan yang telah dideskripsikan dalam soal ini.

14. Ambil $\mathbb{Z}^+$ sebagai semesta. Misalkan A_2 adalah himpunan semua kelipatan 2 selain 2. Misalkan A_3 adalah himpunan semua kelipatan 3 selain 3. Demikian seterusnya, sehingga A_n adalah himpunan semua kelipatan n selain n, untuk setiap $n \geq 2$. Deskripsikan (dengan kata-kata) himpunan $\overline{A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots}$.

15. Gambarlah diagram Venn untuk merepresentasikan setiap himpunan berikut:

(a) $A \cup \overline{B}$

(b) $\overline{(A \cup B)}$

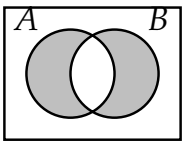
(c) $A \cap (B \cup C)$

(d) $(A \cap B) \cup C$

(e) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

(f) $(A \cup B) \setminus C$

16. Deskripsikan, dalam bentuk A dan B (dengan menggunakan notasi himpunan), suatu himpunan yang memiliki diagram Venn berikut:



17. Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$. Tentukan $\mathcal{P}(A)$.

18. Misalkan $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Berapa banyak himpunan bagian dari A yang memuat tepat satu anggota (yaitu, berapa banyak himpunan bagian tunggal)? Berapa banyak himpunan bagian yang memuat tepat dua anggota?

19. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tentukan semua himpunan $B \in \mathcal{P}(A)$ yang memenuhi sifat $\{2, 3, 5\} \subseteq B$.

20. Berikan contoh himpunan A dan B sedemikian sehingga $|A| = 4$, $|B| = 5$, dan $|A \cup B| = 9$.

21. Berikan contoh himpunan A dan B sedemikian sehingga $|A| = 3$, $|B| = 4$, dan $|A \cup B| = 5$.

22. Adakah himpunan A dan B sedemikian sehingga $|A| = |B|$, $|A \cup B| = 10$, dan $|A \cap B| = 5$? Jelaskan.

23. Misalkan $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Misalkan B adalah suatu himpunan dengan $|B| = 5$.

a. Berapakah nilai terkecil dan terbesar yang mungkin untuk $|A \cup B|$? Jelaskan.

b. Berapakah nilai terkecil dan terbesar yang mungkin untuk $|A \cap B|$? Jelaskan.

c. Berapakah nilai terkecil dan terbesar yang mungkin untuk $|A \times B|$? Jelaskan.

24. Misalkan $X = \{n \in \mathbb{N} : 10 \leq n < 20\}$. Berikan contoh himpunan dengan sifat-sifat berikut dan jelaskan dengan sangat singkat mengapa setiap contoh tersebut memenuhi syarat.

(a) Suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{N}$ dengan $|A| = 10$ sedemikian sehingga $X \setminus A = \{10, 12, 14\}$.

(b) Suatu himpunan $B \in \mathcal{P}(X)$ dengan $|B| = 5$.

(c) Suatu himpunan $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ dengan $|C| = 5$.

(d) Suatu himpunan $D \subseteq X \times X$ dengan $|D| = 5$

(e) Suatu himpunan $E \subseteq X$ sedemikian sehingga $|E| \in E$.

25. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan.

(a) Misalkan $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$. Apakah ini berarti bahwa $A \subseteq C$? Buktikan jawaban Anda. Petunjuk: Untuk membuktikan bahwa $A \subseteq C$, Anda harus membuktikan implikasi, "Untuk setiap x, jika $x \in A$, maka $x \in C$."

(b) Misalkan $A \in B$ dan $B \in C$. Apakah ini berarti bahwa $A \in C$? Berikan contoh untuk membuktikan bahwa hal ini TIDAK selalu terjadi (dan jelaskan mengapa contoh Anda memenuhi syarat). Anda semestinya dapat memberikan contoh dengan $|A| = |B| = |C| = 2$.

26. Dalam satu pak kartu remi standar terdapat 26 kartu merah dan 12 kartu bergambar. Dengan menggunakan himpunan dan pengetahuan Anda tentang kardinalitas, jelaskan mengapa hanya ada 32 kartu yang berwarna merah atau merupakan kartu bergambar.

27. Berikan contoh himpunan A dengan $|A| = 3$ yang hanya memuat himpunan-himpunan lain dan memiliki sifat berikut: Untuk setiap himpunan $B \in A$, berlaku pula $B \subseteq A$. Jelaskan mengapa contoh Anda memenuhi sifat tersebut. (Sebagai informasi: Himpunan yang memiliki sifat ini disebut **transitif**.)

28. Perhatikan himpunan A dan B, dengan $A = \{3, |B|\}$ dan $B = \{1, |A|, |B|\}$. Tentukan kedua himpunan tersebut.

29. Jelaskan mengapa tidak ada himpunan A yang memenuhi $A = \{2, |A|\}$.

30. Tentukan semua himpunan A, B, dan C yang memenuhi persamaan berikut.

$$\begin{aligned} A &= \{1, |B|, |C|\} \\ B &= \{2, |A|, |C|\} \\ C &= \{1, 2, |A|, |B|\} \end{aligned}$$

.

5.2 Fungsi

Bagian ini memuat banyak perincian tentang fungsi, yang sebagian besar seharusnya sudah dikenal dari konteks nondiskret. Saat membaca, pertimbangkan bagaimana cara kita membicarakan fungsi di sini mungkin berbeda dari yang Anda ketahui dari bidang matematika lainnya.

Fungsi adalah aturan yang memasangkan setiap masukan dengan tepat satu keluaran. Kita menyebut keluaran tersebut sebagai **citra** dari masukan. Himpunan semua masukan suatu fungsi disebut **domain**. Himpunan semua keluaran yang diperbolehkan disebut **kodomain**. Kita menulis $f : X \to Y$ untuk mendeskripsikan fungsi bernama f, dengan domain X dan kodomain Y. Namun, bentuk ini belum memberi tahu kita *fungsi mana* yang dinyatakan oleh f. Untuk mendefinisikan fungsi tersebut, kita harus mendeskripsikan aturannya. Hal ini sering dilakukan dengan memberikan rumus untuk menghitung keluaran dari setiap masukan (meskipun tentu saja ini bukan satu-satunya cara untuk mendeskripsikan aturan tersebut).

Sebagai contoh, perhatikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 3$. Di sini domain dan kodomainnya merupakan himpunan yang sama (bilangan asli). Aturannya: ambil masukan, kalikan dengan dirinya sendiri, lalu tambahkan 3. Aturan ini berlaku karena dapat kita terapkan pada setiap bilangan asli (setiap elemen domain), dan hasilnya selalu berupa bilangan asli (elemen kodomain). Namun, perhatikan bahwa tidak setiap bilangan asli benar-benar menjadi keluaran (tidak ada cara untuk memperoleh 0, 1, 2, 5, dan seterusnya). Himpunan bilangan asli yang *menjadi* keluaran disebut **daerah hasil** fungsi (dalam kasus ini, daerah hasilnya adalah $\{3, 4, 7, 12, 19, 28, \ldots\}$, yaitu semua bilangan asli yang nilainya 3 lebih besar daripada suatu kuadrat sempurna).

Hal utama yang menjadikan suatu aturan sebagai *fungsi* adalah bahwa setiap masukan memiliki *tepat satu* keluaran. Artinya, aturan tersebut harus terdefinisi dengan baik. Keluaran apa yang dipasangkan dengan masukan 7? Untuk suatu fungsi tertentu, hanya boleh ada satu jawaban.

Contoh 5.2.1

Berikut ini semuanya merupakan contoh fungsi:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $f(n) = 3n$. Domain dan kodomainnya sama-sama berupa himpunan bilangan bulat. Namun, daerah hasilnya hanya berupa himpunan kelipatan bulat dari 3.

2. $g : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ yang didefinisikan oleh $g(1) = c$, $g(2) = a$, dan $g(3) = a$. Domainnya adalah himpunan $\{1, 2, 3\}$, kodomainnya adalah himpunan $\{a, b, c\}$, dan daerah hasilnya adalah himpunan $\{a, c\}$. Perhatikan bahwa $g(2)$ dan $g(3)$ merupakan elemen kodomain yang sama. Hal ini tidak menjadi masalah karena setiap elemen domain tetap hanya memiliki satu keluaran.

3. $h : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh tabel berikut:

x	1	2	3	4
$h(x)$	3	6	9	12

Di sini domainnya adalah himpunan berhingga $\{1, 2, 3, 4\}$, sedangkan kodomainnya adalah himpunan bilangan asli, $\mathbb{N}$. Pada awalnya, Anda mungkin mengira fungsi ini sama dengan f yang didefinisikan di atas. Keduanya sama sekali tidak sama. Meskipun aturannya sama, domain dan kodomainnya berbeda, sehingga keduanya merupakan fungsi yang berbeda.

Contoh 5.2.2

Hanya karena suatu aturan dapat dideskripsikan dengan cara yang sama seperti ketika menulis fungsi, bukan berarti aturan tersebut merupakan fungsi. Berikut ini BUKAN fungsi.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh $f(n) = \frac{n}{2}$. Aturan ini bukan fungsi karena tidak setiap masukan memiliki keluaran. Ke mana f memetakan 3? Aturannya menyatakan bahwa $f(3) = \frac{3}{2}$, tetapi $\frac{3}{2}$ bukan elemen kodomain.

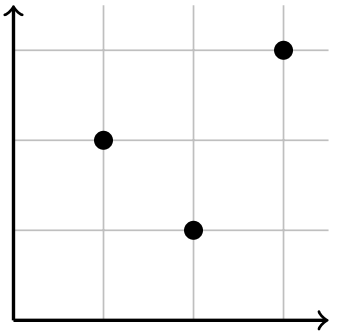
2. Perhatikan aturan yang memasangkan setiap orang dengan nomor teleponnya. Jika himpunan orang dipandang sebagai domain dan himpunan nomor telepon sebagai kodomain, aturan ini bukan fungsi karena sebagian orang memiliki dua nomor telepon. Menukar himpunan domain dan kodomain juga tidak menyelesaikan masalah karena beberapa nomor telepon dimiliki oleh lebih dari satu orang (dengan asumsi sebagian rumah tangga masih memiliki telepon rumah ketika Anda membaca ini).

5.2.1 Mendeskripsikan Fungsi

Kita perlu membedakan fungsi dari deskripsinya. Fungsi adalah objek matematika abstrak yang dalam arti tertentu tetap ada, baik dibicarakan oleh seseorang maupun tidak. Namun, ketika kita *ingin* membicarakan fungsi tersebut, kita memerlukan cara untuk mendeskripsikannya. Suatu fungsi tertentu dapat dideskripsikan dengan beberapa cara.

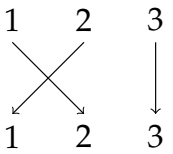
Beberapa buku kalkulus membahas *Aturan Empat*, yaitu bahwa setiap fungsi dapat dideskripsikan dengan empat cara: secara aljabar (rumus), secara numerik (tabel), secara grafis, atau dengan kata-kata. Dalam matematika diskret, kita tetap dapat menggunakan semua cara tersebut untuk mendeskripsikan fungsi, tetapi kita juga dapat lebih spesifik karena perhatian utama kita tertuju pada fungsi yang domainnya berupa $\mathbb{N}$ atau himpunan bagian berhingga dari $\mathbb{N}$.

Mendeskripsikan fungsi secara grafis biasanya berarti menggambar grafik fungsi tersebut, yaitu memplot titik-titik pada bidang. Kita dapat melakukannya dan mungkin memperoleh grafik seperti berikut untuk fungsi $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$.



Menghubungkan titik-titik tersebut atau mencoba menyesuaikannya dengan suatu kurva adalah tindakan yang sama sekali KELIRU. Domainnya hanya memiliki tiga elemen. Adanya kurva akan berarti bahwa domain memuat suatu interval bilangan real secara utuh.

Berikut cara lain untuk merepresentasikan fungsi yang sama:



Gambar ini menunjukkan bahwa fungsi f memetakan 1 ke 2, 2 ke 1, dan 3 ke 3: ikuti saja panahnya.

Diagram panah yang digunakan untuk mendefinisikan fungsi di atas dapat sangat membantu dalam memvisualisasikan fungsi. Kita akan sering bekerja dengan fungsi yang domainnya *berhingga*, sehingga gambar seperti ini sering lebih berguna daripada grafik fungsi tradisional.

Perhatikan bahwa untuk domain berhingga, sering kali tidak mungkin menemukan rumus aljabar yang memberikan keluaran bagi setiap masukan. Tentu saja, kita dapat menggunakan fungsi yang didefinisikan secara sepotong-sepotong, seperti

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{jika } x = 1 \\ x - 1 & \text{jika } x = 2 \\ x & \text{jika } x = 3 \end{cases}.$$

Bentuk ini mendeskripsikan fungsi yang persis sama dengan di atas, tetapi kita semua dapat sepakat bahwa cara tersebut tidak masuk akal.

Karena kita akan sangat sering menggunakan fungsi dengan domain dan kodomain kecil, mari kita gunakan suatu notasi untuk mendeskripsikannya. Kita hanya memerlukan cara yang jelas untuk menyatakan citra setiap elemen domain. Bahkan, tabel nilai dapat digunakan dengan sempurna:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	3	2	4	1

Kita menyederhanakannya lebih lanjut dengan menulisnya sebagai suatu "matriks", dengan setiap masukan tepat di atas keluarannya:

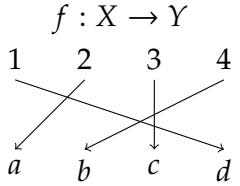
$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

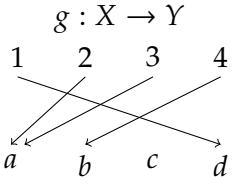
Perhatikan bahwa ini hanyalah notasi, bukan jenis matriks yang dijumpai dalam mata kuliah aljabar linear (misalnya, tidak masuk akal untuk melakukan operasi terhadap matriks-matriks ini atau mereduksi barisnya).

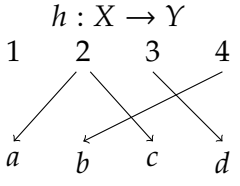
Salah satu kelebihan notasi dua baris dibandingkan diagram panah adalah bahwa dengan notasi dua baris, kita lebih sulit secara tidak sengaja mendefinisikan aturan yang bukan fungsi.

Contoh 5.2.3

Manakah di antara diagram berikut yang merepresentasikan fungsi? Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Y = \{a, b, c, d\}$.





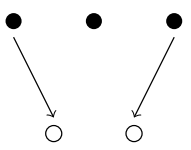


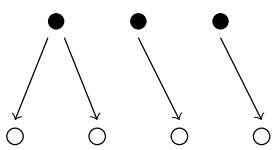
Penyelesaian. f merupakan fungsi. Demikian pula g. Tidak menjadi masalah jika suatu elemen kodomain bukan citra dari masukan mana pun, dan tidak menjadi masalah jika a dari kodomain merupakan citra dari 2 dan 3 dari domain. Dengan notasi dua baris, kita dapat menuliskan fungsi-fungsi ini sebagai

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & c & b \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & a & b \end{pmatrix}$$

.

Namun, h BUKAN fungsi. Bahkan, aturan ini gagal karena dua alasan. Pertama, elemen 1 dari domain tidak dipetakan ke elemen mana pun dari kodomain. Kedua, elemen 2 dari domain dipetakan ke lebih dari satu elemen kodomain (a dan c). Perhatikan bahwa salah satu saja dari kedua masalah ini sudah cukup untuk membuat suatu aturan bukan fungsi. Secara umum, kedua pemetaan berikut bukan fungsi:





Mungkin juga bermanfaat untuk memikirkan cara menulis notasi dua baris bagi h. Kita akan memperoleh bentuk seperti berikut:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & a, c? & d & b \end{pmatrix}.$$

Tidak ada apa pun di bawah 1 (buruk), dan kita perlu menempatkan lebih dari satu hal di bawah 2 (sangat buruk). Untuk aturan yang benar-benar merupakan fungsi, notasi dua baris selalu dapat "digunakan."

Kita juga akan mempelajari fungsi dengan domain $\mathbb{N}$. Dalam hal ini notasi dua baris tidak berguna, tetapi sering kali fungsi dapat dideskripsikan secara aljabar. Bahkan tabel agak kurang praktis karena tidak mendeskripsikan fungsi secara lengkap. Sebagai contoh, perhatikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang diberikan oleh tabel berikut.

x	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	...

Apakah nilai-nilai yang saya berikan sudah cukup bagi Anda untuk menentukan $f(6)$? Anda mungkin menduga bahwa $f(6) = 36$, tetapi tidak ada cara untuk *mengetahuinya* dengan pasti. Mungkin saja saya sedang bersikap usil dan sebenarnya menetapkan $f(6) = 42$. Bahkan, untuk setiap bilangan asli n, terdapat fungsi yang sesuai dengan tabel di atas, tetapi memenuhi $f(6) = n$.

Baiklah, anggaplah saya memang menetapkan $f(6) = 36$ dan aturan yang Anda duga mengatur fungsi tersebut memang benar-benar aturannya. Jika demikian, saya harus menyatakan aturan itu. $f(n) = n^2$. Sekarang tidak ada lagi kemungkinan salah tafsir.

Memberikan rumus eksplisit yang menghitung citra setiap elemen domain merupakan cara yang sangat baik untuk mendeskripsikan fungsi. Kita akan menyebut aturan eksplisit seperti ini sebagai **rumus tertutup** bagi fungsi tersebut.

Ada cara lain yang sangat berguna untuk mendeskripsikan fungsi berdomain $\mathbb{N}$, yang secara khusus memanfaatkan struktur bilangan asli. Kita dapat mendefinisikan fungsi secara *rekursif*!

Contoh 5.2.4

Perhatikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang diberikan oleh $f(0) = 0$ dan $f(n + 1) = f(n) + 2n + 1$. Tentukan $f(6)$.

Penyelesaian. Aturan tersebut menyatakan bahwa $f(6) = f(5) + 11$ (kita menggunakan $6 = n+1$, sehingga $n = 5$). Namun, kita belum mengetahui nilai $f(5)$. Nah, kita tahu bahwa $f(5) = f(4) + 9$. Jadi, kita perlu menghitung $f(4)$, yang mengharuskan kita mengetahui $f(3)$, yang selanjutnya mengharuskan kita mengetahui $f(2)$,... apakah proses ini akan berakhir?

Ya! Proses ini selalu berakhir karena domain kita adalah $\mathbb{N}$, yang memiliki

elemen terkecil. Selain itu, nilai $f(0)$ diberikan secara eksplisit, sehingga semuanya dapat dihitung. Kita dapat memilih untuk menghitung naik sampai $f(6)$, alih-alih menghitung turun dari $f(6)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + 1 = & 0 + 1 &= 1 \\ f(2) &= f(1) + 3 = & 1 + 3 &= 4 \\ f(3) &= f(2) + 5 = & 4 + 5 &= 9 \\ f(4) &= f(3) + 7 = & 9 + 7 &= 16 \\ f(5) &= f(4) + 9 = & 16 + 9 &= 25 \\ f(6) &= f(5) + 11 = & 25 + 11 &= 36 \end{aligned}$$

Tampaknya fungsi yang didefinisikan secara rekursif ini sama dengan fungsi yang didefinisikan secara eksplisit oleh $f(n) = n^2$. Benarkah demikian? Nanti kita akan membuktikannya.

Fungsi yang didefinisikan secara rekursif sering lebih mudah dibentuk dari masalah "dunia nyata" karena fungsi tersebut mendeskripsikan bagaimana nilai-nilainya berubah. Namun, kemudahan ini ada harganya. Citra suatu masukan tunggal lebih sulit dihitung karena Anda perlu mengetahui citra elemen-elemen lain (yang mendahuluinya) dalam domain.

Fungsi yang Didefinisikan secara Rekursif.

Untuk fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, suatu **definisi rekursif** terdiri atas **syarat awal** beserta **relasi rekurensi**. Syarat awal adalah nilai $f(0)$ yang diberikan secara eksplisit. Relasi rekurensi adalah rumus untuk $f(n+1)$ dalam hal $f(n)$ (dan mungkin juga n itu sendiri).

Contoh 5.2.5

Berikan definisi rekursif bagi fungsi-fungsi yang dideskripsikan berikut.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ memberikan banyaknya siput dalam terarium Anda n tahun setelah terarium tersebut dibuat, dengan asumsi Anda memulai dengan 3 siput dan banyaknya siput berlipat dua setiap tahun.

2. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ memberikan banyaknya push-up yang Anda lakukan n hari setelah memulai tantangan push-up, dengan asumsi Anda mampu melakukan 7 push-up pada hari ke-0 dan setiap hari mampu melakukan 2 push-up lebih banyak daripada hari sebelumnya.

3. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh $h(n) = n!$. Ingat bahwa $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$ adalah hasil kali semua bilangan dari 1 sampai n. Kita juga mendefinisikan $0! = 1$.

Penyelesaian.

1. Syarat awalnya adalah $f(0) = 3$. Untuk memperoleh $f(n+1)$, kita melipatduakan banyaknya siput dalam terarium pada tahun sebelumnya, yang diberikan oleh $f(n)$. Jadi, $f(n+1) = 2f(n)$. Definisi rekursif lengkap memuat kedua hal tersebut dan ditulis sebagai

$$f(0) = 3;\ f(n+1) = 2f(n).$$

2. Diketahui bahwa pada hari ke-0 Anda mampu melakukan 7 push-up, sehingga $g(0) = 7$. Banyaknya push-up yang mampu Anda lakukan pada hari ke-$n+1$ adalah 2 lebih banyak daripada pada hari ke-n, yang diberikan oleh $g(n)$. Jadi,

$$g(0) = 7;\ g(n+1) = g(n) + 2.$$

3. Di sini $h(0) = 1$. Untuk memperoleh relasi rekurensinya, pikirkan cara mendapatkan $h(n+1) = (n+1)!$ dari $h(n) = n!$. Jika keduanya dituliskan sebagai hasil kali, terlihat bahwa $(n+1)!$ sama seperti $n!$, hanya saja hasil kalinya memiliki satu faktor tambahan, yaitu $n+1$. Jadi, kita memperoleh

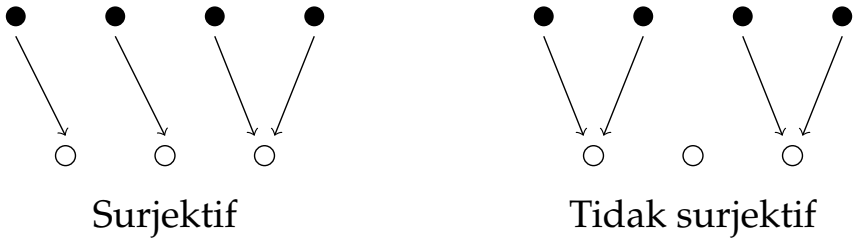
$$h(0) = 1;\ h(n+1) = (n+1) \cdot h(n).$$

5.2.2 Surjeksi, Injeksi, dan Bijeksi

Sekarang kita beralih untuk menyelidiki sifat-sifat khusus yang mungkin dimiliki atau tidak dimiliki suatu fungsi.

Dalam contoh-contoh di atas, Anda mungkin memperhatikan bahwa kadang-kadang terdapat elemen kodomain yang tidak termasuk dalam daerah hasil. Ketika hal semacam ini *tidak* terjadi (yaitu ketika semua elemen kodomain termasuk dalam daerah hasil), kita mengatakan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi **pada** atau bahwa fungsi tersebut memetakan domain *pada* kodomain. Istilah ini seharusnya masuk akal: fungsi tersebut menempatkan seluruh domain pada kodomain. Istilah matematis bagi fungsi pada adalah **surjeksi**, dan fungsi pada disebut fungsi **surjektif**.

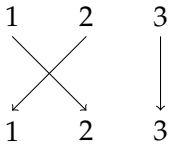
Dalam gambar:



Contoh 5.2.6

Fungsi manakah yang surjektif (yaitu, pada)?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $f(n) = 3n$.
2. $g : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ yang didefinisikan oleh $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & a \end{pmatrix}$.
3. $h : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

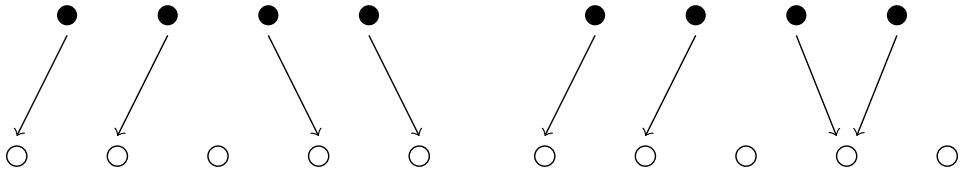


Penyelesaian.

1. f tidak surjektif. Terdapat elemen kodomain yang tidak termasuk dalam daerah hasil. Sebagai contoh, tidak ada $n \in \mathbb{Z}$ yang dipetakan ke bilangan 1 (menurut aturan tersebut, $\frac{1}{3}$ akan dipetakan ke 1, tetapi $\frac{1}{3}$ tidak termasuk dalam domain). Bahkan, daerah hasil fungsi tersebut adalah $3\mathbb{Z}$ (kelipatan bulat dari 3), yang tidak sama dengan $\mathbb{Z}$.
2. g tidak surjektif. Tidak ada $x \in \{1,2,3\}$ (domain) yang memenuhi $g(x) = b$, sehingga b, yang termasuk dalam kodomain, tidak termasuk dalam daerah hasil. Perhatikan bahwa terdapat elemen kodomain yang "hilang" dari baris bawah matriks.
3. h surjektif. Setiap elemen kodomain juga termasuk dalam daerah hasil. Tidak ada elemen kodomain yang terlewat.

Agar menjadi fungsi, suatu aturan tidak boleh memasangkan satu elemen domain dengan dua atau lebih elemen kodomain yang berbeda. Namun, kita telah melihat bahwa kebalikannya *diperbolehkan*: suatu fungsi dapat memasangkan elemen kodomain yang sama dengan dua atau lebih elemen domain yang berbeda. Ketika hal ini *tidak* terjadi (yaitu ketika setiap elemen kodomain merupakan citra dari paling banyak satu elemen domain), kita mengatakan bahwa fungsi tersebut **satu-satu**. Sekali lagi, istilah ini masuk akal: setiap elemen kodomain merupakan citra dari paling banyak satu elemen domain. Dengan kata lain, paling banyak satu masukan untuk setiap keluaran. Istilah matematis bagi fungsi satu-satu adalah **injeksi**. Fungsi satu-satu disebut fungsi **injektif**.

Dalam gambar:

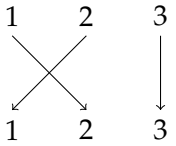


Injektif Tidak injektif

Contoh 5.2.7

Fungsi manakah yang injektif (yaitu, satu-satu)?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $f(n) = 3n$.
2. $g : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ yang didefinisikan oleh $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & a \end{pmatrix}$.
3. $h : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:



Penyelesaian.

1. f injektif. Setiap elemen kodomain merupakan citra dari *paling banyak* satu elemen domain. Jika x merupakan kelipatan tiga, hanya $x/3$ yang dipetakan ke x. Jika x bukan kelipatan 3, tidak ada masukan yang bersesuaian dengan keluaran x.
2. g tidak injektif. Kedua masukan 2 dan 3 dipasangkan dengan keluaran a. Perhatikan bahwa terdapat elemen kodomain yang muncul lebih dari sekali pada baris bawah matriks.
3. h injektif. Setiap keluaran hanya muncul satu kali.

Berhati-hatilah: "surjektif" dan "injektif" BUKAN sifat yang berlawanan. Dari kedua contoh di atas, Anda dapat melihat bahwa ada fungsi yang surjektif tetapi tidak injektif, injektif tetapi tidak surjektif, keduanya sekaligus, atau bukan keduanya. Jika suatu fungsi sekaligus satu-satu dan pada (merupakan injeksi dan surjeksi), kita mengatakan bahwa fungsi tersebut merupakan **bijeksi**, atau bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi **bijektif**.

Untuk menggambarkan perbedaan antara kedua sifat ini, perhatikan definisi yang lebih formal bagi masing-masing sifat secara berdampingan.

Injektif vs. Surjektif.

Suatu fungsi bersifat **injektif** jika setiap elemen kodomain merupakan citra dari *paling banyak* satu elemen domain.

Suatu fungsi bersifat **surjektif** jika setiap elemen kodomain merupakan citra dari *paling sedikit* satu elemen domain.

Perhatikan bahwa kedua sifat tersebut ditentukan oleh apa yang terjadi pada elemen-elemen kodomain: elemen tersebut dapat muncul berulang kali sebagai citra, atau dapat "terlewat" (tidak menjadi citra). Fungsi injektif tidak memiliki pengulangan, tetapi mungkin melewatkan elemen atau mungkin juga tidak. Fungsi surjektif tidak melewatkan elemen, tetapi mungkin memiliki pengulangan atau mungkin juga tidak. Fungsi bijektif adalah fungsi yang tidak memiliki pengulangan dan tidak melewatkan elemen.

5.2.3 Citra dan Citra Invers

Ketika membahas fungsi, kita memiliki notasi untuk membicarakan suatu elemen domain (misalkan x) dan elemen kodomain yang bersesuaian dengannya (kita menulis $f(x)$, yang *merupakan* citra dari x). Kadang-kadang kita ingin membicarakan semua elemen yang merupakan citra dari suatu himpunan bagian domain. Akan berguna pula jika kita dapat memulai dari suatu elemen kodomain (misalkan y) dan membicarakan elemen mana saja dari domain (jika ada) yang memiliki elemen tersebut sebagai citra. Kita dapat menulis "semua x dalam domain yang memenuhi $f(x) = y$," tetapi ungkapan ini cukup panjang. Berikut suatu notasi yang memudahkan kita.

Untuk menangani situasi pertama, kita memerlukan cara untuk mendeskripsikan *himpunan* citra dari elemen-elemen dalam suatu himpunan bagian domain. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi dan $A \subseteq X$ merupakan suatu himpunan bagian domain (mungkin seluruh domain). Kita akan menggunakan notasi $f(A)$ untuk menyatakan **citra** A **oleh** f, yaitu himpunan elemen dalam Y yang merupakan citra dari elemen-elemen dalam A. Dengan kata lain, $f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\}$.

Kita juga dapat bergerak ke arah sebaliknya. Kita dapat menanyakan elemen-elemen domain mana yang dipetakan ke suatu himpunan tertentu dalam kodomain. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi dan $B \subseteq Y$ merupakan himpunan bagian kodomain. Kita akan menulis $f^{-1}(B)$ untuk **citra invers** B **oleh** f, yaitu himpunan elemen dalam X yang citranya merupakan elemen dalam B. Dengan kata lain, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Kita sering tertarik pada elemen-elemen yang citranya merupakan suatu elemen tertentu y dalam kodomain. Notasi di atas dapat digunakan: $f^{-1}(\{y\})$ adalah himpunan semua elemen domain yang dipetakan oleh f ke y. Masuk akal untuk memandangnya sebagai himpunan: mungkin tidak ada apa pun yang dipetakan ke y (jika y tidak termasuk dalam daerah hasil), sehingga $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Atau, f mungkin memetakan beberapa elemen ke y (jika f tidak injektif). Untuk memudahkan penulisan, biasanya kita menghilangkan kurung kurawal himpunan di sekitar y dan

menulis $f^{-1}(y)$ untuk himpunan tersebut.

PERINGATAN: $f^{-1}(y)$ bukan fungsi invers! Fungsi invers hanya ada bagi bijeksi, tetapi $f^{-1}(y)$ terdefinisi bagi sembarang fungsi f. Intinya: $f^{-1}(y)$ merupakan *himpunan*, bukan *elemen* domain. Bentuk ini hanyalah notasi ringkas untuk $f^{-1}(\{y\})$. Untuk memperjelas perbedaan tersebut, kita menyebut $f^{-1}(y)$ sebagai **citra invers lengkap** y **oleh** f. Bentuk itu bukan citra y oleh f^{-1} (karena fungsi f^{-1} mungkin tidak ada).

Contoh 5.2.8

Perhatikan fungsi $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{a,b,c,d\}$ yang diberikan oleh

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & a & b & b & b & c \end{pmatrix}.$$

Tentukan $f(\{1,2,3\})$, $f^{-1}(\{a,b\})$, dan $f^{-1}(d)$.

Penyelesaian. $f(\{1,2,3\}) = \{a,b\}$ karena a dan b merupakan elemen kodomain yang dituju oleh f ketika memetakan 1, 2, dan 3.

$f^{-1}(\{a,b\}) = \{1,2,3,4,5\}$ karena tepat elemen-elemen inilah yang dipetakan oleh f ke a dan b.

$f^{-1}(d) = \emptyset$ karena d tidak termasuk dalam daerah hasil f.

Contoh 5.2.9

Perhatikan fungsi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $g(n) = n^2 + 1$. Tentukan $g(1)$ dan $g(\{1\})$. Kemudian tentukan $g^{-1}(1)$, $g^{-1}(2)$, dan $g^{-1}(3)$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa $g(1) \neq g(\{1\})$. Yang pertama merupakan elemen: $g(1) = 2$. Yang kedua merupakan himpunan: $g(\{1\}) = \{2\}$.

Untuk menentukan $g^{-1}(1)$, kita perlu mencari semua bilangan bulat n yang memenuhi $n^2 + 1 = 1$. Jelas bahwa hanya 0 yang memenuhi, sehingga $g^{-1}(1) = \{0\}$ (perhatikan bahwa meskipun hanya terdapat satu elemen, kita tetap menuliskannya sebagai himpunan yang memuat satu elemen).

Untuk menentukan $g^{-1}(2)$, kita perlu mencari semua n yang memenuhi $n^2 + 1 = 2$. Kita memperoleh $g^{-1}(2) = \{-1, 1\}$.

Terakhir, jika $n^2 + 1 = 3$, kita mencari n yang memenuhi $n^2 = 2$. Tidak ada bilangan bulat semacam itu, sehingga $g^{-1}(3) = \emptyset$.

Karena $f^{-1}(y)$ merupakan himpunan, masuk akal untuk menanyakan $\left|f^{-1}(y)\right|$, yaitu banyaknya elemen domain yang dipetakan ke y.

Contoh 5.2.10

Tentukan fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi $\left|f^{-1}(7)\right| = 5$.

Penyelesaian. Hanya ada satu fungsi semacam itu. Kita memerlukan lima elemen domain yang dipetakan ke bilangan $7 \in \mathbb{N}$. Karena domain hanya memiliki lima elemen, semuanya harus dipetakan ke 7. Jadi,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

.

Definisi Fungsi. Berikut rangkuman semua konsep dan definisi utama yang kita gunakan ketika bekerja dengan fungsi.

- **Fungsi** adalah aturan yang memasangkan setiap elemen suatu himpunan, yang disebut **domain**, dengan tepat satu elemen himpunan kedua, yang disebut **kodomain**.
- Notasi: $f : X \to Y$ merupakan cara kita menyatakan bahwa fungsi tersebut bernama f, domainnya adalah himpunan X, dan kodomainnya adalah himpunan Y.
- Untuk menetapkan aturan bagi fungsi dengan domain kecil, gunakan **notasi dua baris** dengan menulis matriks yang menempatkan setiap keluaran tepat di bawah masukan yang bersesuaian, seperti berikut:

  $$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  .
- $f(x) = y$ berarti bahwa elemen x dalam domain (masukan) dipasangkan dengan elemen y dalam kodomain. Kita mengatakan bahwa y merupakan keluaran. Sebagai alternatif, kita menyebut y sebagai **citra** x **oleh** f .
- **Daerah hasil** merupakan himpunan bagian dari kodomain. Daerah hasil adalah himpunan semua elemen yang menjadi citra dari paling sedikit satu elemen domain. Dengan kata lain, daerah hasil adalah himpunan semua keluaran.
- Suatu fungsi bersifat **injektif** (merupakan **injeksi** atau fungsi **satu-satu**) jika setiap elemen kodomain merupakan citra dari **paling banyak** satu elemen domain.
- Suatu fungsi bersifat **surjektif** (merupakan **surjeksi** atau fungsi **pada**) jika setiap elemen kodomain merupakan citra dari **paling sedikit** satu elemen domain.

- **Bijeksi** adalah fungsi yang sekaligus merupakan injeksi dan surjeksi. Dengan kata lain, setiap elemen kodomain merupakan citra dari **tepat satu** elemen domain.
- **Citra** suatu elemen x dalam domain adalah elemen y dalam kodomain yang menjadi tujuan pemetaan x. Dengan kata lain, citra x oleh f adalah $f(x)$.
- **Citra invers lengkap** suatu elemen y dalam kodomain, yang ditulis $f^{-1}(y)$, adalah *himpunan* semua elemen domain yang dipetakan oleh fungsi ke y.
- **Citra** suatu himpunan bagian A dari domain adalah himpunan $f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\}$.
- **Citra invers** suatu himpunan bagian B dari kodomain adalah himpunan $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Pertanyaan Bacaan

1. Jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri hubungan antara kodomain suatu fungsi dan daerah hasil fungsi tersebut.

2. Jika suatu fungsi memiliki domain dan kodomain yang sama besar, apakah fungsi tersebut harus *surjektif*? Apakah harus *injektif*? Mungkinkah hanya salah satu sifat tersebut yang terpenuhi? Jelaskan secara singkat pemikiran Anda.

3. Pertanyaan apa yang Anda miliki? Tuliskan sedikitnya satu pertanyaan tentang isi bagian ini yang mungkin membuat Anda atau teman sekelas penasaran setelah membacanya.

5.2.4 Latihan

1. Perhatikan fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang diberikan oleh

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Tentukan $f(4)$. _____

b. Tentukan suatu n dalam domain sehingga $f(n) = 4$. _____

c. Tentukan suatu anggota n dari domain sehingga $f(n) = n$. _____

d. Tentukan suatu anggota kodomain yang tidak berada dalam daerah hasil. _____

2. Semua fungsi berikut memiliki $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sebagai domain sekaligus kodomain. Untuk setiap fungsi, tentukan apakah fungsi tersebut hanya injektif, hanya surjektif, bijektif, atau bukan injektif maupun surjektif.

(a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x < 3 \\ x - 2 & \text{jika } x \geq 3 \end{cases}$

(c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{jika } x < 3 \\ x & \text{jika } x \geq 3 \end{cases}$

3. Perhatikan fungsi-fungsi berikut $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3\}$. Untuk setiap fungsi, tentukan apakah fungsi tersebut hanya injektif, hanya surjektif, bijektif, atau bukan injektif maupun surjektif.

(a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x < 4 \\ 6 - x & \text{jika } x \geq 4 \end{cases}$

(c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Perhatikan fungsi-fungsi berikut $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Untuk setiap fungsi, tentukan apakah fungsi tersebut hanya injektif, hanya surjektif, bijektif, atau bukan injektif maupun surjektif.

(a) $f(x) = 6 - x$

(b) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. Tuliskan semua fungsi $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b\}$ (dengan notasi dua baris).
Ada berapa banyak fungsi?
Berapa banyak yang surjektif?
Berapa banyak yang injektif?
Berapa banyak yang bijektif?

6. Tuliskan semua fungsi $f : \{1, 2\} \to \{a, b, c, d\}$ (dalam notasi dua baris).
Ada berapa banyak fungsi?
Berapa banyak yang surjektif?
Berapa banyak yang injektif?

Berapa banyak yang bijektif?

7. Perhatikan fungsi $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\}$ yang diberikan oleh tabel berikut:

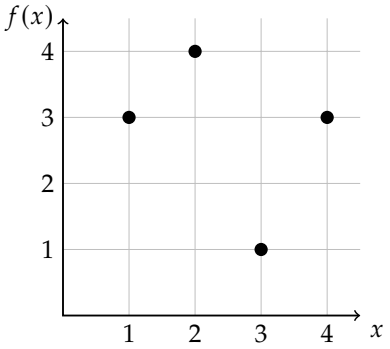
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	2	4	1	2

(a) Apakah f injektif? Jelaskan.

(b) Apakah f surjektif? Jelaskan.

(c) Tuliskan fungsi tersebut menggunakan notasi dua baris.

8. Perhatikan fungsi $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ yang diberikan oleh grafik berikut.



(a) Apakah f injektif? Jelaskan.

(b) Apakah f surjektif? Jelaskan.

(c) Tuliskan fungsi tersebut menggunakan notasi dua baris.

9. Perhatikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang diberikan secara *rekursif* oleh

$$f(0) = 1 \text{ dan } f(n+1) = 3 \cdot f(n).$$

Tentukan $f(12)$.

10. Misalkan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ memenuhi relasi rekurensi

$$f(n+1) = f(n) + 6.$$

Perhatikan bahwa informasi ini belum cukup untuk mendefinisikan fungsi karena kita tidak memiliki syarat awal. Untuk setiap syarat awal berikut, tentukan nilai $f(7)$.

a. Jika $f(0) = 1$.

b. $f(0) = 7$.

c. $f(0) = 17$.

d. $f(0) = 155$.

11. Misalkan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ memenuhi relasi rekurensi

$$f(n+1) = \begin{cases} \frac{f(n)}{2} & \text{jika } f(n) \text{ genap} \\ 3f(n)+1 & \text{jika } f(n) \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Perhatikan bahwa dengan syarat awal $f(0) = 1$, nilai-nilai fungsi tersebut adalah: $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$, $f(4) = 4$, dan seterusnya, dengan citra yang berulang melalui ketiga bilangan tersebut. Jadi, f TIDAK injektif (dan tentu juga tidak surjektif). Mungkinkah fungsi ini injektif dengan syarat awal lain?[1]

(a) Jika f memenuhi syarat awal $f(0) = 5$, apakah f injektif? Jelaskan alasannya atau berikan contoh khusus dua elemen domain yang memiliki citra yang sama.

(b) Jika f memenuhi syarat awal $f(0) = 3$, apakah f injektif? Jelaskan alasannya atau berikan contoh khusus dua elemen domain yang memiliki citra yang sama.

(c) Jika f memenuhi syarat awal $f(0) = 27$, ternyata $f(105) = 10$ dan tidak ada dua bilangan yang kurang dari 105 yang memiliki citra sama. Mungkinkah f injektif? Jelaskan.

(d) Buktikan bahwa apa pun syarat awal yang dipilih, fungsi tersebut tidak mungkin surjektif.

12. Untuk setiap fungsi berikut, tentukan apakah fungsi tersebut injektif dan apakah fungsi tersebut surjektif.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang diberikan oleh $f(n) = n + 4$.

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang diberikan oleh $f(n) = n + 4$.

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang diberikan oleh $f(n) = 5n - 8$.

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang diberikan oleh $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{jika } n \text{ genap} \\ (n+1)/2 & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$

13. Misalkan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Perhatikan fungsi $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{N}$ yang diberikan oleh $f(B) = |B|$. Artinya, f menerima suatu himpunan bagian dari A sebagai masukan dan menghasilkan kardinalitas himpunan tersebut.

(a) Apakah f injektif? Buktikan jawaban Anda.

(b) Apakah f surjektif? Buktikan jawaban Anda.

[1]Ternyata pertanyaan ini *sangat* sulit dijawab secara umum. *Konjektur Collatz* menyatakan bahwa untuk setiap syarat awal positif, fungsi pada akhirnya akan menghasilkan 1 sebagai keluaran. Ini merupakan masalah terbuka dalam matematika: belum ada yang mengetahui jawabannya.

(c) Tentukan $f^{-1}(1)$.

(d) Tentukan $f^{-1}(0)$.

(e) Tentukan $f^{-1}(12)$.

14. Misalkan $X = \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq 999\}$ merupakan himpunan semua bilangan yang memiliki paling banyak tiga digit. Definisikan fungsi $f : X \to \mathbb{N}$ dengan $f(abc) = a + b + c$, dengan a, b, dan c sebagai digit-digit bilangan dalam X (tuliskan bilangan yang kurang dari 100 dengan nol di depan agar memiliki tiga digit). Dengan kata lain, f menghasilkan jumlah digit-digit masukannya. Sebagai contoh, $f(253) = 2 + 5 + 3 = 10$.

(a) Misalkan $A = \{n \in X : 306 \leq n \leq 323\}$. Tentukan $f(A)$.

(b) Tentukan $f^{-1}(\{1, 3\})$.

(c) Tentukan $f^{-1}(2)$.

(d) Tentukan $f^{-1}(139)$.

15. Perhatikan himpunan $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, yaitu himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan a dan b sebagai bilangan asli. Perhatikan fungsi $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ yang diberikan oleh $f((a, b)) = a + b$.

(a) Misalkan $A = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a, b \leq 10\}$. Tentukan $f(A)$.

(b) Tentukan $f^{-1}(3)$ dan $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$.

(c) Berikan deskripsi geometris bagi $f^{-1}(n)$ dan $f^{-1}(\{0, 1, \ldots, n\})$ untuk sembarang $n \geq 1$.

(d) Tentukan $\left|f^{-1}(8)\right|$ dan $\left|f^{-1}(\{0, 1, \ldots, 8\})\right|$.

16. Misalkan $f : X \to Y$ adalah suatu fungsi. Misalkan $3 \in Y$. Apa yang dapat Anda katakan tentang $f^{-1}(3)$ jika diketahui bahwa

(a) f injektif? Jelaskan.

(b) f surjektif? Jelaskan.

(c) f bijektif? Jelaskan.

17. Tentukan himpunan X dan fungsi $f : X \to \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) = X$.

18. Apa yang dapat Anda simpulkan tentang himpunan X dan Y jika diketahui bahwa

(a) terdapat fungsi injektif $f : X \to Y$? Jelaskan.

(b) terdapat fungsi surjektif $f : X \to Y$? Jelaskan.

(c) terdapat fungsi bijektif $f : X \to Y$? Jelaskan.

19. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi. Manakah di antara keadaan berikut yang mungkin? Jelaskan.

(a) f injektif tetapi tidak surjektif.

(b) f surjektif tetapi tidak injektif.

(c) $|X| = |Y|$ dan f injektif tetapi tidak surjektif.

(d) $|X| = |Y|$ dan f surjektif tetapi tidak injektif.

(e) $|X| = |Y|$, X dan Y berhingga, serta f injektif tetapi tidak surjektif.

(f) $|X| = |Y|$, X dan Y berhingga, serta f surjektif tetapi tidak injektif.

20. Misalkan $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah fungsi. Kita dapat mendefinisikan **komposisi** dari f dan g sebagai fungsi $g \circ f : X \to Z$ dengan citra setiap $x \in X$ diberikan oleh $g(f(x))$. Artinya, masukkan x ke dalam f, lalu masukkan hasilnya ke dalam g (sama seperti komposisi dalam aljabar dan kalkulus).

(a) Jika f dan g keduanya injektif, apakah $g \circ f$ harus injektif? Jelaskan.

(b) Jika f dan g keduanya surjektif, apakah $g \circ f$ harus surjektif? Jelaskan.

(c) Misalkan $g \circ f$ injektif. Apa yang dapat Anda katakan, jika ada, tentang f dan g? Jelaskan.

(d) Misalkan $g \circ f$ surjektif. Apa yang dapat Anda katakan, jika ada, tentang f dan g? Jelaskan.

21. Perhatikan fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang diberikan oleh $f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{jika } n \text{ genap} \\ n-3 & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$

(a) Apakah f injektif? Buktikan jawaban Anda.

(b) Apakah f surjektif? Buktikan jawaban Anda.

22. Pada akhir semester, seorang pengajar memberikan nilai huruf kepada setiap mahasiswanya. Apakah hal ini merupakan fungsi? Jika ya, himpunan apa yang menjadi domain dan kodomainnya, dan apakah fungsi tersebut injektif, surjektif, bijektif, atau tidak satu pun di antaranya?

23. Dalam permainan *Hearts*, masing-masing dari empat pemain menerima 13 kartu dari setumpuk 52 kartu. Apakah pembagian ini merupakan fungsi? Jika ya, himpunan apa yang menjadi domain dan kodomainnya, dan apakah fungsi tersebut injektif, surjektif, bijektif, atau tidak satu pun di antaranya?

24. Tujuh pemain sedang bermain stud lima kartu. Setiap pemain mula-mula menerima 5 kartu dari setumpuk 52 kartu. Apakah pembagian ini merupakan fungsi? Jika ya, himpunan apa yang menjadi domain dan kodomainnya, dan apakah fungsi tersebut injektif, surjektif, bijektif, atau tidak satu pun di

antaranya?

25. Perhatikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memberikan banyaknya jabat tangan yang terjadi di sebuah ruangan berisi n orang, dengan asumsi setiap orang berjabat tangan dengan setiap orang lainnya. Berikan definisi rekursif bagi fungsi tersebut.

26. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi dan $A \subseteq X$ merupakan himpunan bagian berhingga dari domain. Apa yang dapat Anda katakan tentang hubungan antara $|A|$ dan $\left|f(A)\right|$? Perhatikan kasus umum dan apa yang terjadi ketika diketahui bahwa f injektif, surjektif, atau bijektif.

27. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi dan $B \subseteq Y$ merupakan himpunan bagian berhingga dari kodomain. Apa yang dapat Anda katakan tentang hubungan antara $|B|$ dan $\left|f^{-1}(B)\right|$? Perhatikan kasus umum dan apa yang terjadi ketika diketahui bahwa f injektif, surjektif, atau bijektif.

28. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi, $A \subseteq X$, dan $B \subseteq Y$.

(a) Apakah $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$? Selalu, kadang-kadang, atau tidak pernah? Jelaskan.

(b) Apakah $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$? Selalu, kadang-kadang, atau tidak pernah? Jelaskan.

(c) Jika salah satu atau kedua kesamaan di atas tidak selalu berlaku, adakah hal lain yang dapat Anda nyatakan? Apakah kesamaan selalu berlaku bagi jenis fungsi tertentu? Adakah hubungan selain kesamaan yang selalu berlaku? Selidikilah.

29. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi dan $A, B \subseteq X$ merupakan himpunan-himpunan bagian dari domain.

(a) Apakah $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$? Selalu, kadang-kadang, atau tidak pernah? Jelaskan.

(b) Apakah $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? Selalu, kadang-kadang, atau tidak pernah? Jelaskan.

30. Misalkan $f : X \to Y$ adalah fungsi dan $A, B \subseteq Y$ merupakan himpunan-himpunan bagian dari kodomain.

(a) Apakah $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$? Selalu, kadang-kadang, atau tidak pernah? Jelaskan.

(b) Apakah $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$? Selalu, kadang-kadang, atau tidak pernah? Jelaskan.

Topik Tambahan

6.1 Fungsi Pembangkit

Dalam matematika diskret terdapat sebuah alat yang sangat ampuh untuk memanipulasi barisan, yang disebut fungsi pembangkit. Gagasannya adalah sebagai berikut: alih-alih menggunakan suatu barisan tak hingga (misalnya, $2, 3, 5, 8, 12, \ldots$) kita meninjau satu fungsi yang menyandikan barisan tersebut. Namun, fungsi ini bukanlah fungsi yang menghasilkan suku ke-n sebagai keluarannya. Sebaliknya, deret pangkat fungsi tersebut (seperti yang dijumpai dalam kalkulus) "menampilkan" suku-suku barisan. Sebagai contoh, kita akan meninjau deret pangkat $2 + 3x + 5x^2 + 8x^3 + 12x^4 + \cdots$, yang menampilkan barisan $2, 3, 5, 8, 12, \ldots$ sebagai koefisiennya.

Deret pangkat tak hingga hanyalah jumlah tak hingga dari suku-suku berbentuk $c_n x^n$, dengan c_n suatu konstanta. Jadi, kita dapat menuliskan deret pangkat seperti ini:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Atau, jika dijabarkan, seperti ini:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots.$$

Dalam konteks fungsi pembangkit, deret pangkat semacam ini disebut *deret pembangkit*. Deret pembangkit tersebut membangkitkan barisan

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots.$$

Dengan kata lain, barisan yang dibangkitkan oleh suatu deret pembangkit hanyalah barisan *koefisien* dari deret pangkat formal tersebut.

Contoh 6.1.1

Barisan apakah yang direpresentasikan oleh deret pembangkit $3 + 8x^2 + x^3 + \frac{x^5}{7} + 100x^6 + \cdots$?

Penyelesaian. Kita cukup membaca koefisien setiap suku x^n. Jadi, $a_0 = 3$ karena koefisien x^0 adalah 3 ($x^0 = 1$, sehingga ini merupakan suku konstan). Berapakah a_1? Nilainya BUKAN 8 karena 8 merupakan koefisien x^2; dengan demikian, 8 adalah suku a_2 pada barisan tersebut. Untuk menemukan a_1, kita perlu mencari koefisien x^1, yang dalam kasus ini bernilai 0. Jadi, $a_1 = 0$. Dengan melanjutkan cara ini, kita memperoleh $a_2 = 8$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$, dan

$a_5 = \frac{1}{7}$. Jadi, kita memperoleh barisan

$$3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \ldots.$$

Perhatikan bahwa ketika membahas fungsi pembangkit, kita selalu memulai barisan dengan a_0.

Anda mungkin bertanya-tanya mengapa kita melakukan hal seperti ini. Salah satu alasannya adalah bahwa menyandikan suatu barisan dengan deret pangkat membantu kita mengetahui indeks setiap suku dalam barisan. Sebagai contoh, jika kita menuliskan barisan $1, 3, 4, 6, 9, \ldots, 24, 41, \ldots$, mustahil menentukan indeks suku 24 (sekalipun kita sepakat bahwa suku pertama dinyatakan sebagai a_0). Namun, jika kita menuliskan deret pembangkitnya, kita memperoleh $1 + 3x + 4x^2 + 6x^3 + 9x^4 + \cdots + 24x^{17} + 41x^{18} + \cdots$. Sekarang jelas bahwa 24 adalah suku berindeks 17 dalam barisan tersebut (yakni, $a_{17} = 24$). Tentu saja, untuk memperoleh manfaat ini kita dapat menampilkan barisan dengan berbagai cara, misalnya $\boxed{1}_0\boxed{3}_1\boxed{4}_2\boxed{6}_3\boxed{9}_4\cdots\boxed{24}_{17}\boxed{41}_{18}\cdots$, tetapi kita tidak melakukannya. Alasannya, deret pembangkit tampak seperti deret pangkat biasa (meskipun kita menafsirkannya secara berbeda), sehingga kita dapat memperlakukannya sebagaimana kita biasa memperlakukan deret pangkat, misalnya dengan menuliskan fungsi yang menjadi tujuan konvergensinya.

Sebagai contoh, dari kalkulus kita mengetahui bahwa deret pangkat $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ konvergen ke fungsi e^x. Jadi, kita dapat menggunakan e^x untuk membicarakan barisan koefisien dari deret pangkat e^x. Ketika kita menuliskan suatu fungsi ringkas yang memiliki deret pangkat tak hingga yang kita pandang sebagai deret pembangkit, fungsi tersebut kita sebut *fungsi pembangkit*. Dalam contoh ini, kita dapat mengatakan

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots \text{ memiliki fungsi pembangkit } e^x.$$

6.1.1 Menyusun Fungsi Pembangkit

Contoh e^x di atas sangat khusus. Kita mempunyai barisan yang agak tidak lazim, dan satu-satunya alasan kita mengetahui fungsi pembangkitnya adalah karena kita kebetulan mengetahui deret Taylor untuk e^x. Sekarang tujuan kita adalah mengumpulkan beberapa alat untuk menyusun fungsi pembangkit dari suatu barisan tertentu.

Mari kita lihat fungsi pembangkit untuk beberapa barisan yang sangat sederhana. Yang paling sederhana adalah $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$. Seperti apakah *deret pembangkitnya*? Deret tersebut hanyalah $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$. Dapatkah kita menemukan rumus tertutup untuk deret pangkat ini? Tentu! Deret ini sebenarnya hanyalah deret

geometri dengan rasio tetap x. Jadi, jika kita menggunakan teknik "kalikan, geser, lalu kurangkan" dari Subbab 4.4, kita memperoleh

$$\begin{array}{rrl} & S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ - & xS = & x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ \hline & (1-x)S = 1 & \end{array}$$

Dengan demikian, kita melihat bahwa

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Anda mungkin ingat dari kalkulus bahwa identitas ini, jika dipandang sebagai persamaan fungsi analitik, hanya berlaku pada interval konvergensi deret pangkat tersebut, yang dalam kasus ini adalah ketika $|x| < 1$. Di sini kita memandang kedua ruas sebagai deret pangkat formal. Karena itu, kita tidak perlu menyubstitusikan nilai apa pun untuk x: yang diperlukan adalah kesamaan koefisien pada setiap pangkat x. Dalam pengertian formal tersebut, identitas ini berlaku.

1, 1, 1, ...

Fungsi pembangkit untuk $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ adalah $\dfrac{1}{1-x}$.

Mari kita gunakan fungsi pembangkit dasar ini untuk menemukan fungsi pembangkit bagi lebih banyak barisan. Bagaimana jika kita mengganti x dengan $-x$? Kita memperoleh

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \text{ yang membangkitkan } 1, -1, 1, -1, \ldots.$$

Jika kita mengganti x dengan $3x$, kita memperoleh

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots \text{ yang membangkitkan } 1, 3, 9, 27, \ldots.$$

Dengan mengganti x pada $\frac{1}{1-x}$, kita dapat memperoleh fungsi pembangkit bagi bermacam-macam barisan, tetapi tidak bagi semuanya. Sebagai contoh, Substitusi sederhana yang hanya menskalakan x dengan suatu konstanta tidak dapat menghasilkan fungsi pembangkit bagi $2, 2, 2, 2, \ldots$, sebab substitusi semacam itu tidak mengubah suku konstannya yang bernilai 1. Namun, kita masih dapat menanganinya. Perhatikan bahwa setiap suku $2, 2, 2, 2, \ldots$ diperoleh dengan mengalikan suku-suku $1, 1, 1, 1, \ldots$ dengan konstanta 2. Jadi, kalikan pula fungsi pembangkitnya dengan 2.

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots \text{ yang membangkitkan } 2, 2, 2, 2, \ldots.$$

Demikian pula, untuk menemukan fungsi pembangkit bagi barisan $3, 9, 27, 81, \ldots$, kita mencatat bahwa barisan ini diperoleh dengan mengalikan setiap suku $1, 3, 9, 27, \ldots$

dengan 3. Karena kita telah memiliki fungsi pembangkit untuk $1, 3, 9, 27, \ldots$, kita dapat menuliskan

$$\frac{3}{1-3x} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 9x^2 + 3 \cdot 27x^3 + \cdots \text{ yang membangkitkan } 3, 9, 27, 81, \ldots.$$

Bagaimana dengan barisan $2, 4, 10, 28, 82, \ldots$? Di sini setiap suku selalu satu lebih besar daripada suatu pangkat dari 3. Artinya, kita telah menjumlahkan barisan $1, 1, 1, 1, \ldots$ dan $1, 3, 9, 27, \ldots$ suku demi suku. Oleh karena itu, kita dapat memperoleh fungsi pembangkitnya dengan menjumlahkan fungsi pembangkit masing-masing:

$$\begin{aligned} 2 + 4x + 10x^2 + 28x^3 + \cdots &= (1+1) + (1+3)x + (1+9)x^2 + (1+27)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

Masih ada kemungkinan lain: jika kita mengganti x dalam fungsi pembangkit semula dengan x^2, kita memperoleh

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots \text{ yang membangkitkan } 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots.$$

Bagaimana kita dapat memperoleh $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$? Mulailah dengan barisan sebelumnya, lalu *geser* barisan itu sejauh 1 posisi. Namun, bagaimana cara melakukannya? Untuk memahami cara kerja pergeseran, mari kita terlebih dahulu mencoba memperoleh fungsi pembangkit bagi barisan $0, 1, 3, 9, 27, \ldots$. Kita mengetahui bahwa $\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots$. Untuk menempatkan nol di awal, deret pembangkitnya harus berbentuk $x + 3x^2 + 9x^3 + 27x^4 + \cdots$ (sehingga tidak terdapat suku konstan). Perkalian dengan x memberikan efek ini. Jadi, fungsi pembangkit untuk $0, 1, 3, 9, 27, \ldots$ adalah $\frac{x}{1-3x}$. Cara ini juga dapat digunakan untuk memperoleh fungsi pembangkit bagi $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$:

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots \text{ yang membangkitkan } 0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots.$$

Bagaimana jika kita menjumlahkan barisan $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ dan $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ suku demi suku? Kita seharusnya memperoleh $1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$. Apa yang terjadi ketika kita menjumlahkan fungsi pembangkitnya? Hasilnya sesuai (cobalah)!

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}.$$

Berikutnya, ada satu cara yang tidak langsung: apa yang terjadi jika kita mengambil *turunan* dari $\frac{1}{1-x}$? Kita memperoleh $\frac{1}{(1-x)^2}$. Di sisi lain, jika kita menurunkan deret pangkat tersebut suku demi suku, kita memperoleh $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$, yang merupakan deret pembangkit bagi $1, 2, 3, 4, \ldots$. Hal ini memberikan hasil berikut.

1, 2, 3, ...

Fungsi pembangkit untuk $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ adalah $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Ambillah turunan kedua: $\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots$. Jadi, $\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$ merupakan fungsi pembangkit untuk bilangan segitiga, $1, 3, 6, 10 \ldots$ (meskipun di sini kita menetapkan $a_0 = 1$, sedangkan biasanya $T_0 = 0$).

6.1.2 Pengambilan Selisih

Kita telah melihat cara memperoleh fungsi pembangkit dari $\frac{1}{1-x}$ dengan menggunakan perkalian (dengan suatu konstanta atau dengan x), substitusi, penjumlahan, dan penurunan. Untuk menggunakan setiap operasi tersebut, Anda harus mengenali suatu cara untuk mengubah barisan $1, 1, 1, 1, 1 \ldots$ menjadi barisan yang diinginkan. Hal ini tidak selalu mudah. Cara tersebut juga tidak sepenuhnya sejalan dengan cara kita menganalisis barisan selama ini. Salah satu hal yang sering kita tinjau adalah barisan selisih antarsuku suatu barisan. Barisan selisih ternyata juga berguna untuk menemukan fungsi pembangkit. Barisan selisih sering kali lebih sederhana daripada barisan semula. Jadi, jika kita mengetahui fungsi pembangkit untuk barisan selisih, kita ingin menggunakannya untuk menemukan fungsi pembangkit bagi barisan semula.

Sebagai contoh, perhatikan barisan $2, 4, 10, 28, 82, \ldots$. Bagaimana kita dapat beralih ke barisan selisih pertama $2, 6, 18, 54, \ldots$? Kita ingin mengurangkan 2 dari 4, 4 dari 10, 10 dari 28, dan seterusnya. Jadi, jika kita mengurangkan (suku demi suku) barisan $0, 2, 4, 10, 28, \ldots$ dari $2, 4, 10, 28 \ldots$, kita akan memperoleh barisan yang diinginkan. Fungsi pembangkit untuk $0, 2, 4, 10, 28, \ldots$ dapat diperoleh dari fungsi pembangkit bagi $2, 4, 10, 28 \ldots$ dengan mengalikannya dengan x. Gunakan A untuk menyatakan fungsi pembangkit bagi $2, 4, 10, 28, 82, \ldots$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} A &= 2 + 4x + 10x^2 + 28x^3 + 82x^4 + \cdots \\ -\quad xA &= 0 + 2x + 4x^2 + 10x^3 + 28x^4 + 82x^5 + \cdots \\ \hline (1-x)A &= 2 + 2x + 6x^2 + 18x^3 + 54x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Meskipun kita tidak memperoleh tepat barisan selisihnya, kita memperoleh sesuatu yang hampir sama. Dalam kasus khusus ini, kita sudah mengetahui fungsi pembangkit A (kita menemukannya pada subbagian sebelumnya), tetapi pada umumnya kita akan menggunakan teknik pengambilan selisih ini untuk *menemukan* A: jika kita mempunyai fungsi pembangkit untuk barisan selisih, kita dapat menyelesaikan persamaan untuk memperoleh A.

Contoh 6.1.2

Temukan fungsi pembangkit untuk $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa barisan selisihnya konstan. Kita mengetahui cara menemukan fungsi pembangkit bagi sembarang barisan konstan. Jadi, nyatakan fungsi pembangkit untuk $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ dengan A. Kita memperoleh

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots \\ -\quad xA &= 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \cdots \\ \hline (1-x)A &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Kita mengetahui bahwa $2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots = \dfrac{2x}{1-x}$. Dengan demikian,

$$(1-x)A = 1 + \frac{2x}{1-x}.$$

Sekarang selesaikan persamaan untuk memperoleh A:

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Apakah hasil ini masuk akal? Sebelum menyederhanakan kedua pecahan tersebut menjadi satu, kita menjumlahkan fungsi pembangkit bagi barisan $1, 1, 1, 1, \ldots$ dengan fungsi pembangkit bagi barisan $0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ (ingat bahwa $\frac{1}{(1-x)^2}$ membangkitkan $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, sedangkan perkalian dengan $2x$ menggesernya, menempatkan nol di awal, dan menggandakan setiap sukunya). Jika kita menjumlahkan keduanya suku demi suku, kita memperoleh barisan yang benar, yaitu $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

Setelah memperoleh fungsi pembangkit untuk bilangan ganjil, kita dapat menggunakannya untuk menemukan fungsi pembangkit bagi bilangan kuadrat:

Contoh 6.1.3

Temukan fungsi pembangkit untuk $1, 4, 9, 16, \ldots$. Perhatikan bahwa kita menetapkan $1 = a_0$.

Penyelesaian. Sekali lagi, kita menyatakan fungsi pembangkit barisan tersebut dengan A. Dengan mengambil selisih, kita memperoleh

$$\begin{aligned} A &= 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots \\ -\quad xA &= 0 + x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots \\ \hline (1-x)A &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Karena $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$, kita memperoleh $A = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

Dalam setiap contoh di atas, kita menemukan selisih antarsuku berurutan sehingga memperoleh barisan selisih yang fungsi pembangkitnya telah kita ketahui. Kita dapat memperumum cara ini untuk hubungan antarsuku barisan yang lebih rumit. Sebagai contoh, misalkan kita mengetahui bahwa mulai dari indeks 2 suatu barisan memenuhi relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Dengan kata lain, jika dari suatu suku barisan kita mengurangkan 3 kali suku sebelumnya lalu menambahkan 2 kali suku sebelum itu, kita memperoleh 0 (karena $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$). Hal ini berlaku untuk semua suku kecuali dua suku pertama barisan tersebut. Jadi, setelah dua suku pertama, barisan hasil perhitungan tersebut adalah barisan nol, yang fungsi pembangkitnya tentu kita ketahui.

Contoh 6.1.4

Mulai dari indeks 2, barisan $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ memenuhi relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Temukan fungsi pembangkit barisan tersebut.

Penyelesaian. Nyatakan fungsi pembangkit barisan tersebut dengan A. Kita memperoleh

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3x + 7x^2 + 15x^3 + 31x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ -3xA &= 0 - 3x - 9x^2 - 21x^3 - 45x^4 - \cdots - 3a_{n-1}x^n - \cdots \\ +\ 2x^2A &= 0 + 0x + 2x^2 + 6x^3 + 14x^4 + \cdots + 2a_{n-2}x^n + \cdots \\ (1 - 3x + 2x^2)A &= 1 \end{aligned}$$

Kita mengalikan A dengan $-3x$, yang menggeser setiap suku sejauh satu posisi dan mengalikannya dengan -3. Pada baris ketiga, kita mengalikan A dengan $2x^2$, yang menggeser setiap suku sejauh dua posisi dan mengalikannya dengan 2. Ketika menjumlahkan suku-suku yang bersesuaian, kita mengambil setiap suku, mengurangkan 3 kali suku sebelumnya, lalu menambahkan 2 kali suku sebelum itu. Hal ini terjadi untuk setiap suku setelah a_1 karena $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$. Secara umum, mungkin masih tersisa dua suku dari awal deret pembangkit, meskipun dalam kasus ini suku keduanya kebetulan juga bernilai 0.

Sekarang kita hanya perlu menyelesaikan persamaan untuk memperoleh A:

$$A = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2}.$$

6.1.3 Perkalian dan Jumlah Parsial

Apa yang terjadi pada barisan ketika Anda mengalikan dua fungsi pembangkit? Mari kita lihat: $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ dan $B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$. Untuk mengalikan A dan B, kita harus berulang kali menggunakan sifat distributif (metode FOIL tak hingga?), tetapi ingatlah bahwa kita akan mengelompokkan suku-suku sejenis dan hanya perlu menuliskan beberapa suku pertama untuk melihat polanya. Suku konstannya adalah a_0b_0. Koefisien x adalah $a_0b_1 + a_1b_0$. Demikian seterusnya. Kita memperoleh

$$AB = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \cdots.$$

Contoh 6.1.5

"Kalikan" barisan $1, 2, 3, 4, \ldots$ dengan barisan $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$.

Penyelesaian. Suku konstan yang baru hanyalah $1 \cdot 1$. Suku berikutnya adalah $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$. Suku selanjutnya adalah $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$. Satu suku lagi adalah $1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 26$. Barisan yang dihasilkan ialah

$$1, 4, 11, 26, 57, \ldots.$$

Karena fungsi pembangkit untuk $1, 2, 3, 4, \ldots$ adalah $\frac{1}{(1-x)^2}$ dan fungsi pembangkit untuk $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ adalah $\frac{1}{1-2x}$, fungsi pembangkit untuk $1, 4, 11, 26, 57, \ldots$ adalah $\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$.

Perhatikan kasus khusus ketika Anda mengalikan suatu barisan dengan $1, 1, 1, \ldots$. Sebagai contoh, kalikan $1, 1, 1, \ldots$ dengan $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$. Suku pertamanya adalah $1 \cdot 1 = 1$. Kemudian, $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$. Setelah itu, $1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$. Suku berikutnya adalah 10. Kita memperoleh bilangan segitiga. Lebih tepatnya, kita memperoleh barisan jumlah parsial dari $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Dalam bentuk fungsi pembangkit, kita mengambil $\frac{1}{1-x}$ (yang membangkitkan $1, 1, 1, 1, 1 \ldots$) lalu mengalikannya dengan $\frac{1}{(1-x)^2}$ (yang membangkitkan $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$), sehingga diperoleh $\frac{1}{(1-x)^3}$. Hasil ini tidak mengherankan karena sebelumnya kita menemukan fungsi pembangkit yang sama untuk bilangan segitiga.

Intinya, jika Anda perlu menemukan fungsi pembangkit untuk jumlah $n+1$ suku pertama suatu barisan yang diindeks mulai dari 0 dan Anda mengetahui fungsi pembangkit bagi barisan *tersebut*, Anda dapat mengalikannya dengan $\frac{1}{1-x}$. Untuk kembali dari barisan jumlah parsial ke barisan semula, pertahankan suku pertama lalu ambil selisih antarsuku berurutan. Ketika memperoleh barisan selisih, pada akhirnya Anda mengalikan dengan $1 - x$, atau, secara ekuivalen, membagi dengan $\frac{1}{1-x}$. Perkalian dengan $\frac{1}{1-x}$ menghasilkan jumlah parsial, sedangkan pembagian

dengan $\frac{1}{1-x}$ menghasilkan selisih.

6.1.4 Menyelesaikan Relasi Rekurensi dengan Fungsi Pembangkit

Sebagai penutup, kita akan melihat sebuah contoh yang menunjukkan salah satu dari banyak manfaat mempelajari fungsi pembangkit. Kita dapat menggunakan fungsi pembangkit untuk menyelesaikan relasi rekurensi.

Contoh 6.1.6

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, yang berlaku mulai dari indeks 2, dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 3$.

Penyelesaian. Pada contoh di atas, kita melihat bahwa relasi rekurensi ini menghasilkan barisan $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ yang mempunyai fungsi pembangkit $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$. Kita memperolehnya dengan menyatakan fungsi pembangkit sebagai A, lalu menghitung $A - 3xA + 2x^2A$, yang hasilnya hanya 1 karena semua suku lainnya saling menghapus.

Namun, bagaimana fungsi pembangkit tersebut dapat membantu kita? Pertama, uraikan fungsi pembangkit itu menjadi dua fungsi yang lebih sederhana. Untuk melakukannya, kita dapat menggunakan dekomposisi pecahan parsial. Mulailah dengan memfaktorkan penyebutnya:

$$\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}.$$

Dekomposisi pecahan parsial menyatakan bahwa kita dapat menuliskan pecahan ini sebagai jumlah dua pecahan (kita mendekomposisi pecahan yang diberikan):

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x} \quad \text{untuk konstanta } a \text{ dan } b.$$

Untuk menemukan a dan b, kita menjumlahkan kedua pecahan hasil dekomposisi dengan menggunakan penyebut yang sama. Hasilnya adalah

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a(1-2x) + b(1-x)}{(1-x)(1-2x)}.$$

Dengan demikian,

$$1 = a(1-2x) + b(1-x).$$

Persamaan ini harus benar untuk setiap nilai x. Jika $x = 1$, persamaan tersebut menjadi $1 = -a$, sehingga $a = -1$. Ketika $x = \frac{1}{2}$, kita memperoleh $1 = b/2$, sehingga $b = 2$. Jadi, kita dapat mendekomposisi pecahan tersebut sebagai berikut:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x}.$$

Dengan demikian, dekomposisi pecahan parsial telah selesai. Perhatikan bahwa kedua pecahan ini merupakan fungsi pembangkit yang telah kita kenal. Kita dapat menjabarkan masing-masing pecahan tersebut.

$$\frac{-1}{1-x} = -1-x-x^2-x^3-x^4-\cdots \text{ yang membangkitkan } -1,-1,-1,-1,-1,\ldots.$$

$$\frac{2}{1-2x} = 2+4x+8x^2+16x^3+32x^4+\cdots \text{ yang membangkitkan } 2,4,8,16,32,\ldots.$$

Kita dapat memberikan rumus tertutup untuk suku ke-n dari masing-masing barisan ini. Barisan pertama mempunyai rumus $a_n = -1$. Barisan kedua mempunyai rumus $a_n = 2^{n+1}$. Barisan yang kita cari hanyalah jumlah kedua barisan tersebut, sehingga penyelesaian relasi rekurensinya adalah

$$a_n = 2^{n+1} - 1.$$

Sekarang kita dapat menambahkan fungsi pembangkit ke dalam daftar metode untuk menyelesaikan relasi rekurensi.

6.1.5 Latihan

1. Temukan fungsi pembangkit untuk setiap barisan berikut dengan mengaitkannya dengan suatu barisan yang fungsi pembangkitnya telah diketahui.

(a) $4,4,4,4,4,\ldots$.

(b) $2,4,6,8,10,\ldots$.

(c) $0,0,0,2,4,6,8,10,\ldots$.

(d) $1,5,25,125,\ldots$.

(e) $1,-3,9,-27,81,\ldots$.

(f) $1,0,5,0,25,0,125,0,\ldots$.

(g) $0,1,0,0,2,0,0,3,0,0,4,0,0,5,\ldots$.

2. Temukan barisan yang dibangkitkan oleh setiap fungsi pembangkit berikut:

(a) $\dfrac{4x}{1-x}$.

(b) $\dfrac{1}{1-4x}$.

(c) $\dfrac{x}{1+x}$.

(d) $\dfrac{3x}{(1+x)^2}$.

(e) $\dfrac{1+x+x^2}{(1-x)^2}$ (Petunjuk: gunakan perkalian).

3. Tunjukkan cara memperoleh fungsi pembangkit untuk bilangan segitiga melalui tiga cara berbeda:

(a) Ambil turunan dua kali dari fungsi pembangkit untuk $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$.

(b) Gunakan pengambilan selisih.

(c) Kalikan dua fungsi pembangkit yang telah diketahui.

4. Gunakan pengambilan selisih untuk menemukan fungsi pembangkit bagi $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots$.

5. Temukan fungsi pembangkit untuk barisan dengan relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$, yang berlaku mulai dari indeks 2, serta suku awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 5$.

6. Gunakan relasi rekurensi untuk bilangan Fibonacci guna menemukan fungsi pembangkit bagi barisan Fibonacci.

7. Gunakan perkalian untuk menemukan fungsi pembangkit bagi barisan jumlah parsial bilangan Fibonacci, $S_0, S_1, S_2, \ldots$, dengan $S_0 = F_0$, $S_1 = F_0 + F_1$, $S_2 = F_0 + F_1 + F_2$, $S_3 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3$, dan seterusnya.

8. Temukan fungsi pembangkit untuk barisan dengan rumus tertutup $a_n = 2(5^n) + 7(-3)^n$.

9. Temukan rumus tertutup untuk suku ke-n dari barisan dengan fungsi pembangkit $\dfrac{3x}{1-4x} + \dfrac{1}{1-x}$.

10. Temukan a_7 untuk barisan dengan fungsi pembangkit $\dfrac{2}{(1-x)^2} \cdot \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

11. Jelaskan bagaimana kita mengetahui bahwa $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ merupakan fungsi pembangkit untuk $1, 2, 3, 4, \ldots$.

12. Dengan bertolak dari fungsi pembangkit untuk $1, 2, 3, 4, \ldots$, temukan fungsi pembangkit untuk setiap barisan berikut.

(a) $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots$.

(b) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$.

(c) $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$.

(d) $0, 3, 9, 18, 30, 45, 63, \ldots$. (Petunjuk: kaitkan barisan ini dengan barisan sebelumnya.)

13. Anda boleh mengasumsikan bahwa $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ mempunyai fungsi pembangkit $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ (karena memang demikian). Gunakan fakta ini untuk

menemukan barisan yang dibangkitkan oleh setiap fungsi pembangkit berikut.

(a) $\frac{x^2}{1-x-x^2}$.

(b) $\frac{1}{1-x^2-x^4}$.

(c) $\frac{1}{1-3x-9x^2}$.

(d) $\frac{1}{(1-x-x^2)(1-x)}$.

14. Temukan fungsi pembangkit untuk barisan $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$.

15. Temukan fungsi pembangkit untuk barisan $1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$.

16. Misalkan A merupakan fungsi pembangkit untuk barisan $3, 5, 9, 15, 23, 33, \ldots$.

(a) Temukan fungsi pembangkit (dalam A) untuk barisan selisih antarsuku, dimulai dengan selisih antara 5 dan 3.

(b) Tuliskan barisan selisih antarsuku dan temukan fungsi pembangkitnya (tanpa mengacu pada A).

(c) Gunakan jawaban Anda untuk bagian (a) dan (b) guna menemukan fungsi pembangkit bagi barisan semula.

6.2 Pengantar Teori Bilangan

Kita telah menggunakan bilangan asli untuk menyelesaikan berbagai masalah. Himpunan bilangan ini tepat digunakan dalam matematika diskret karena banyaknya benda yang kita tangani selalu berupa bilangan bulat. Selama ini, bilangan asli menjadi alat bagi kita. Sekarang, mari kita luangkan waktu sejenak untuk menelaah alat tersebut. Penemuan matematis apa yang dapat kita peroleh *tentang* bilangan asli itu sendiri?

Inilah pertanyaan utama teori bilangan, cabang matematika yang luas, kuno, rumit, dan terutama, indah. Dalam sejarahnya, teori bilangan dikenal sebagai Ratu Matematika dan sangat lekat dengan matematika *murni*: teori ini dipelajari demi teori itu sendiri, bukan sebagai sarana untuk memahami penerapan di dunia nyata. Namun, keadaan ini telah berubah dalam beberapa tahun terakhir seiring ditemukannya berbagai penerapan teori bilangan. Contoh yang mungkin paling dikenal ialah kriptografi RSA, salah satu metode untuk mengenkripsi data di internet. Teori bilanganlah yang memungkinkan metode tersebut.

Pertanyaan seperti apa yang termasuk dalam ranah teori bilangan? Berikut sebuah contoh sebagai motivasi. Ingat bahwa dalam pembahasan tentang induksi, kita pernah bertanya:

> Nilai ongkos kirim berapa saja yang dapat dibentuk secara tepat hanya dengan menggunakan perangko 5 sen dan 8 sen?

Kita berhasil membuktikan bahwa *setiap* nilai ongkos kirim yang lebih besar dari 27 sen dapat dibentuk. Anda mungkin bertanya-tanya apa yang terjadi jika nominal perangkonya diubah. Bagaimana jika kita memiliki perangko 4 sen dan 9 sen? Apakah ada suatu nilai tertentu yang membuat semua nilai sesudahnya dapat dibentuk? Sekali lagi, kita dapat mengganti dua perangko 4 sen dengan satu perangko 9 sen, atau tiga perangko 9 sen dengan tujuh perangko 4 sen. Dalam kedua kasus, kita dapat menambah nilai ongkos kirim sebesar satu sen. Dengan menggunakan fakta ini sebagai kasus induktif, kita dapat membuktikan bahwa setiap nilai ongkos kirim yang lebih besar dari 23 sen dapat dibentuk.

Bagaimana jika kita memiliki perangko 2 sen dan 4 sen? Kali ini kemungkinannya tampak kurang menjanjikan. Jika kita mengambil sejumlah perangko 2 sen dan sejumlah perangko 4 sen, apa yang dapat dikatakan tentang jumlah nilainya? Mungkinkah jumlah itu ganjil? Tampaknya tidak.

Mengapa pasangan 5 dan 8 berhasil, pasangan 4 dan 9 berhasil, tetapi pasangan 2 dan 4 tidak? Sifat apa yang dimiliki bilangan-bilangan ini? Jika Anda diberi sepasang bilangan, dapatkah Anda langsung menentukan apakah pasangan itu akan berhasil? Kita akan menjawab pertanyaan-pertanyaan ini dan pertanyaan lainnya setelah terlebih dahulu menyelidiki beberapa sifat bilangan yang lebih sederhana.

6.2.1 Keterbagian

Bilangan asli mudah dijumlahkan dan dikalikan. Jika cakupan kita diperluas ke semua bilangan bulat, pengurangan juga menjadi mudah (kita memerlukan bilangan

negatif agar dapat mengurangkan sembarang bilangan dari bilangan lain, bahkan bilangan yang lebih besar dari bilangan yang lebih kecil). Pembagian merupakan operasi pertama yang menimbulkan tantangan. Jika kita ingin memperluas himpunan bilangan agar setiap pembagian dapat dilakukan (mungkin dengan mengecualikan pembagian oleh 0), kita harus beralih ke bilangan rasional, yaitu himpunan semua bilangan yang dapat ditulis sebagai pecahan. Langkah itu akan membawa kita terlalu jauh, jadi pilihan tersebut tidak akan kita ambil.

Bahkan, fakta bahwa tidak setiap bilangan habis dibagi oleh bilangan lain justru menguntungkan. Fakta ini membantu kita memahami struktur bilangan asli dan membuka jalan menuju banyak pertanyaan serta penerapan yang menarik.

Untuk bilangan a dan $b \neq 0$, mungkin saja $a \div b$ menghasilkan bilangan bulat. Dalam hal ini, kita mengatakan bahwa b *membagi* a; secara simbolis, kita menulis $b \mid a$. Jika ini berlaku, b adalah pembagi atau faktor dari a, sedangkan a adalah kelipatan dari b. Secara umum, $b \mid a$ berarti $a = bk$ untuk suatu bilangan bulat k (artinya, a merupakan suatu kelipatan dari b).

Relasi Keterbagian.

Untuk bilangan bulat m dan n, kita mengatakan "m membagi n" dan menulis

$$m \mid n$$

apabila $n = mk$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, pernyataan-pernyataan berikut memiliki arti yang sama:

1. $m \mid n$.
2. $n = mk$ untuk suatu bilangan bulat k.
3. m adalah faktor (atau pembagi) dari n.
4. n adalah kelipatan dari m.

Perhatikan bahwa $m \mid n$ merupakan suatu pernyataan. Pernyataan itu bernilai benar atau salah. Sebaliknya, jika penyebutnya tak nol, $n \div m$ atau n/m merupakan suatu bilangan. Untuk pembagi tak nol, jika kita ingin menyatakan bahwa n/m bukan bilangan bulat, sehingga m tidak membagi n, kita dapat menulis $m \nmid n$.

Contoh 6.2.1

Tentukan apakah setiap pernyataan berikut benar atau salah.

1. $4 \mid 20$
2. $20 \mid 4$
3. $0 \mid 5$
4. $5 \mid 0$
5. $7 \mid 7$
6. $1 \mid 37$
7. $-3 \mid 12$
8. $8 \mid 12$
9. $1642 \mid 136299$

Penyelesaian.

1. Benar. 4 "termuat dalam" 20 sebanyak lima kali tanpa sisa. Dengan kata lain, $20 \div 4 = 5$, yang merupakan bilangan bulat. Kita juga dapat membenarkannya dengan mengatakan bahwa 20 merupakan kelipatan 4: $20 = 4 \cdot 5$.
2. Salah. Meskipun 20 merupakan kelipatan 4, 4 bukan kelipatan 20.
3. Salah. Tidak ada nilai bulat bagi peubah dalam persamaan $5 = 0 \cdot k$.
4. Benar. Bahkan, $x \mid 0$ benar untuk setiap x. Alasannya, 0 merupakan kelipatan setiap bilangan: $0 = x \cdot 0$.
5. Benar. Bahkan, $x \mid x$ benar untuk setiap x.
6. Benar. 1 membagi setiap bilangan, termasuk 0.
7. Benar. Bilangan negatif juga berlaku tanpa masalah dalam relasi keterbagian. Di sini, $12 = -3 \cdot 4$. Selain itu, $3 \mid -12$ dan $-3 \mid -12$ juga benar.
8. Salah. Baik 8 maupun 12 habis dibagi 4, tetapi ini tidak berarti bahwa 12 habis dibagi 8.
9. Salah. Lihat pembahasan berikut.

Contoh terakhir ini menimbulkan pertanyaan: Bagaimana kita dapat menentukan apakah $m \mid n$? Tentu saja, jika Anda memiliki kalkulator yang tepercaya, Anda dapat menggunakannya untuk menghitung $n \div m$. Jika hasilnya bukan bilangan bulat, Anda tahu bahwa $m \nmid n$. Namun, cara ini terasa sedikit curang: kita belum memiliki pembagian, jadi apakah kita patut menggunakan pembagian untuk memeriksa keterbagian?

Meskipun kita belum benar-benar tahu cara membagi, kita tahu cara mengalikan. Kita dapat mencoba mengalikan m dengan bilangan-bilangan yang semakin besar hingga hasilnya mendekati n. Seberapa dekat? Kita ingin memastikan bahwa jika m dikalikan dengan bilangan bulat berikutnya yang lebih besar, hasilnya akan melampaui n.

Sebagai contoh, mari gunakan cara ini untuk menentukan apakah $1642 \mid 136299$. Mulailah dengan mencari kelipatan 1642:

$$1642 \cdot 2 = 3284 \qquad 1642 \cdot 3 = 4926 \qquad 1642 \cdot 4 = 6568 \qquad \cdots.$$

Semua hasil ini masih jauh lebih kecil daripada 136299. Kita dapat melompat sedikit lebih jauh:

$$1642 \cdot 50 = 82100 \qquad 1642 \cdot 80 = 131360 \qquad 1642 \cdot 85 = 139570.$$

Jadi, kita perlu memeriksa bilangan di antara 80 dan 85. Cobalah 83:

$$1642 \cdot 83 = 136286.$$

Apakah ini hasil terbaik yang dapat kita peroleh? Seberapa jauh hasil ini dari 136299 yang kita inginkan? Dengan mengurangkan, kita memperoleh $136299 - 136286 = 13$. Jadi, kita tahu bahwa pengali 84 tidak dapat digunakan karena hasilnya akan terlalu besar. Dengan kata lain, kita telah menemukan bahwa

$$136299 = 83 \cdot 1642 + 13.$$

Karena $13 < 1642$, sekarang kita dapat memastikan bahwa $1642 \nmid 136299$.

Ternyata, proses yang kita lakukan di atas dapat diulangi untuk sembarang pasangan bilangan bulat dengan komponen kedua tidak nol. Dalam keadaan itu, kita selalu dapat menuliskan bilangan a sebagai suatu kelipatan bilangan b ditambah suatu sisa. Kita mengetahui hal ini karena sejak sekolah dasar kita telah mengenal **pembagian dengan sisa**. Cara di atas hanya menyatakannya dengan menggunakan perkalian. Karena sisa dapat ditemukan melalui suatu prosedur, fakta ini biasanya disebut **algoritma pembagian**:

Algoritma Pembagian.

Untuk sembarang bilangan bulat a dan $b \neq 0$, terdapat bilangan bulat q, r yang unik sedemikian sehingga

$$a = qb + r$$

dengan r memenuhi $0 \leq r < |b|$.

Gagasannya adalah bahwa kita selalu dapat mengambil kelipatan b yang sesuai agar sisa r sekecil mungkin. Kita juga mengizinkan kemungkinan $r = 0$; dalam hal ini, berlaku $b \mid a$.

6.2.2 Kelas Sisa

Algoritma pembagian menyatakan bahwa hanya ada $|b|$ kemungkinan sisa ketika membagi dengan $b \neq 0$. Jika pembagi tak nol ini ditetapkan, kita dapat mengelompokkan bilangan bulat berdasarkan sisanya. Setiap kelompok disebut **kelas sisa modulo** b (atau kadang-kadang **kelas residu**).

Contoh 6.2.2

Deskripsikan kelas-kelas sisa modulo 5.

Penyelesaian. Kita ingin mengelompokkan bilangan berdasarkan sisa pembagiannya oleh 5. Berdasarkan algoritma pembagian, kita tahu bahwa akan ada tepat 5 kelas sisa karena hanya ada 5 kemungkinan nilai r ($0 \leq r < 5$).

Mula-mula, perhatikan $r = 0$. Di sini, kita mencari semua bilangan yang habis dibagi 5 karena $a = 5q + 0$. Dengan kata lain, kita mencari kelipatan 5. Kita memperoleh himpunan tak berhingga

$$\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}.$$

Perhatikan bahwa kita juga menyertakan bilangan bulat negatif.

Selanjutnya, perhatikan $r = 1$. Bilangan bulat apa yang bersisa 1 ketika dibagi 5? Jelas bahwa 1, 6, dan 11 memenuhi. Bagaimana dengan bilangan negatif? Di sini kita harus berhati-hati: -6 TIDAK bersisa 1. Kita dapat menulis $-6 = -2 \cdot 5 + 4$ atau $-6 = -1 \cdot 5 - 1$, tetapi hanya salah satunya yang merupakan penerapan algoritma pembagian yang "benar", yaitu $r = 4$, karena r harus tak negatif. Jadi, untuk memperoleh $r = 1$, kita justru memiliki -4, -9, dan seterusnya. Dengan demikian, kita memperoleh kelas sisa

$$\{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}.$$

Masih ada tiga kelas lagi. Kelas-kelas sisa untuk 2, 3, dan 4 berturut-turut adalah

$$\{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}$$

$$\{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$$

$$\{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}.$$

Perhatikan bahwa dalam contoh di atas, *setiap* bilangan bulat berada tepat dalam satu kelas sisa. Secara teknis, kita mengatakan bahwa kelas-kelas sisa modulo b membentuk **partisi** dari himpunan bilangan bulat.[1] Fakta terpenting tentang partisi ialah bahwa suatu **relasi ekuivalensi** dapat didefinisikan dari sebuah partisi: relasi ini menghubungkan pasangan-pasangan bilangan dan berperilaku seperti relasi "sama dengan" dalam semua hal yang penting.[2]

Terlepas dari semua istilah teknis yang menarik tadi, gagasannya sebenarnya sangat sederhana. Jika dua bilangan berada dalam kelas sisa yang sama, keduanya dapat dianggap sama dalam arti tertentu. Artinya, keduanya sama *jika ditinjau dari pembagian oleh b*. Pada kasus $b = 5$ di atas, bilangan 8 dan 23 memang bukan bilangan yang sama, tetapi keduanya sama jika ditinjau dari pembagian oleh 5 karena sama-sama bersisa 3.

Pembagi yang digunakan sangat menentukan: 8 dan 23 sama jika ditinjau dari pembagian oleh 5, tetapi tidak sama jika ditinjau dari pembagian oleh 7, karena 8 bersisa 1 ketika dibagi 7, sedangkan 23 bersisa 2.

Dengan mempertimbangkan semua hal ini, mari kita perkenalkan suatu notasi. Kita ingin mengatakan bahwa 8 dan 23 pada dasarnya sama, meskipun keduanya tidak sama. Menulis $8 = 23$ tentu keliru. Sebagai gantinya, kita menulis $8 \equiv 23$. Namun, pernyataan ini tidak selalu benar. Pernyataan itu berlaku jika kita sedang mempertimbangkan pembagian oleh 5, sehingga pembagi tersebut perlu dicantumkan dalam notasi. Jadi, yang sebenarnya kita tulis adalah

$$8 \equiv 23 \pmod 5$$

[1] Kita dapat mengembangkan teori matematis tentang partisi, membuktikan pernyataan mengenai semua partisi secara umum, lalu menerapkan hasil tersebut pada kasus yang sedang kita bahas.

[2] Sekali lagi, terdapat teori matematis tentang relasi ekuivalensi yang berlaku pada jauh lebih banyak kasus daripada yang kita bahas di sini. Lihat Subbagian 2.6.4.

yang dibaca, "8 kongruen dengan 23 modulo 5" (atau cukup "mod 5"). Tentu saja, kita kemudian dapat mengamati bahwa

$$8 \not\equiv 23 \pmod{7}.$$

Kongruensi Modulo n.

Untuk modulus positif, kita mengatakan bahwa a **kongruen dengan** b **modulo** n, dan menulis

$$a \equiv b \pmod{n}$$

apabila a dan b memiliki sisa yang sama ketika dibagi n. Dengan kata lain, apabila a dan b berada dalam kelas sisa yang sama modulo n.

Banyak buku mendefinisikan kongruensi modulo n dengan cara yang sedikit berbeda. Buku-buku tersebut menyatakan bahwa $a \equiv b \pmod{n}$ jika dan hanya jika $n \mid a - b$. Dengan kata lain, dua bilangan kongruen modulo n jika selisihnya merupakan kelipatan n. Jadi, definisi mana yang benar? Ternyata tidak menjadi soal karena keduanya ekuivalen.

Untuk mengetahui alasannya, perhatikan dua bilangan a dan b yang kongruen modulo n. Maka a dan b memiliki sisa yang sama ketika dibagi n. Kita peroleh

$$a = q_1 n + r \qquad\qquad b = q_2 n + r.$$

Di sini, kedua r tersebut benar-benar sama. Perhatikan hasil yang diperoleh ketika kita mengambil selisih a dan b:

$$a - b = q_1 n + r - (q_2 n + r) = q_1 n - q_2 n = (q_1 - q_2)n.$$

Jadi, $a - b$ merupakan kelipatan n, atau secara ekuivalen, $n \mid a - b$.

Sebaliknya, jika mula-mula kita mengasumsikan $n \mid a - b$, sehingga $a - b = kn$, perhatikan apa yang terjadi jika setiap suku dibagi n. Pembagian a oleh n akan menyisakan suatu nilai, demikian pula pembagian b oleh n. Akan tetapi, pembagian kn oleh n akan bersisa 0. Selisih kedua sisa itu harus merupakan kelipatan modulus, sedangkan nilai mutlaknya lebih kecil daripada modulus. Satu-satunya kemungkinan adalah selisih 0; artinya, kedua sisa tersebut sama.

Dengan demikian, kita memperoleh:

Kongruensi dan Keterbagian.

Untuk sembarang bilangan bulat a dan b, serta bilangan bulat positif n, berlaku

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{jika dan hanya jika} \qquad n \mid (a - b).$$

Beralih antara kongruensi dan persamaan biasa juga akan berguna. Fakta di atas membantu kita melakukannya. Kita tahu bahwa $a \equiv b \pmod{n}$ jika dan hanya

jika $n \mid a - b$, yang pada gilirannya berlaku jika dan hanya jika $a - b = kn$ untuk suatu bilangan bulat k. Dengan menyusun ulang persamaan itu, kita memperoleh $a = b + kn$. Dengan kata lain, jika a dan b kongruen modulo n, maka a sama dengan b ditambah suatu kelipatan n. Hal ini sesuai dengan pengamatan sebelumnya bahwa semua bilangan dalam suatu kelas sisa tertentu mempunyai selisih yang sama terhadap kelipatan-kelipatan n.

Kongruensi dan Kesamaan.

Untuk sembarang bilangan bulat a dan b, serta bilangan bulat positif n, berlaku

$a \equiv b \pmod{n}$ jika dan hanya jika $a = b+kn$ untuk suatu bilangan bulat k.

6.2.3 Sifat-Sifat Kongruensi

Sebelumnya kita mengatakan bahwa, dalam banyak hal penting, kongruensi modulo n berperilaku sama seperti kesamaan. Secara khusus, kita dapat membuktikan bahwa kongruensi modulo n merupakan **relasi ekuivalensi**, yang mengharuskan kita memeriksa tiga fakta berikut:

Kongruensi Modulo n Merupakan Relasi Ekuivalensi.

Untuk sembarang bilangan bulat a, b, dan c, serta sembarang bilangan bulat positif n, pernyataan berikut berlaku:

1. $a \equiv a \pmod{n}$.
2. Jika $a \equiv b \pmod{n}$, maka $b \equiv a \pmod{n}$.
3. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$, maka $a \equiv c \pmod{n}$.

Dengan kata lain, kongruensi modulo n bersifat refleksif, simetris, dan transitif, sehingga merupakan relasi ekuivalensi.

Luangkan waktu sejenak untuk meyakinkan diri bahwa setiap sifat di atas memang berlaku bagi kongruensi. Cobalah menjelaskan masing-masing sifat dengan menggunakan definisi berdasarkan sisa maupun definisi berdasarkan keterbagian.

Selanjutnya, perhatikan perilaku kongruensi ketika kita melakukan aritmetika dasar. Kita sudah tahu bahwa jika dua bilangan yang kongruen dikurangkan, hasilnya akan kongruen dengan 0 (yakni merupakan kelipatan n). Bagaimana jika suatu bilangan yang kongruen dengan 1 dijumlahkan dengan bilangan yang kongruen dengan 2? Apakah hasilnya akan kongruen dengan 3?

Kongruensi dan Aritmetika.

Misalkan $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$. Maka pernyataan berikut berlaku:

1. $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
2. $a - c \equiv b - d \pmod{n}$.
3. $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Fakta-fakta di atas mungkin tampak ditulis dengan cara yang agak janggal, tetapi gagasannya sederhana. Jika kita memiliki kongruensi yang benar lalu menambahkan hal yang sama pada kedua ruas, hasilnya tetap merupakan kongruensi yang benar. Ini terdengar seolah-olah kita menyatakan:

Jika $a \equiv b \pmod{n}$, maka $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.

Tentu saja pernyataan ini juga benar; ini merupakan kasus khusus ketika $c = d$. Namun, hasil yang kita miliki berlaku secara lebih umum. Anggaplah kongruensi berarti "pada dasarnya sama." Jika kita memiliki dua bilangan yang pada dasarnya sama, lalu menambahkan sesuatu yang juga pada dasarnya sama pada kedua ruas, hasilnya akan tetap pada dasarnya sama.

Hal ini tampak masuk akal. Namun, apakah benar demikian? Mari kita buktikan fakta pertama:

Bukti. Misalkan $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$. Ini berarti $a = b + kn$ dan $c = d + jn$ untuk bilangan bulat k dan j. Jumlahkan kedua persamaan ini:

$$a + c = b + d + kn + jn.$$

Namun, $kn + jn = (k + j)n$, yang merupakan kelipatan n. Jadi, $a + c = b + d + (j + k)n$, atau dengan kata lain, $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

Dua fakta lainnya dapat dibuktikan dengan cara serupa.

Salah satu akibat penting dari fakta-fakta mengenai kongruensi ini ialah bahwa pada dasarnya kita dapat mengganti sembarang bilangan dalam suatu kongruensi dengan bilangan lain yang kongruen dengannya. Berikut beberapa contoh untuk melihat bagaimana (dan mengapa) hal itu berlaku:

Contoh 6.2.3

Tentukan sisa pembagian 3491 oleh 9.

Penyelesaian. Kita dapat menggunakan pembagian bersusun, tetapi ada cara lain. Kita ingin menemukan x sedemikian sehingga $x \equiv 3491 \pmod{9}$. Sekarang, $3491 = 3000 + 400 + 90 + 1$. Tentu saja, $90 \equiv 0 \pmod{9}$, sehingga kita dapat mengganti 90 dalam penjumlahan itu dengan 0. Mengapa hal ini dibenarkan? Sebenarnya, kita mengurangkan sesuatu yang "sama" dari

kedua ruas:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3000 + 400 + 90 + 1 \pmod 9 \\ -\ 0 &\equiv 90 \pmod 9 \\ x &\equiv 3000 + 400 + 0 + 1 \pmod 9. \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa $400 = 4 \cdot 100$ dan $100 \equiv 1 \pmod 9$ (karena $9 \mid 99$). Jadi, kita dapat mengganti 400 hanya dengan 4. Sekali lagi, kita menggunakan pernyataan bahwa unsur-unsur yang kongruen dapat saling menggantikan, tetapi sebenarnya kita menggunakan sifat 3 dalam aritmetika kongruensi: kita tahu bahwa $100 \equiv 1 \pmod 9$, sehingga dengan mengalikan kedua ruas dengan 4, kita memperoleh $400 \equiv 4 \pmod 9$.

Dengan cara serupa, kita dapat mengganti 3000 dengan 3 karena $1000 = 1 + 999 \equiv 1 \pmod 9$. Dengan demikian, kongruensi semula menjadi

$$x \equiv 3 + 4 + 0 + 1 \pmod 9$$

$$x \equiv 8 \pmod 9.$$

Jadi, pembagian 3491 oleh 9 bersisa 8.

Contoh di atas semestinya meyakinkan Anda bahwa uji keterbagian oleh 9 yang terkenal memang benar: jumlah digit suatu bilangan bulat tak negatif dalam representasi desimal habis dibagi 9 jika dan hanya jika bilangan semula habis dibagi 9. Bahkan, sekarang kita mengetahui sesuatu yang lebih kuat: setiap bilangan bulat tak negatif kongruen dengan jumlah digit desimalnya modulo 9.[3]

Mari kita coba contoh lain.

Contoh 6.2.4

Tentukan sisa pembagian 3^{123} oleh 7.

Penyelesaian. Tentu saja, kita menggunakan kongruensi karena ingin mencari x tak negatif terkecil sedemikian sehingga $x \equiv 3^{123} \pmod 7$. Mula-mula, tuliskan $3^{123} = (3^3)^{41}$. Kita peroleh:

$$3^{123} = 27^{41} \equiv 6^{41} \pmod 7,$$

karena $27 \equiv 6 \pmod 7$. Perhatikan pula bahwa $6^2 = 36$ kongruen dengan 1 modulo 7. Dengan demikian, kita dapat menyederhanakannya lebih lanjut:

$$6^{41} = 6 \cdot (6^2)^{20} \equiv 6 \cdot 1^{20} \pmod 7.$$

Namun, $1^{20} = 1$, sehingga kita selesai:

$$3^{123} \equiv 6 \pmod 7.$$

[3]Hal ini juga berlaku untuk 3, tetapi tentu tidak berlaku untuk sembarang modulus secara umum.

Dalam contoh di atas, kita menggunakan fakta bahwa untuk setiap eksponen bilangan bulat tak negatif, jika $a \equiv b \pmod{n}$, maka $a^p \equiv b^p \pmod{n}$. Ini hanyalah penerapan sifat 3 secara berulang.

Sejauh ini, kita telah melihat cara menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan dalam kongruensi. Bagaimana dengan pembagian? Ada alasan mengapa kita menunda pembahasannya. Ternyata, kita tidak dapat begitu saja melakukan pembagian. Dengan kata lain, meskipun $ad \equiv bd \pmod{n}$, kita belum tentu memiliki $a \equiv b \pmod{n}$. Sebagai contoh, perhatikan

$$18 \equiv 42 \pmod{8}.$$

Kongruensi ini benar. Sekarang, 18 dan 42 sama-sama habis dibagi 6. Namun,

$$3 \not\equiv 7 \pmod{8}.$$

Meskipun pembagian tadi tidak berlaku, perhatikan bahwa $3 \equiv 7 \pmod{4}$. Kita tidak dapat membagi 8 dengan 6, tetapi kita dapat membagi 8 dengan faktor persekutuan terbesar dari 8 dan 6. Apakah hal ini selalu berlaku?

Misalkan $ad \equiv bd \pmod{n}$. Dengan kata lain, kita memiliki $ad = bd + kn$ untuk suatu bilangan bulat k. Tentu saja, ad habis dibagi d, demikian pula bd. Jadi, kn juga harus habis dibagi d. Jika n dan d tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, kita harus memiliki $d \mid k$. Namun, secara umum, jika kita mencoba membagi kn dengan d, kita tidak tahu apakah hasilnya akan berupa kelipatan bulat dari n. Sebagian faktor dari n mungkin ikut terbagi. Agar aman, mari kita bagi n sebanyak mungkin. Ambil faktor terbesar yang dimiliki bersama oleh d dan n, lalu coret faktor tersebut dari n. Faktor-faktor d yang tersisa akan berasal dari k, sehingga tidak ada masalah.

Faktor terbesar yang dimiliki bersama oleh d dan n disebut $\gcd(d, n)$, yaitu *faktor persekutuan terbesar (FPB)*. Dalam contoh di atas, $\gcd(6, 8) = 2$ karena faktor terbesar yang dimiliki bersama oleh 6 dan 8 adalah 2.

Kongruensi dan Pembagian.

Misalkan keempat peubah dalam kongruensi berikut berupa bilangan bulat dan modulusnya positif: $ad \equiv bd \pmod{n}$. Maka $a \equiv b \pmod{\frac{n}{\gcd(d,n)}}$.

Jika d dan n tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, maka $\gcd(d, n) = 1$, sehingga $a \equiv b \pmod{n}$.

Contoh 6.2.5

Sederhanakan kongruensi berikut dengan menggunakan pembagian: (a) $24 \equiv 39 \pmod{5}$ dan (b) $24 \equiv 39 \pmod{15}$.

Penyelesaian. (a) 24 dan 39 sama-sama habis dibagi 3, sedangkan 3 dan 5 tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, sehingga kita memperoleh

$$8 \equiv 13 \pmod{5}.$$

(b) Sekali lagi, kita dapat membagi dengan 3. Namun, jika pembagian

dilakukan begitu saja, kita memperoleh $8 \equiv 13 \pmod{15}$, yang tidak lagi benar. Sebagai gantinya, kita juga harus membagi modulus 15 dengan faktor persekutuan terbesar dari 3 dan 15, yaitu 3. Kita kembali memperoleh

$$8 \equiv 13 \pmod{5}.$$

6.2.4 Menyelesaikan Kongruensi

Setelah memiliki beberapa aturan aljabar yang mengatur relasi kongruensi, kita dapat mencoba mencari nilai peubah yang tidak diketahui dalam suatu kongruensi. Sebagai contoh, adakah nilai x yang memenuhi

$$3x + 2 \equiv 4 \pmod{5},$$

dan jika ada, berapakah nilainya?

Dalam contoh ini, karena modulusnya kecil, kita dapat mencoba setiap nilai x yang mungkin. Sebenarnya hanya ada 5 nilai yang perlu dipertimbangkan karena setiap bilangan bulat yang memenuhi kongruensi dapat diganti dengan bilangan bulat lain yang kongruen dengannya modulo 5. Di sini, ketika $x = 4$, kita memperoleh $3x + 2 = 14$, yang memang kongruen dengan 4 modulo 5. Ini berarti bahwa $x = 9$, $x = 14$, $x = 19$, dan seterusnya juga merupakan solusi karena, sebagaimana kita lihat di atas, mengganti suatu bilangan dalam kongruensi dengan bilangan yang kongruen tidak mengubah nilai kebenaran kongruensi tersebut.

Jadi, dalam contoh ini, cukup hitung $3x + 2$ untuk nilai-nilai $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Hasilnya berturut-turut adalah 2, 5, 8, 11, dan 14; hanya 14 yang kongruen dengan 4.

Mari kita lihat pula cara menyelesaikannya menggunakan aturan aljabar kongruensi. Jika modulusnya lebih besar, pendekatan ini jauh lebih sederhana daripada cara coba-coba. Pertama, kita tahu bahwa 2 dapat dikurangkan dari kedua ruas:

$$3x \equiv 2 \pmod{5}.$$

Kemudian, untuk membagi kedua ruas dengan 3, mula-mula kita tambahkan 0 pada kedua ruas. Tentu saja, pada ruas kanan kita ingin menuliskan 0 tersebut sebagai 10 (ya, 10 memang setara dengan 0 karena keduanya kongruen modulo 5). Ini menghasilkan

$$3x \equiv 12 \pmod{5}.$$

Sekarang, bagi kedua ruas dengan 3. Karena $\gcd(3, 5) = 1$, kita tidak perlu mengubah modulus:

$$x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Perhatikan bahwa hasil ini sebenarnya memberikan *solusi umum*: bukan hanya $x = 4$, melainkan x dapat berupa sembarang bilangan yang kongruen dengan 4. Kita dapat membiarkannya dalam bentuk ini, atau menulis "$x = 4 + 5k$ untuk sembarang bilangan bulat k."

Contoh 6.2.6

Selesaikan kongruensi berikut untuk x.

1. $7x \equiv 12 \pmod{13}$.
2. $84x - 38 \equiv 79 \pmod{15}$.
3. $20x \equiv 23 \pmod{14}$.

Penyelesaian.

1. Di sini, kita hanya perlu membagi kedua ruas dengan 7. Tambahkan 13 berulang kali pada ruas kanan sampai kita memperoleh kelipatan 7 (menambahkan 13 sama dengan menambahkan 0, sehingga langkah ini sah). Kita memperoleh 25, 38, 51, 64, 77 – berhasil. Jadi, kita memiliki:

$$\begin{aligned} 7x &\equiv 12 \pmod{13} \\ 7x &\equiv 77 \pmod{13} \\ x &\equiv 11 \pmod{13}. \end{aligned}$$

2. Di sini, karena terdapat bilangan yang lebih besar daripada modulus, kita dapat mereduksinya sebelum menerapkan operasi aljabar apa pun. Kita memiliki $84 \equiv 9 \pmod{15}$, $38 \equiv 8 \pmod{15}$, dan $79 \equiv 4 \pmod{15}$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} 84x - 38 &\equiv 79 \pmod{15} \\ 9x - 8 &\equiv 4 \pmod{15} \\ 9x &\equiv 12 \pmod{15} \\ 9x &\equiv 72 \pmod{15}. \end{aligned}$$

Kita memperoleh 72 dengan menambahkan $0 \equiv 60 \pmod{15}$ pada kedua ruas kongruensi. Sekarang, bagi kedua ruas dengan 9. Namun, karena $\gcd(9, 15) = 3$, modulusnya juga harus dibagi 3:

$$x \equiv 8 \pmod{5}.$$

Jadi, solusinya adalah nilai-nilai yang kongruen dengan 8, atau secara ekuivalen dengan 3, modulo 5. Ini berarti bahwa, dalam arti tertentu, terdapat 3 solusi modulo 15: 3, 8, dan 13. Kita dapat menuliskan solusinya sebagai berikut:

$$x \equiv 3 \pmod{15}; \quad x \equiv 8 \pmod{15}; \quad x \equiv 13 \pmod{15}.$$

3. Mula-mula, lakukan reduksi modulo 14:

$$20x \equiv 23 \pmod{14}$$

$$6x \equiv 9 \pmod{14}.$$

Sekarang kita dapat membagi kedua ruas dengan 3 atau mencoba menambah 9 dengan suatu kelipatan 14 agar memperoleh kelipatan 6. Jika kita membagi dengan 3, kita memperoleh

$$2x \equiv 3 \pmod{14}.$$

Sekarang, cobalah menambahkan kelipatan 14 pada 3 dengan harapan memperoleh bilangan yang dapat dibagi 2. Cara ini tidak akan berhasil! Setiap kali kita menambahkan 14 pada ruas kanan, hasilnya akan tetap ganjil. Kita tidak akan pernah memperoleh bilangan genap, sehingga tidak akan pernah dapat membaginya dengan 2. Jadi, kongruensi tersebut tidak memiliki solusi.

Kongruensi terakhir di atas menunjukkan bagaimana suatu kongruensi dapat tidak memiliki solusi. Sebenarnya, kita dapat langsung mengetahuinya. Perhatikan kongruensi semula:

$$20x \equiv 23 \pmod{14}.$$

Jika ditulis sebagai persamaan, kita memperoleh

$$20x = 23 + 14k,$$

atau secara ekuivalen $20x - 14k = 23$. Kita dapat dengan mudah melihat bahwa persamaan ini tidak memiliki solusi bilangan bulat. Ruas kiri akan selalu genap, sedangkan ruas kanan ganjil. Masalah serupa muncul jika ruas kiri selalu habis dibagi oleh *suatu* bilangan yang tidak membagi ruas kanan.

Jadi, secara umum, untuk kongruensi

$$ax \equiv b \pmod{n},$$

jika a dan n habis dibagi oleh suatu bilangan yang tidak membagi b, kongruensi tersebut tidak memiliki solusi. Bahkan, kita hanya perlu memeriksa FPB dari a dan n. Dengan demikian, pernyataan ini dapat ditulis secara lebih ringkas sebagai berikut:

Kongruensi Tanpa Solusi.

Jika $\gcd(a, n) \nmid b$, maka $ax \equiv b \pmod{n}$ tidak memiliki solusi.

6.2.5 Menyelesaikan Persamaan Diofantin Linear

Matematika diskret membahas situasi ketika banyaknya benda berupa bilangan bulat. Jadi, ketika ingin menyelesaikan persamaan, kita biasanya mencari solusi

berupa *bilangan bulat*. Persamaan yang solusinya hanya dicari dalam bilangan bulat pertama kali dipelajari pada abad ketiga oleh matematikawan Yunani Diofantos dari Aleksandria, sehingga disebut *persamaan Diofantin*. Contoh persamaan Diofantin yang mungkin paling terkenal ialah $a^2 + b^2 = c^2$. Solusi bilangan bulat dari persamaan ini disebut **tripel Pythagoras**. Secara umum, menyelesaikan persamaan Diofantin itu sulit (bahkan, dapat dibuktikan bahwa tidak ada algoritma umum untuk menentukan apakah suatu persamaan Diofantin memiliki solusi; hasil ini dikenal sebagai Teorema Matiyasevich). Kita akan membatasi pembahasan pada persamaan Diofantin *linear*, yang jauh lebih mudah ditangani.

Persamaan Diofantin.

Persamaan polinomial berkoefisien bilangan bulat dalam satu peubah atau lebih disebut **persamaan Diofantin** jika hanya solusi bilangan bulat yang dicari. Persamaan Diofantin **linear** berbentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ untuk konstanta $a_1, \ldots, a_n, b$.

Solusi persamaan Diofantin adalah solusi persamaan yang seluruh komponennya berupa bilangan bulat.

Kita telah memiliki alat yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan Diofantin linear. Sebagai contoh utama, kita akan membahas persamaan

$$51x + 87y = 123.$$

Strategi umumnya adalah mengubah persamaan menjadi kongruensi, lalu menyelesaikan kongruensi tersebut.[4] Mari kita kerjakan contoh ini untuk melihat prosesnya.

Pertama, periksa apakah persamaan mungkin tidak memiliki solusi karena suatu pembagi dari 51 dan 87 tidak membagi 123. Sebenarnya, kita hanya perlu memeriksa apakah $\gcd(51, 87) \mid 123$. FPB ini adalah 3, dan memang $3 \mid 123$. Pada tahap ini, sebaiknya kita mengeluarkan faktor persekutuan terbesar tersebut. Jadi, kita akan menyelesaikan:

$$17x + 29y = 41.$$

Sekarang, perhatikan bahwa jika solusi memang ada, maka untuk nilai x dan y tersebut, kedua ruas persamaan harus memiliki sisa yang sama, apa pun pembagi yang digunakan. Secara khusus, jika kedua ruas dibagi 17, sisanya harus sama. Dengan demikian, kita dapat menulis

$$17x + 29y \equiv 41 \pmod{17}.$$

Kita memilih 17 karena $17x$ akan bersisa 0. Hal ini memungkinkan kita mereduksi kongruensi menjadi kongruensi dengan satu peubah saja. Kita juga dapat beralih ke kongruensi modulo 29, tetapi biasanya ada alasan yang baik untuk memilih

[4] Ini tentu bukan satu-satunya cara yang dapat digunakan. Teknik yang lebih umum ialah menerapkan **algoritma Euklides**. Cara kita dapat sedikit lebih cepat dan disajikan di sini terutama untuk memberikan variasi.

bilangan yang lebih kecil karena pilihan ini memungkinkan kita mereduksi koefisien yang lain. Dalam kasus ini, kita mereduksi kongruensi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 17x + 29y &\equiv 41 \pmod{17} \\ 0x + 12y &\equiv 7 \pmod{17} \\ 12y &\equiv 24 \pmod{17} \\ y &\equiv 2 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Pada tahap ini, kita tahu bahwa $y = 2 + 17k$ akan memenuhi kongruensi tersebut untuk sembarang bilangan bulat k. Jika tidak melakukan kesalahan, kita dapat menyubstitusikannya kembali ke persamaan Diofantin semula untuk mencari x:

$$\begin{aligned} 17x + 29(2 + 17k) &= 41 \\ 17x &= -17 - 29 \cdot 17k \\ x &= -1 - 29k. \end{aligned}$$

Sekarang kita telah menemukan semua solusi persamaan Diofantin tersebut. Untuk setiap k, $x = -1 - 29k$ dan $y = 2 + 17k$ akan memenuhi persamaan. Kita dapat memeriksanya untuk beberapa kasus. Jika $k = 0$, solusinya adalah $(-1, 2)$, dan memang $-17 + 2 \cdot 29 = 41$. Jika $k = 3$, solusinya adalah $(-88, 53)$. Jika $k = -2$, kita memperoleh $(57, -32)$.

Sebagai rangkuman, untuk menyelesaikan $ax + by = c$ dengan kedua koefisien tak nol, kita dapat mengubah tanda peubah jika perlu agar kedua koefisien positif, lalu melakukan langkah-langkah berikut.

1. Bagi kedua ruas persamaan dengan $\gcd(a, b)$ (jika ruas kanan tidak menjadi bilangan bulat, persamaan tidak memiliki solusi). Untuk langkah-langkah selanjutnya, asumsikan bahwa $ax + by = c$ sudah direduksi dengan cara ini.

2. Pilih yang lebih kecil di antara a dan b (di sini, asumsikan yang lebih kecil adalah b), lalu ubah menjadi kongruensi modulo b:

   $$ax + by \equiv c \pmod{b}.$$

   Bentuk ini akan tereduksi menjadi kongruensi dengan satu peubah, yaitu x:

   $$ax \equiv c \pmod{b}.$$

3. Selesaikan kongruensi sebagaimana dilakukan pada bagian sebelumnya. Tuliskan solusi sebagai persamaan, misalnya

   $$x = n + kb.$$

4. Substitusikan hasil ini ke persamaan Diofantin semula, lalu selesaikan untuk y.

5. Jika kita ingin mengetahui solusi dalam rentang tertentu (misalnya, $0 \le x, y \le 20$), pilih berbagai nilai k hingga semua solusi yang diminta ditemukan.

Berikut contoh lainnya:

Contoh 6.2.7

Bagaimana Anda dapat membentuk nilai US$6,37 hanya dengan perangko 5 sen dan 8 sen? Berapakah jumlah perangko paling sedikit dan paling banyak yang dapat digunakan?

Penyelesaian. Pertama, kita memerlukan persamaan Diofantin. Kita akan menggunakan satuan sen. Misalkan x adalah banyaknya perangko 5 sen dan y adalah banyaknya perangko 8 sen. Kita memperoleh:

$$5x + 8y = 637.$$

Ubah menjadi kongruensi dan selesaikan:

$$\begin{aligned} 8y &\equiv 637 \pmod 5 \\ 3y &\equiv 2 \pmod 5 \\ 3y &\equiv 12 \pmod 5 \\ y &\equiv 4 \pmod 5. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $y = 4 + 5k$. Selanjutnya, $5x + 8(4 + 5k) = 637$, sehingga $x = 121 - 8k$.

Ini menyatakan bahwa salah satu cara membentuk nilai US$6,37 adalah menggunakan 121 perangko 5 sen dan 4 perangko 8 sen. Untuk mencari jumlah perangko paling sedikit dan paling banyak, cobalah berbagai nilai k.

k	(x, y)	Jumlah perangko
-1	(129, -1)	tidak mungkin
0	(121, 4)	125
1	(113, 9)	122
2	(105, 14)	119
⋮	⋮	⋮

Hasil ini tidak mengejutkan. Jumlah perangko terbanyak diperoleh ketika kita menggunakan sebanyak mungkin perangko 5 sen, sedangkan jumlah perangko paling sedikit mengharuskan kita menggunakan sesedikit mungkin perangko 5 sen. Untuk meminimalkan banyaknya perangko 5 sen, kita ingin memilih k agar $121 - 8k$ sekecil mungkin (tetapi tetap tak negatif). Ketika $k = 15$, kita memiliki $x = 1$ dan $y = 79$.

Jadi, untuk membentuk nilai US$6,37, Anda dapat menggunakan sedikitnya 80 perangko (1 perangko 5 sen dan 79 perangko 8 sen) atau sebanyak-banyaknya 125 perangko (121 perangko 5 sen dan 4 perangko 8 sen).

Dengan metode ini, selama Anda dapat menyelesaikan kongruensi linear dalam satu peubah, Anda dapat menyelesaikan persamaan Diofantin linear dalam dua

peubah. Namun, adakalanya penyelesaian kongruensi linear memerlukan banyak pekerjaan. Sebagai contoh, misalkan Anda perlu menyelesaikan

$$13x \equiv 6 \pmod{51}.$$

Anda *dapat* terus menambahkan 51 pada ruas kanan sampai memperoleh kelipatan 13: hasilnya adalah 57, 108, 159, 210, 261, 312, dan 312 merupakan bilangan pertama dalam daftar ini yang habis dibagi 13. Cara ini berhasil, tetapi benar-benar terlalu merepotkan. Sebagai gantinya, kita dapat mengubahnya *kembali* menjadi persamaan Diofantin:

$$13x = 6 + 51k.$$

Sekarang, selesaikan persamaan *ini* seperti yang telah dilakukan dalam bagian ini. Tuliskan sebagai kongruensi modulo 13:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 6 + 51k \pmod{13} \\ -12k &\equiv 6 \pmod{13} \\ 2k &\equiv -1 \pmod{13} \\ 2k &\equiv 12 \pmod{13} \\ k &\equiv 6 \pmod{13}. \end{aligned}$$

sehingga $k = 6 + 13j$. Sekarang, kembali dan tentukan x:

$$\begin{aligned} 13x &= 6 + 51(6 + 13j) \\ x &= 24 + 51j. \end{aligned}$$

Tentu saja, Anda dapat beralih bolak-balik antara kongruensi dan persamaan Diofantin sebanyak yang diperlukan. Jika Anda *hanya* menggunakan teknik ini, pada dasarnya Anda akan mereplikasi algoritma Euklides, yaitu cara yang lebih baku untuk menyelesaikan persamaan Diofantin.

6.2.6 Latihan

1. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $a \mid b$, maka $a \mid bc$.

2. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid b + c$ dan $a \mid b - c$.

3. Tuliskan kelas-kelas sisa untuk $n = 4$.

4. Berapakah bilangan bulat positif n terbesar sedemikian sehingga 16 dan 25 berada dalam kelas sisa yang sama modulo n? Tuliskan kelas sisa yang memuat keduanya dan berikan contoh bilangan yang lebih besar dari 100 dalam kelas tersebut.

5. Misalkan a, b, serta c, d semuanya bilangan bulat; misalkan pula n bilangan bulat positif. Buktikan bahwa jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$, maka $a - c \equiv b - d \pmod{n}$.

6. Tentukan sisa pembagian 3^{456} oleh

(a) 2. (b) 5. (c) 7. (d) 9.

7. Ulangi latihan sebelumnya, kali ini dengan menentukan sisa pembagian 2^{2019} oleh bilangan-bilangan yang sama.

8. Tentukan kongruensi berikut yang memiliki solusi, lalu temukan semua solusinya (mulai dari 0 hingga satu kurang dari modulusnya) dengan cara coba-coba.

(a) $4x \equiv 5 \pmod 6$.

(b) $6x \equiv 3 \pmod 9$.

(c) $x^2 \equiv 2 \pmod 4$.

9. Tentukan kongruensi berikut yang memiliki solusi, lalu temukan semua solusinya (mulai dari 0 hingga satu kurang dari modulusnya) dengan cara coba-coba.

(a) $4x \equiv 5 \pmod 7$.

(b) $6x \equiv 4 \pmod 9$.

(c) $x^2 \equiv 2 \pmod 7$.

10. Selesaikan kongruensi $5x + 8 \equiv 11 \pmod{22}$. Artinya, nyatakan solusi umumnya.

11. Selesaikan kongruensi $6x \equiv 4 \pmod{10}$.

12. Selesaikan kongruensi $4x \equiv 24 \pmod{30}$.

13. Selesaikan kongruensi $341x \equiv 2941 \pmod 9$.

14. Saya sedang memikirkan suatu bilangan. Jika bilangan saya dikalikan 7, lalu ditambah 5, dan hasilnya dibagi 11, sisanya adalah 2. Berapakah sisa yang diperoleh jika bilangan semula dibagi 11?

15. Selesaikan persamaan Diofantin linear berikut menggunakan aritmetika modular (nyatakan solusi umumnya).

$$6x + 10y = 32.$$

16. Selesaikan persamaan Diofantin linear berikut menggunakan aritmetika modular (nyatakan solusi umumnya).

$$17x + 8y = 31.$$

17. Selesaikan persamaan Diofantin linear berikut menggunakan aritmetika modular (nyatakan solusi umumnya).

$$35x + 47y = 1.$$

18. Anda memiliki sebuah botol berkapasitas 13 oz dan sebuah botol berkapasitas 20 oz yang hendak digunakan untuk menakar tepat 2 oz. Anda hanya boleh mengisi sebuah botol sampai penuh, menuang air dari satu botol ke botol lain sampai botol pertama kosong atau botol kedua penuh, dan mengosongkan sebuah botol. Namun, persediaan air Anda terbatas. Jika air sudah masuk ke salah satu botol lalu dibuang, air itu hilang dan tidak dapat digunakan lagi. Berapa volume air paling sedikit yang harus tersedia pada awalnya agar tugas ini tetap dapat diselesaikan?

Petunjuk Terpilih

1 · Logika dan Pembuktian
1.1 · Pernyataan Matematis
1.1.6 · Latihan Tambahan

1.1.6.3. Pertama-tama, tentukan makna setiap pernyataan. Untuk butir (c), Anda tidak perlu mengasumsikan bahwa semestanya merupakan himpunan tak hingga.

1.2 · Implikasi
1.2.6 · Latihan Tambahan

1.2.6.4. Tentu terdapat banyak jawaban. Akan membantu jika Anda mengasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar dan konversnya *tidak* benar. Pikirkan maknanya dalam dunia nyata, lalu mulailah menyatakannya dengan berbagai cara. Beberapa gagasan: gunakan bahasa "perlu dan cukup", gunakan "hanya jika", pertimbangkan negasi, dan gunakan ungkapan "atau jika tidak".

1.3 · Aturan Logika
1.3.8 · Latihan Tambahan

1.3.8.1. Anda mungkin dapat menalar setiap kasus secara langsung, tetapi cobalah membuat tabel kebenaran. Gunakan dua pernyataan: P menyatakan "kami sepupu" dan Q menyatakan "kami berdua adalah penipu".

1.3.8.4. Tuliskan tiga pernyataan menggunakan simbol P, Q, R, S. Jika Geoff adalah orang yang selalu berkata benar, ketiga pernyataan tersebut benar. Jika ia pembohong, ketiganya salah. Namun, dalam kedua kasus itu, kita belum mengetahui apakah keempat pernyataan atomik tersebut benar atau salah karena ia tidak mengucapkannya secara tersendiri.

Tabel kebenaran mungkin membantu, meskipun barangkali tidak mutlak diperlukan.

1.3.8.8.

(a) Akan ada tiga baris yang pernyataannya bernilai salah.

(b) Perhatikan tiga baris yang bernilai salah, lalu nyatakan nilai kebenaran T, S, dan P pada baris-baris tersebut.

(c) Carilah baris tempat P bernilai benar dan seluruh pernyataan juga bernilai benar.

1.3.8.9. Tuliskan tiga pernyataan, lalu ambil negasi masing-masing (karena ia pembohong). Anda seharusnya menemukan bahwa Tommy makan satu jenis makanan dan minum satu jenis minuman. (Q menyatakan roti lapis mentimun.)

1.3.8.11. Apa arti konsep-konsep ini jika dinyatakan dalam tabel kebenaran?

1.3.8.14. Cobalah sebuah contoh. Bagaimana jika $P(x)$ adalah predikat "x merupakan bilangan prima"? Bagaimana jika predikatnya adalah "Jika x habis dibagi 4, maka bilangan itu genap"? Tentu saja, contoh tidak cukup untuk membuktikan sesuatu secara umum, tetapi justru itulah inti pertanyaan ini.

1.3.8.15. Mungkin akan membantu jika pernyataan-pernyataan tersebut dinyatakan dengan simbol, lalu aturan-aturan formal digunakan untuk menyederhanakan negasi (yaitu aturan untuk kuantor dan hukum De Morgan). Setelah disederhanakan, untuk pernyataan pertama, misalnya, Anda seharusnya memperoleh $\forall x(\neg E(x) \wedge \neg O(x))$. Kemudian nyatakan kembali hasilnya dalam bahasa Indonesia.

1.4 · Pembuktian
1.4.8 · Latihan Tambahan

1.4.8.6. Salah satu implikasi dapat dibuktikan secara langsung; implikasi lainnya dapat dibuktikan melalui kontraposisi.

1.4.8.7. Soal ini pada dasarnya meminta Anda memodifikasi pembuktian bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irasional. Dalam pembuktian tersebut Anda menunjukkan bahwa bilangan-bilangan tertentu genap; di sini Anda akan menunjukkan bahwa bilangan-bilangan tersebut merupakan kelipatan 3.

1.4.8.8. Bagian (a) dapat dibuktikan dengan pembuktian langsung yang relatif mudah. Carilah contoh penyangkal untuk bagian (b).

1.4.8.10. Pembuktian dengan kontradiksi cocok digunakan di sini karena Anda dapat mengasumsikan bahwa *a dan b* keduanya ganjil. Simpulkan bahwa c^2 genap dan karena itu merupakan kelipatan 4 (mengapa? dan mengapa hal tersebut merupakan kontradiksi?).

1.4.8.12. Gunakan metode pembuktian yang berbeda untuk setiap bagian.

1.4.8.14. Perhatikan bahwa jika $\log(7) = \frac{a}{b}$, maka $7 = 10^{\frac{a}{b}}$. Dapatkah suatu pangkat dari 7 sama dengan suatu pangkat dari 10?

1.4.8.15. Bagaimana jika solusi semacam itu ada? Simpulkan bahwa x harus ganjil, lalu lanjutkan hingga memperoleh kontradiksi.

1.4.8.16. Buktikan kontraposisinya dengan pembuktian per kasus. Terdapat 4 kasus yang perlu diperhatikan.

1.4.8.17. Pembuktian teman Anda memang membuktikan sesuatu, tetapi apa? Implikasi apa yang mengikuti dari pembuktian tersebut? Apakah hal itu membantu?

1.4.8.19. Perhatikan himpunan *banyaknya* teman yang dimiliki setiap orang. Jika setiap orang memiliki jumlah teman yang berbeda, himpunan ini harus memuat 20 elemen. Apakah hal itu mungkin? Mengapa tidak?

1.4.8.20. Soal ini terasa seperti penerapan prinsip sarang merpati, meskipun sedikit lebih rumit. Setidaknya, Anda dapat mencoba meniru gaya pembuktian yang digunakan pada prinsip sarang merpati. Bagaimana jarak antarepisode harus diatur

agar tidak ada dua dari 60 episode yang posisinya berselisih tepat 4?

1.5 · Bukti tentang Struktur Diskret
1.5.8 · Latihan Tambahan

1.5.8.1. Untuk membuktikan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cup B = B$, Anda perlu membuktikan dua implikasi:

(a) Jika $A \subseteq B$, maka $A \cup B = B$.

(b) Jika $A \cup B = B$, maka $A \subseteq B$.

Untuk membuktikan bahwa dua himpunan sama, biasanya kita membuktikan bahwa masing-masing merupakan himpunan bagian dari yang lain.

2 · Teori Graf
2.1 · Masalah dan Definisi
2.1.4 · Soal Latihan

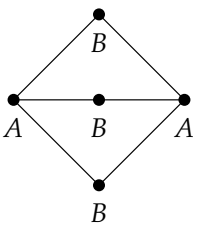
2.1.4.5. Ingatlah bahwa P_n adalah lintasan yang memuat n sisi dan $n + 1$ simpul.

2.1.5 · Latihan Tambahan

2.1.5.3. Kedua situasi tersebut mungkin terjadi. Carilah beberapa contohnya.

2.1.5.6. Bagian graf bipartit sedikit lebih rumit. Anda tentu memerlukan graf bipartit lengkap, tetapi grafnya dapat berupa $K_{5,5}$, mungkin $K_{1,9}$, atau . . .

2.1.5.7. Graf pertama bipartit, sebagaimana terlihat dengan memberi label berikut.



Dua dari tiga graf lainnya juga bipartit.

2.1.5.8. C_4 bipartit, sedangkan C_5 tidak. Bagaimana dengan semua nilai n lainnya?

2.1.5.11. Anda seharusnya dapat menyimpulkan semuanya langsung dari definisi. Namun, mungkin akan membantu jika diketahui bahwa N melambangkan **lingkungan**.

2.1.5.12. Pastikan bahwa sisi-sisinya tidak "berarah." Dalam graf, jika a bertetangga dengan b, maka b bertetangga dengan a. Dalam bahasa relasi, kita mengatakan bahwa relasi sisi bersifat **simetris**.

2.1.5.13. Anda mungkin perlu menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut untuk beberapa nilai khusus n agar memahami polanya, tetapi jawaban akhir harus dinyatakan dalam n.

2.1.5.14. Cobalah contoh kecil terlebih dahulu: setiap graf dengan 8 simpul pasti memiliki dua simpul dengan derajat yang sama. Jika tidak demikian, seperti apakah barisan derajatnya?

2.1.5.15. Gunakan lema jabat tangan 2.1.8. Apa yang akan terjadi jika semua simpul berderajat 2?

2.2 · Pohon
2.2.7 · Latihan Tambahan

2.2.7.3. Berhati-hatilah: graf-graf tersebut mungkin tidak terhubung.

2.2.7.4. Cobalah gunakan Latihan 2.2.7.2.

2.2.7.5. Cobalah bukti dengan kontradiksi dan tinjau suatu pohon merentang dari graf tersebut.

2.2.7.7. Untuk bagian (b), mencoba beberapa contoh sederhana seharusnya membantu Anda menemukan rumusnya. Setelah itu, Anda hanya perlu membuktikan bahwa rumus tersebut benar.

2.2.7.8. Dengan mencermati bukti Proposisi 2.2.2, Anda akan memperoleh hampir semua hal yang diperlukan. Namun, pastikan Anda hanya memberikan bagian-bagian yang relevan dan berhati-hatilah agar tidak menggunakan bukti dengan kontradiksi.

2.2.7.9. Minimalitas di sini harus dinyatakan dalam banyaknya simpul. Jika Anda memiliki contoh penyangkal minimal dan menghapus suatu simpul daun, graf yang dihasilkan akan menjadi pohon yang lebih kecil, sehingga...

2.2.7.10. Jika e merupakan akar, maka b akan memiliki tiga anak (a, c, dan d); ketiganya merupakan saudara kandung dan memiliki b sebagai induk. a tidak akan memiliki anak.

Secara umum, bagaimana Anda dapat menentukan banyaknya anak yang dimiliki suatu simpul jika simpul tersebut bukan akar?

2.2.7.14. Terdapat contoh dengan 7 sisi.

2.2.7.15. Latihan sebelumnya akan membantu.

2.2.7.16. Perhatikan bahwa jika sisi semacam itu dihapus, graf akan menjadi tidak terhubung. Graf yang memiliki sisi seperti ini disebut graf **terhubung-1**.

2.3 · Graf Planar
2.3.7 · Latihan Tambahan

2.3.7.3. Apa yang dinyatakan oleh rumus Euler?

2.3.7.5. Anda dapat menggunakan lema jabat tangan untuk menyatakan banyaknya sisi dalam v, yaitu banyaknya simpul.

2.3.7.11. Berapa panjang siklus terpendeknya? (Besaran ini biasanya disebut **panjang siklus terpendek (girth)** suatu graf.)

2.3.7.14. Panjang siklus terpendek (girth) graf tersebut adalah 4.

2.3.7.15. Apa yang terjadi pada panjang siklus terpendek (girth)? Hati-hati: banyaknya sisi juga berbeda. Sebaiknya periksa rumus Euler.

2.4 · Jejak dan Sirkuit Euler
2.4.6 · Latihan Tambahan

2.4.6.7. Soal ini lebih sulit daripada tiga soal sebelumnya. Pikirkan pada "bagian" graf yang mana lintasan Hamilton harus berada pada setiap langkah berselang-seling.

2.4.6.9. Jika nama para mahasiswa dibaca menurut urutan tempat duduk, setiap nama harus dibaca tepat satu kali, dan nama terakhir harus merupakan mahasiswa yang berteman dengan mahasiswa pertama. Siklus jenis apakah ini?

2.4.6.10. Gambarlah graf dengan 6 simpul dan 8 sisi. Jenis jalan apakah yang sesuai?

2.5 · Pewarnaan
2.5.6 · Latihan Tambahan

2.5.6.6.

(c) Apakah pada akhirnya Anda akan mewarnai setiap simpul dengan mengikuti prosedur tersebut? Mungkinkah ada simpul yang tidak dapat Anda warnai sesuai prosedur itu?

2.5.6.7.

(a) Representasikan tim sebagai simpul dan pertandingan sebagai sisi. Manakah yang lebih tepat untuk diwarnai?

2.5.6.10. Bilangan kromatiknya adalah 4. Sekarang, buktikanlah!

Perhatikan bahwa di sini Anda tidak dapat menggunakan teorema empat warna, teorema Brooks, ataupun bilangan klik. Faktanya, graf ini, yang disebut *graf Grötzsch*, merupakan graf terkecil dengan bilangan kromatik 4 yang tidak memuat segitiga.

2.5.6.13. Anda dapat mewarnai K_5 sedemikian rupa sehingga setiap simpul bersisian dengan tepat dua sisi biru dan dua sisi merah. Namun, terdapat sebuah graf dengan hanya 5 sisi yang pasti menghasilkan suatu simpul yang bersisian dengan tiga sisi berwarna sama, apa pun pewarnaan sisi-sisinya. Graf apakah itu, dan bagaimana Anda dapat menggeneralisasikannya?

2.5.6.14. Latihan sebelumnya berguna sebagai titik awal.

2.8 · Ringkasan Bab

· Tinjauan Bab

2.8.23. Anda dapat membagi bukti menjadi dua bagian. Pertama, buktikan dengan induksi bahwa siklus C_n memenuhi $v = e$. Kemudian, tinjau apa yang terjadi jika graf tersebut tidak hanya terdiri atas siklus itu.

3 · Pencacahan
3.2 · Menggabungkan Hasil
3.2.6 · Soal Latihan

3.2.6.9. Pisahkan pertanyaan ini menjadi 4 kasus.

3.2.7 · Latihan Tambahan

3.2.7.2. Sebagai contoh yang lebih sederhana, terdapat 4 pembagi dari $6 = 2 \cdot 3$. Keempatnya adalah $1 = 2^0 \cdot 3^0$, $2 = 2^1 \cdot 3^0$, $3 = 2^0 \cdot 3^1$, dan $6 = 2^1 \cdot 3^1$.

3.3 · Hasil yang Tidak Saling Lepas
3.3.6 · Soal Latihan

3.3.6.6. Untuk menentukan banyak bilangan yang habis dibagi 4 dan 5, misalnya, hitung $715/(4 \cdot 5)$ lalu bulatkan ke bawah.

3.3.7 · Latihan Tambahan

3.3.7.1. Untuk bagian (a), Anda dapat menggunakan rumus PIE, tetapi untuk bagian (b), menggambar diagram Venn mungkin lebih membantu.

3.3.7.2. Anda dapat mempertimbangkan beberapa kasus. Sebagai contoh, sembarang bilangan berbentuk GANJIL-GANJIL-GENAP akan memiliki jumlah digit yang genap. Sebagai alternatif, ada berapa banyak bilangan tiga digit dengan jumlah digit genap jika dua digit pertamanya adalah 54? Bagaimana jika dua digit pertamanya adalah 19?

3.4 · Kombinasi dan Permutasi
3.4.7 · Latihan Tambahan

3.4.7.1. Jika Anda memilih sembarang tiga titik, Anda dapat membentuk sebuah segitiga, kecuali jika ketiga titik itu semuanya berada pada sumbu x atau sumbu y. Ada pula cara lain untuk memulai penyelesaian ini, dan setiap metode yang benar seharusnya memberikan jawaban yang sama.

3.5 · Menghitung Multihimpunan
3.5.5 · Soal Latihan

3.5.5.6. Peluangnya adalah 1 dibagi banyaknya kombinasi berbeda dari 9 keping uang logam yang mungkin dimiliki teman Anda.

3.5.6 · Latihan Tambahan

3.5.6.3.

(b) Hal ini sebenarnya memerlukan pembuktian empat fakta: setiap multihimpunan berkorespondensi dengan sedikitnya satu diagram, dan setiap diagram berkorespondensi dengan sedikitnya satu multihimpunan; lalu setiap multihimpunan berkorespondensi dengan paling banyak satu diagram, dan setiap diagram berkorespondensi dengan paling banyak satu multihimpunan. Dengan kata lain, kita harus membuktikan bahwa fungsi tersebut terdefinisi dengan baik, injektif, dan surjektif.

3.6 · Pembuktian Kombinatorial
3.6.6 · Latihan Tambahan

3.6.6.3. Akan terdapat 185 segitiga. Namun, untuk menemukannya . . .

(a) Berapa banyak simpul segitiga yang dapat berada pada sumbu horizontal?

(b) Apakah *sembarang* tiga titik dapat menjadi simpul-simpulnya?

3.6.6.4. Jawabannya adalah 120.

3.6.6.6. Cobalah Latihan 3.6.6.5.

3.6.6.7. Bagaimana jika Anda menginginkan sepasang pengiring pengantin utama bersama?

3.6.6.8. Untuk pembuktian kombinatorial: bagaimana jika Anda belum mengetahui berapa banyak pengiring pengantin yang akan dipilih?

3.6.6.9. Hitung jabat tangan.

3.6.6.13. Soal ini mungkin mengingatkan Anda pada Contoh 3.6.6

3.6.6.14. Untuk lintasan kisi, pikirkan jenis lintasan yang dicacah oleh 2^n. Tidak semua lintasan akan berakhir pada titik yang sama, tetapi Anda dapat mendeskripsikan himpunan titik akhirnya sebagai sebuah garis.

3.6.6.16. Berapa banyak sisi yang dimiliki K_n? Salah satu dari kedua graf tidak akan terhubung (kecuali $j = 1$).

3.7 · Penerapan pada Peluang
3.7.6 · Soal Latihan

3.7.6.7.

(b) Anda dapat mendaftarkan semua cara memperoleh jumlah 6 atau menggunakan metode batang dan batu.

3.7.7 · Latihan Tambahan

3.7.7.4. Gunakan peluang komplemen. Jangan terkejut jika jawaban Anda lebih besar daripada yang diperkirakan.

3.9 · Ringkasan Bab

· Tinjauan Bab

3.9.16. Gunakan metode batang dan batu.

4 · Barisan
4.1 · Mendeskripsikan Barisan
4.1.6 · Soal Latihan

4.1.6.4. Cobalah menambah atau mengurangi setiap suku dengan bilangan kecil yang sama untuk melihat apakah Anda mengenali barisan tersebut.

4.1.6.5. Cobalah menambah, mengurangi, atau membagi setiap suku dengan suatu konstanta agar pola barisan lebih mudah dikenali.

Untuk bagian (d), cobalah menyatakan barisan sebagai jumlah dua barisan yang sudah dikenal.

4.1.7 · Latihan Tambahan

4.1.7.8. Tuliskan barisannya, dugalah rumus tertutupnya, lalu verifikasi bahwa dugaan Anda benar.

4.1.7.9. Tuliskan barisannya, dugalah definisi rekursifnya, lalu verifikasi bahwa rumus tertutup tersebut merupakan solusi definisi rekursif itu.

4.1.7.12. Cobalah sebuah contoh: ketika garis keempat digambar, garis tersebut memotong tiga garis lain sehingga terbagi menjadi empat ruas, dua di antaranya tak terbatas. Setiap ruas membagi satu daerah yang sudah ada menjadi dua.

4.1.7.13. Pertimbangkan tiga kasus: angka terakhir adalah 0, 1, atau 2. Dua kasus mudah dicacah, tetapi string yang berakhir dengan 0 tidak boleh didahului oleh 2, sehingga kasus ini memerlukan sedikit usaha tambahan.

4.1.7.15. Berpikirlah secara rekursif, seperti yang Anda lakukan pada segitiga Pascal.

4.1.7.16. Hanya ada satu cara mengubin papan berukuran 2×1 dan dua cara mengubin papan berukuran 2×2 (domino dapat diorientasikan dengan dua cara). Secara umum, pertimbangkan dua kemungkinan orientasi domino yang menutupi sudut kiri atas.

4.2 · Laju Pertumbuhan
4.2.7 · Latihan Tambahan

4.2.7.5. Kita dapat menuliskan relasi rekurensi sebagai $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$. Apa yang terjadi ketika Anda mengalikan semua versi relasi rekurensi ini (untuk nilai n yang berbeda-beda)?

4.2.7.6. Peneleskopan untuk Menentukan Jumlah.

Dengan menggunakan fakta bahwa $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, setiap suku dalam barisan adalah $\frac{2}{n(n+1)}$.

Apa hasil pengurangan pecahan berikut: $\frac{2}{3} - \frac{2}{4}$, atau $\frac{2}{4} - \frac{2}{5}$? Apa yang terjadi secara umum?

4.4 · Barisan Eksponensial
4.4.5 · Soal Latihan

4.4.5.3. Gunakan metode teleskopik atau iterasi.

4.5 · Pembuktian dengan Induksi
4.5.7 · Latihan Tambahan

4.5.7.9. Tidak mungkin mencetak tepat 11 poin. Dapatkah Anda membuktikan bahwa Anda dapat mencetak n poin untuk setiap $n \geq 12$?

4.5.7.11. Mulailah dengan segi-$(k+1)$, lalu bagilah menjadi segi-k dan sebuah segitiga.

4.5.7.15. Untuk langkah induksi, Anda dapat mengasumsikan bahwa Anda telah memiliki barisan yang naik tegas hingga a_k, dengan $a_k < 100$. Sekarang Anda hanya perlu menentukan suku berikutnya, a_{k+1}, agar $a_k < a_{k+1} < 100$. Berapakah seharusnya a_{k+1}?

4.5.7.17. Untuk langkah induksi, Anda perlu menunjukkan bahwa $(k+1)^2 + (k+1)$ adalah genap. Jabarkan bentuk ini dan temukan bagian yang berupa $k^2 + k$. Apa yang telah Anda asumsikan tentang besaran tersebut?

4.5.7.18. Soal ini serupa dengan Latihan 4.5.7.15. Di sana Anda menunjukkan bahwa semua suku suatu barisan kurang dari suatu nilai, sedangkan di sini Anda menunjukkan bahwa setiap jumlah parsialnya kurang dari suatu nilai. Namun, jumlah-jumlah parsial tersebut membentuk sebuah barisan, sehingga kedua soal ini sebenarnya sangat serupa.

4.5.7.19. Kita telah membuktikan hasil ini tanpa menggunakan induksi, tetapi memandang masalah ini secara induktif memberikan wawasan baru (dan juga menyenangkan).

Pertanyaan yang perlu Anda jawab untuk melengkapi langkah induksi adalah: berapa banyak jabat tangan baru yang terjadi ketika orang ke-$(k+1)$ memasuki ruangan? Mengapa penambahan jumlah ini menghasilkan rumus yang benar?

4.5.7.20. Gagasannya adalah sebagai berikut: kita dapat memperoleh baris ke-$k+1$ dengan menjumlahkan pasangan-pasangan entri yang bersebelahan pada baris ke-k, dengan menganggap terdapat entri 0 di kedua ujung baris. Dengan konvensi ini, setiap entri pada baris ke-k digunakan dua kali. Jadi, setiap kali kita turun ke baris berikutnya, jumlah keseluruhannya menjadi dua kali lipat. Tentu saja, baris ke-0 memiliki jumlah $1 = 2^0$ (kasus dasar). Sekarang cobalah menyatakan gagasan ini secara tepat dalam pembuktian induksi formal. Untuk langkah induksi, Anda akan menggunakan fakta bahwa $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

4.5.7.21. Untuk memahami mengapa ini benar, cobalah pada salinan segitiga Pascal. Kita menjumlahkan entri-entri sepanjang sebuah diagonal, dimulai dari 1 di sisi kiri baris ke-4. Misalkan kita menjumlahkan 5 entri pertama pada diagonal ini. Klaimnya adalah bahwa jumlah tersebut sama dengan entri di bawah dan di sebelah kiri entri terakhir dari kelima entri itu. Perhatikan bahwa jika klaim ini benar dan kemudian kita menjumlahkan 6 entri pertama, kita perlu menambahkan entri yang terletak satu posisi di sebelah kanan jumlah sebelumnya. Namun, kedua entri ini jika dijumlahkan menghasilkan entri di bawah keduanya, yang terletak di bawah dan di sebelah kiri entri terakhir dari keenam entri pada diagonal tersebut. Jika Anda mengikuti penjelasan itu, Anda dapat melihat apa yang terjadi. Namun, penjelasan tersebut belum merupakan pembuktian yang baik. Diperlukan pembuktian induksi formal.

4.5.7.23. Anda boleh mengasumsikan bahwa kasus dasar berlaku. Untuk langkah induksi, kelompokkan semua fungsi kecuali fungsi terakhir menjadi satu jumlah

fungsi, lalu terapkan aturan turunan untuk jumlah dua fungsi, kemudian terapkan hipotesis induksi.

4.5.7.24. Untuk langkah induksi, berdasarkan aturan hasil kali untuk dua fungsi, kita mengetahui bahwa

$$(f_1 f_2 f_3 \cdots f_k f_{k+1})' = (f_1 f_2 f_3 \cdots f_k)' f_{k+1} + (f_1 f_2 f_3 \cdots f_k) f'_{k+1}.$$

Kemudian gunakan hipotesis induksi pada suku pertama, lalu terapkan sifat distributif.

4.5.7.25. Anda dapat mengasumsikan secara induktif bahwa dari $n-2$ implikasi pertama, Anda dapat menyimpulkan $P_1 \to P_{n-1}$. Kemudian Anda dapat menggunakan tabel kebenaran untuk memverifikasi bahwa aturan deduksi yang telah disederhanakan ini sah.

4.6 · Induksi Kuat

4.6.5 · Latihan Tambahan

4.6.5.1. Jika tiga kasus dasar telah dibuktikan, dapatkah Anda selalu memastikan bahwa tiga poin lagi dapat diperoleh?

4.6.5.2. Mulailah dengan segi-$(k+1)$, lalu bagilah menjadi dua poligon yang lebih kecil.

4.6.5.4. Seperti pada soal sebelumnya, dalam langkah induksi kita ingin mengurangkan sesuatu dari n. Pada soal itu kita mengurangkan pangkat terbesar dari 2 yang kurang dari n. Jadi, apa yang sebaiknya Anda kurangkan di sini?

Perhatikan bahwa Anda masih perlu memastikan bahwa jumlah yang diperoleh dari hipotesis induksi, bersama dengan bilangan yang Anda kurangkan, merupakan jumlah bilangan-bilangan Fibonacci yang *berbeda*. Bahkan, Anda dapat membuktikan bahwa tidak ada dua bilangan Fibonacci dalam jumlah tersebut yang berurutan!

4.6.5.6. Anda perlu menggunakan induksi kuat. Untuk langkah induksi, coba kalikan $\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$, lalu kelompokkan suku-suku yang bersama-sama membentuk bilangan bulat.

4.6.5.8. Anda akan memerlukan tiga kasus dasar. Ini petunjuk yang sangat baik karena menyiratkan bahwa untuk membuktikan $P(n)$ benar, Anda perlu menggunakan fakta bahwa $P(n-3)$ benar. Jadi, Anda perlu menemukan cara untuk menambah banyaknya persegi sebesar 3.

4.7 · Ringkasan Bab

· Tinjauan Bab

4.7.14.

(a) $(n+1)^{n+1} > (n+1) \cdot n^n$.

(b) Pembuktian ini seharusnya serupa dengan pembuktian jumlah lainnya. Langkah terakhir bermuara pada penjumlahan pecahan.

(c) Tuliskan $4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 4 + 3$.

(d) Satu perangko 9 sen bernilai 1 sen lebih besar daripada dua perangko 4 sen, dan tujuh perangko 4 sen bernilai 1 sen lebih besar daripada tiga perangko 9 sen.

(e) Pastikan Anda benar-benar menggunakan induksi di sini. Kasus dasar: $2^2 = 4$. Kasus induksi: anggap $(2n)^2$ habis dibagi 4, lalu perhatikan $(2n + 2)^2 = (2n)^2 + 4n + 4$. Bilangan ini habis dibagi 4 karena $4n + 4$ jelas habis dibagi 4, sedangkan menurut hipotesis induksi kita, $(2n)^2$ juga habis dibagi 4.

4.7.15. Ini merupakan pembuktian induksi yang langsung. Perhatikan bahwa Anda perlu menyederhanakan $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$ hingga memperoleh $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

4.7.16. Terdapat dua kasus dasar, yaitu $P(0)$ dan $P(1)$. Kemudian, untuk kasus induksi, anggap $P(k)$ benar untuk setiap $k < n$. Dengan demikian, Anda dapat menganggap $a_{n-1} = 1$ dan $a_{n-2} = 1$. Terapkan relasi rekurensinya.

5 · Meninjau Kembali Struktur Diskret

5.1 · Himpunan

5.1.5 · Latihan

5.1.5.7. Anda dapat menuliskan semuanya. Jangan lupakan A dan B, yang juga merupakan kemungkinan bagi C.

5.1.5.14. Mungkin akan membantu jika Anda terlebih dahulu memikirkan gabungan $A_2 \cup A_3$. Kemudian pikirkan bilangan mana yang *tidak* berada dalam gabungan tersebut. Apa yang akan terjadi ketika Anda juga menyertakan A_5?

5.1.5.17. Kita mencari sebuah himpunan yang memuat 16 himpunan.

5.1.5.18. Tuliskan himpunan-himpunan tersebut, atau setidaknya mulailah menuliskannya lalu carilah sebuah pola.

5.1.5.29. Sekilas tampaknya Anda dapat mendefinisikan himpunan A dengan cara ini. Namun, pertimbangkan dua nilai yang mungkin untuk $|A|$.

5.2 · Fungsi

5.2.4 · Latihan

5.2.4.2. Karena domain dan kodomain berukuran sama, mungkinkah suatu fungsi bersifat injektif tetapi tidak surjektif, atau surjektif tetapi tidak injektif?

5.2.4.20. Cobalah beberapa contoh. Bagaimana jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix}$ dan $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$?

5.2.4.25. Untuk memperoleh relasi rekurensinya, perhatikan berapa banyak jabat tangan *baru* yang terjadi ketika orang ke-$n + 1$ memasuki ruangan.

5.2.4.29. Salah satu kesamaan ini tidak selalu benar. Cobalah beberapa contoh!

6 · Topik Tambahan
6.1 · Fungsi Pembangkit
6.1.5 · Latihan

6.1.5.10. Anda perlu "mengalikan" kedua barisan tersebut.

6.2 · Pengantar Teori Bilangan
6.2.6 · Latihan

6.2.6.13. Mula-mula, reduksikan setiap bilangan modulo 9; ini dapat dilakukan dengan menjumlahkan digit-digit bilangan tersebut.

6.2.6.18. Selesaikan persamaan Diofantin $13x + 20y = 2$ (mengapa?). Kemudian tentukan nilai k (parameter dalam solusi) yang optimal.

Penyelesaian Terpilih

1 · Logika dan Pembuktian
1.1 · Pernyataan Matematis
1.1.5 · Soal Latihan

1.1.5.4.

- $\exists x \forall y P(x, y)$
  - Beberapa orang dapat diperdaya setiap saat.
- $\forall x \exists y P(x, y)$
  - Setiap orang dapat diperdaya pada suatu waktu.
- $\forall y \exists x P(x, y)$
  - Pada setiap waktu, terdapat orang yang dapat diperdaya.
- $\exists y \forall x P(x, y)$
  - Pada suatu waktu, semua orang dapat diperdaya.

1.1.5.5.

A. *Benar.*

B. *Salah.*

C. *Salah.*

D. *Salah.*

1.1.5.6.

A. *Benar.*

B. *Salah.*

Berhati-hatilah, $P(x, y)$ berarti x kurang dari y, bukan x kurang dari *atau sama dengan* y.

C. *Salah.*

D. *Salah.*

E. *Benar.*

1.1.5.7.

(a) $P(15)$ benar karena $17 \cdot 15 + 1 = 256$ genap.

(b) Karena $P(15)$ benar, kita mengetahui bahwa $\exists x P(x)$ benar. Terdapat sedikitnya satu x yang membuat $P(x)$ benar.

(c) Hanya karena satu nilai x membuat $P(x)$ benar, tidak berarti bahwa semua nilai x membuat $P(x)$ benar. Namun, hal itu mungkin saja terjadi. Jadi, kita tidak dapat menyimpulkan apakah $\forall x P(x)$ benar atau salah.

1.1.5.8.

(a) $P(15)$ salah karena $18 \cdot 15 + 1 = 271$ ganjil.

(b) Karena $P(15)$ salah, kita tidak mengetahui apakah $\exists x P(x)$ benar. Mungkin terdapat nilai x lain yang membuat $P(x)$ benar.

(c) Kita mengetahui bahwa terdapat suatu nilai x yang membuat $P(x)$ salah, sehingga kita mengetahui bahwa $\forall x P(x)$ salah.

1.1.5.9.

A. *Salah.*

B. *Salah.*

C. *Benar.*

D. *Benar.*

1.1.6 · Latihan Tambahan

1.1.6.1.

(a) $P \wedge Q$.

(b) $P \rightarrow \neg Q$.

(c) Jack lulus matematika atau Jill lulus matematika (atau keduanya).

(d) Jika Jack dan Jill tidak keduanya lulus matematika, maka Jill lulus.

(e) i. Tidak ada kesimpulan tambahan.
ii. Jack juga tidak lulus matematika.

1.1.6.2.

(a) $\neg \exists x (E(x) \wedge O(x))$.

(b) $\forall x (E(x) \rightarrow O(x+1))$.

(c) $\exists x (P(x) \wedge E(x))$ (dengan $P(x)$ berarti "x prima").

(d) $\forall x \forall y \exists z (x < z < y \vee y < z < x)$.

(e) $\forall x \neg \exists y (x < y < x + 1)$.

1.2 · Implikasi
1.2.5 · Soal Latihan

1.2.5.1. Hal utama yang perlu disadari adalah bahwa kita tidak mengetahui warna kedua bangun tersebut, tetapi kita mengetahui bahwa salah satu dari tiga kasus berikut terjadi: bangun lingkaran berwarna ungu dan bangun segi lima berwarna jingga; bangun lingkaran tidak berwarna ungu, tetapi bangun segi lima berwarna jingga; atau bangun lingkaran tidak berwarna ungu dan bangun segi lima tidak berwarna jingga. Kasus ketika bangun lingkaran berwarna ungu tetapi bangun segi lima tidak berwarna jingga tidak mungkin terjadi karena kasus itu akan membuat pernyataan tersebut salah.

1.2.5.2. Satu-satunya cara agar implikasi $P \to Q$ benar sedangkan konversnya salah adalah ketika Q benar dan P salah. Dengan demikian, kita mengetahui bahwa bangun lingkaran berwarna ungu dan bangun persegi tidak berwarna kuning.

1.2.5.3. Konversnya adalah "Jika saya memberi Anda seekor sapi, maka Anda akan memberi saya kacang ajaib." Kontraposisinya adalah "Jika saya tidak memberi Anda seekor sapi, maka Anda tidak akan memberi saya kacang ajaib." Semua pernyataan lainnya bukan konvers maupun kontraposisi.

1.2.6 · Latihan Tambahan

1.2.6.1.

(a) Setiap bilangan genap yang ditambah 2 merupakan bilangan genap.

(b) Untuk setiap x, terdapat y sedemikian sehingga $\sin(x) = y$. Dengan kata lain, setiap bilangan x berada dalam domain sinus.

(c) Untuk setiap y, terdapat x sedemikian sehingga $\sin(x) = y$. Dengan kata lain, setiap bilangan y berada dalam daerah hasil sinus (pernyataan ini salah).

(d) Untuk sembarang dua bilangan, jika pangkat tiga kedua bilangan itu sama, maka kedua bilangan tersebut sama.

1.2.6.3.

(a) Jika berat badan Anda telah turun, maka Anda berolahraga.

(b) Jika Anda berolahraga, maka berat badan Anda akan turun.

(c) Jika Anda orang Amerika, maka Anda bersifat patriotik.

(d) Jika Anda bersifat patriotik, maka Anda orang Amerika.

(e) Jika suatu bilangan rasional, maka bilangan tersebut real.

(f) Jika suatu bilangan tidak genap, maka bilangan tersebut prima. (Atau kontraposisinya: Jika suatu bilangan tidak prima, maka bilangan tersebut genap.)

(g) Jika Broncos tidak memenangi Super Bowl, maka mereka tidak bermain dalam Super Bowl. Sebagai bentuk alternatif, jika Broncos bermain dalam Super Bowl, maka mereka akan memenangi Super Bowl.

1.2.6.5. Agar suatu fungsi terdiferensialkan di titik c, fungsi tersebut perlu kontinu di c. Namun, agar suatu fungsi kontinu di c, fungsi tersebut tidak perlu terdiferensialkan di c.

Agar suatu fungsi kontinu di titik c, cukup jika fungsi tersebut terdiferensialkan di c. Namun, kontinuitas di c tidak cukup untuk menjamin bahwa suatu fungsi terdiferensialkan di c.

1.3 · Aturan Logika
1.3.7 · Soal Latihan

1.3.7.1. Jika Anda mencermati makna pernyataan ini, wajar bahwa pernyataan ini merupakan tautologi (benar dalam setiap kasus). Tabel kebenaran lengkapnya adalah:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B
S	S	S	S	B

1.3.7.2. Tabel kebenarannya adalah:

P	Q	$\neg Q$	$Q \to P$	$\neg Q \vee (Q \to P)$
B	B	S	B	B
B	S	B	B	B
S	B	S	S	S
S	S	B	B	B

Jika pernyataan ini salah, kita pasti berada pada baris ketiga, sehingga P salah dan Q benar.

1.3.7.3. Tabel kebenaran lengkapnya adalah:

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \vee R$	$Q \to (\neg P \vee R)$
B	B	B	S	B	B
B	B	S	S	S	S
B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	S	B
S	B	B	B	B	B
S	B	S	B	B	B
S	S	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B

1.3.7.4. Tabel kebenaran lengkapnya adalah:

P	Q	R	$P \to (Q \vee R)$	$(P \to Q) \vee (P \to R)$
B	B	B	B	B
B	B	S	B	B
B	S	B	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	B	S	B	B
S	S	B	B	B
S	S	S	B	B

Karena kedua kolom tersebut identik, kedua pernyataan itu ekuivalen secara logis.

1.3.7.5. Tabel kebenaran lengkapnya adalah:

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$
B	B	B	S	S
B	S	S	B	S
S	B	B	S	B
S	S	B	B	B

Hanya ada satu baris yang kedua premisnya benar (baris 4). Pada baris ini, kesimpulannya juga benar. Jadi, aturan deduksi tersebut valid.

1.3.7.6. Tabel kebenaran lengkapnya adalah:

P	Q	R	$P \to (Q \vee R)$	$\neg(P \to Q)$
B	B	B	B	S
B	B	S	B	S
B	S	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	S
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S
S	S	S	B	S

Hanya ada satu baris yang kedua premisnya benar (baris 3). Pada baris ini, kesimpulannya juga benar, sehingga aturan deduksi tersebut valid.

1.3.7.7. Tabel kebenaran lengkapnya adalah:

P	Q	R	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg R$
B	B	B	B	S	S
B	B	S	S	S	B
B	S	B	B	B	S
B	S	S	B	B	B
S	B	B	B	B	S
S	B	S	B	B	B
S	S	B	B	B	S
S	S	S	B	B	B

Pada baris 3, 5, dan 7, kedua premisnya benar, tetapi kesimpulannya salah. Jadi, aturan deduksi tersebut tidak valid.

1.3.7.8. Tabel kebenaran lengkapnya adalah:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$P \wedge \neg Q$
B	B	B	B	S
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	S
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S
S	S	S	B	S

Tidak ada baris yang kedua premisnya benar (memang, kedua premis ini saling bertentangan; premis kedua adalah negasi dari premis pertama). Dengan demikian, untuk setiap baris yang kedua premisnya benar (dalam hal ini tidak ada), kesimpulannya juga benar. Oleh karena itu, aturan deduksi tersebut valid. (Ini merupakan contoh bahwa dari suatu kontradiksi, pernyataan apa pun dapat disimpulkan.)

1.3.7.9.

A. *Benar.*

B. *Salah.*

C. *Salah.*

D. *Salah.*

1.3.8 · Latihan Tambahan

1.3.8.3.

(a) P: Hari ini ulang tahun Anda; Q: Akan ada kue. $(P \vee Q) \rightarrow Q$

(b) Petunjuk: Anda seharusnya memperoleh tiga nilai B dan satu nilai S.

(c) Hanya bahwa akan ada kue.

(d) Hari ini BUKAN ulang tahun Anda!

(e) Hari ini ulang tahun Anda, tetapi tidak akan ada kue.

1.3.8.5. Buatlah tabel kebenaran untuk masing-masing pernyataan, lalu bandingkan keduanya. Kedua pernyataan tersebut ekuivalen secara logis.

1.3.8.6.

(a) $P \wedge Q$.

(b) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (Q \vee \neg R)$ atau, dengan terlebih dahulu mengganti implikasi dengan disjungsi: $(P \wedge Q) \vee (Q \vee \neg R)$.

(c) $(P \wedge Q) \wedge (R \wedge \neg R)$. Pernyataan ini selalu salah, sehingga juga ekuivalen dengan $P \wedge \neg P$.

(d) Sam adalah perempuan dan Chris adalah laki-laki, atau Chris adalah perempuan.

1.3.8.16.

(a) $\forall x \exists y(O(x) \wedge \neg E(y))$.

(b) $\exists x \forall y(x \geq y \vee \forall z(x \geq z \wedge y \geq z))$.

(c) Ada suatu bilangan n sehingga setiap bilangan lain lebih besar secara ketat daripada n.

(d) Ada suatu bilangan n yang tidak terletak di antara dua bilangan lain mana pun.

1.4 · Pembuktian
1.4.7 · Soal Latihan

1.4.7.1.

- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan n genap.
- Karena hasil kali sembarang bilangan dengan bilangan genap adalah genap,
- $7n$ pasti genap.

1.4.7.2.

- Misalkan n bilangan bulat sembarang, dan asumsikan n ganjil.
- Karena 7 ganjil dan hasil kali dua bilangan ganjil adalah ganjil,
- $7n$ pasti ganjil.

1.4.7.3.

- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan keduanya genap.
- Jumlah dua bilangan bulat genap pasti juga genap.

- Oleh karena itu, $a + b$ genap.

1.4.7.4.

- Misalkan a dan b bilangan bulat, dan asumsikan $a + b$ ganjil, tetapi a dan b keduanya genap.
- Jumlah dua bilangan bulat genap pasti juga genap.
- Namun, ini berarti $a + b$ genap sekaligus ganjil, suatu kontradiksi.

1.4.7.6.

- Pembuktian langsung
  - Asumsikan $f : A \to B$ merupakan bijeksi
- Pembuktian melalui kontraposisi
  - Asumsikan $|A| \neq |B|$
- Pembuktian melalui kontradiksi
  - Asumsikan $f : A \to B$ merupakan bijeksi dan $|A| \neq |B|$

1.4.8 · Latihan Tambahan

1.4.8.1.

(a) Klaim $\forall x P(x)$ berarti bahwa $P(n)$ benar untuk setiap n dalam semesta pembicaraan. Jadi, satu-satunya cara untuk membuktikan bahwa $\forall x P(x)$ benar adalah memeriksa atau menunjukkan dengan cara lain bahwa $P(n)$ benar untuk semua n dalam semesta tersebut.

(b) Untuk membuktikan bahwa $\forall x P(x)$ salah, Anda hanya memerlukan satu contoh elemen dalam semesta yang membuat $P(n)$ salah. Contoh semacam ini sering disebut **contoh penyangkal**.

(c) Kita hanya mengklaim bahwa terdapat suatu elemen n dalam semesta pembicaraan yang membuat $P(n)$ benar. Jika Anda dapat menemukan satu elemen seperti itu, klaim tersebut telah terbukti.

(d) Di sini kita mengklaim bahwa tidak ada elemen yang membuat $P(n)$ benar. Satu-satunya cara untuk memastikan hal ini adalah membuktikan bahwa *setiap* elemen dalam semesta membuat $P(n)$ salah. Perhatikan bahwa tingkat pembuktian yang diperlukan untuk pernyataan ini sama dengan yang diperlukan untuk membuktikan bahwa $\forall x P(x)$ benar.

1.4.8.2.

(a) Untuk semua bilangan bulat a dan b, jika a atau b tidak genap, maka $a + b$ tidak genap.

(b) Untuk semua bilangan bulat a dan b, jika a dan b genap, maka $a + b$ genap.

(c) Terdapat bilangan bulat a dan b sedemikian sehingga $a + b$ genap, tetapi a dan b tidak keduanya genap.

(d) Salah. Sebagai contoh, ambil $a = 3$ dan $b = 5$. Nilai $a + b = 8$, tetapi baik a maupun b tidak genap.

(e) Salah, karena kontraposisi ekuivalen dengan pernyataan semula.

(f) Benar. Misalkan a dan b bilangan bulat. Asumsikan keduanya genap. Dengan demikian, $a = 2k$ dan $b = 2j$ untuk suatu bilangan bulat k dan j. Maka $a + b = 2k + 2j = 2(k + j)$, sehingga bernilai genap.

(g) Benar, karena pernyataan semula salah.

1.4.8.3.

(a) Pembuktian dengan kontradiksi. Awal pembuktian: Andaikan, demi memperoleh kontradiksi, bahwa terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga x merupakan bilangan prima yang lebih besar dari 5 dan $x = 6y + 3$. Akhir pembuktian: ... hal ini merupakan suatu kontradiksi, sehingga tidak ada bilangan bulat semacam itu.

(b) Pembuktian langsung. Awal pembuktian: Misalkan n suatu bilangan bulat. Asumsikan n merupakan kelipatan 3. Akhir pembuktian: Oleh karena itu, n dapat ditulis sebagai jumlah bilangan bulat berurutan.

(c) Pembuktian melalui kontraposisi. Awal pembuktian: Misalkan a dan b bilangan bulat. Asumsikan a dan b genap. Akhir pembuktian: Oleh karena itu, $a^2 + b^2$ genap.

1.4.8.4.

(a) Pembuktian langsung.

Bukti. Misalkan n suatu bilangan bulat. Asumsikan n genap. Dengan demikian, $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Jadi, $8n = 16k = 2(8k)$. Oleh karena itu, $8n$ genap. ■

(b) Konversnya salah. Artinya, terdapat bilangan bulat n sedemikian sehingga $8n$ genap, tetapi n ganjil. Sebagai contoh, ambil $n = 3$. Maka $8n = 24$ genap, tetapi $n = 3$ ganjil.

1.4.8.5.

(a) Ini merupakan contoh penerapan prinsip sarang merpati. Kita dapat membuktikannya melalui kontraposisi.

Bukti. Misalkan setiap angka muncul paling banyak 6 kali. Jadi, terdapat paling banyak enam angka 1, enam angka 2, dan seterusnya. Jumlah keseluruhannya paling banyak 36 dadu, sehingga tidak mungkin Anda telah melempar ke-40 dadu. ■

(b) Kita dapat melempar 9 dadu tanpa memperoleh empat angka yang sama maupun empat angka yang semuanya berbeda: tiga angka 1, tiga angka 2, dan tiga angka 3. Kita akan membuktikan bahwa setiap kali 10 dadu dilempar, selalu diperoleh empat angka yang sama atau empat angka yang semuanya berbeda.

Bukti. Misalkan Anda melempar 10 dadu, tetapi TIDAK ada empat hasil lemparan yang sama. Artinya, setiap angka muncul paling banyak tiga kali. Jika hanya ada tiga angka berbeda, jumlah dadunya paling banyak 9, sehingga pasti ada 4 angka berbeda, yang memberikan 4 dadu dengan hasil yang semuanya berbeda. ■

1.5 · Bukti tentang Struktur Diskret
1.5.7 · Soal Latihan

1.5.7.1.

A. *Salah.*

B. *Benar.*

C. *Salah.*

D. *Salah.*

Ini merupakan awal yang baik bagi bukti dengan kontradiksi atau kontraposisi, bukan bagi bukti langsung.

1.5.7.2.

A. *Salah.*

B. *Benar.*

C. *Salah.*

D. *Salah.*

Ini merupakan awal yang baik bagi bukti langsung, bukan bagi bukti dengan kontradiksi.

1.5.7.3.

- Andaikan $B \subseteq A \cap B$, dan misalkan b merupakan elemen B.
- Maka, b merupakan elemen $A \cap B$ karena $B \subseteq A \cap B$.
- Karena $A \cap B$ memuat semua elemen yang terdapat dalam A dan B sekaligus, b merupakan elemen A.
- Oleh karena itu, $B \subseteq A$.

1.5.7.4.

- Pertama, kita akan membuktikan bahwa $(A \cap B) \cup A \subseteq A$.
- Misalkan x merupakan elemen $(A \cap B) \cup A$.
- Maka, x merupakan elemen $A \cap B$, atau x merupakan elemen A.
- Jadi, khususnya, x merupakan elemen A.
- Oleh karena itu, $(A \cap B) \cup A \subseteq A$.
- Kedua, kita akan membuktikan bahwa $A \subseteq (A \cap B) \cup A$.
- Misalkan x merupakan elemen A.
- Maka, x merupakan elemen $(A \cap B) \cup A$ karena x terdapat dalam A atau dalam himpunan yang lain.
- Oleh karena itu, $A \subseteq (A \cap B) \cup A$.
- Karena $(A \cap B) \cup A \subseteq A$ dan $A \subseteq (A \cap B) \cup A$, kita memperoleh $(A \cap B) \cup A = A$.

1.5.7.5.

- Andaikan $B_1 \subseteq B_2$.
- Misalkan a merupakan elemen $f^{-1}(B_1)$.
- Ini berarti bahwa $f(a)$ merupakan elemen B_1.
- Karena $B_1 \subseteq B_2$, $f(a)$ merupakan elemen B_2.
- Dengan demikian, a merupakan elemen $f^{-1}(B_2)$.
- Oleh karena itu, $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

1.6 · Ringkasan Bab

· Tinjauan Bab

1.6.1.

P	Q	R	$\neg P \to (Q \wedge R)$
B	B	B	B
B	B	S	B
B	S	B	B
B	S	S	B
S	B	B	B
S	B	S	S
S	S	B	S
S	S	S	S

1.6.2. Peter tidak tinggi, dan Robert tidak kurus. Keadaan ini harus bersesuaian dengan baris ke-6 pada tabel kebenaran di atas.

1.6.3. Ya. Untuk melihatnya, buatlah tabel kebenaran bagi setiap pernyataan lalu bandingkan keduanya.

1.6.4. Buatlah tabel kebenaran yang memuat ketiga pernyataan dalam argumen tersebut:

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$	$P \to (Q \wedge R)$
B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	S
B	S	S	S	S	S
S	B	B	B	B	B
S	B	S	B	B	B
S	S	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B

Perhatikan bahwa pada setiap baris yang membuat $P \to Q$ dan $P \to R$ keduanya benar, $P \to (Q \wedge R)$ juga benar. Oleh karena itu, setiap kali premis-premis argumen tersebut benar, kesimpulannya juga benar. Dengan kata lain, aturan deduksi tersebut sahih.

1.6.5.

(a) Negasi: Listrik padam, dan makanan tidak rusak.

Konvers: Jika makanan rusak, maka listrik telah padam.

Kontraposisi: Jika makanan tidak rusak, maka listrik tidak padam.

(b) Negasi: Pintu tertutup, dan lampu menyala.

Konvers: Jika lampu padam, maka pintu tertutup.

Kontraposisi: Jika lampu menyala, maka pintu terbuka.

(c) Negasi: $\exists x(x < 1 \wedge x^2 \geq 1)$

Konvers: $\forall x(x^2 < 1 \to x < 1)$

Kontraposisi: $\forall x(x^2 \geq 1 \to x \geq 1)$.

(d) Negasi: Terdapat bilangan asli n yang prima tetapi tidak soliter.

Konvers: Untuk setiap bilangan asli n, jika n soliter, maka n prima.

Kontraposisi: Untuk setiap bilangan asli n, jika n tidak soliter, maka n tidak prima.

(e) Negasi: Terdapat fungsi yang dapat didiferensialkan dan tidak kontinu.

Konvers: Untuk setiap fungsi f, jika f kontinu, maka f dapat didiferensialkan.

Kontraposisi: Untuk setiap fungsi f, jika f tidak kontinu, maka f tidak dapat didiferensialkan.

(f) Negasi: Terdapat bilangan bulat a dan b sedemikian sehingga $a \cdot b$ genap tetapi a atau b ganjil.

Konvers: Untuk setiap bilangan bulat a dan b, jika a dan b keduanya genap, maka ab genap.

Kontraposisi: Untuk setiap bilangan bulat a dan b, jika a atau b ganjil, maka ab ganjil.

(g) Negasi: Terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga untuk setiap bilangan bulat n, $x > 0$ dan $nx \leq y$.

Konvers: Untuk setiap bilangan bulat x dan setiap bilangan bulat y, terdapat bilangan bulat n sedemikian sehingga jika $nx > y$, maka $x > 0$.

Kontraposisi: Untuk setiap bilangan bulat x dan setiap bilangan bulat y, terdapat bilangan bulat n sedemikian sehingga jika $nx \leq y$, maka $x \leq 0$.

(h) Negasi: Terdapat bilangan real x dan y sedemikian sehingga $xy = 0$, tetapi $x \neq 0$ dan $y \neq 0$.

Konvers: Untuk setiap bilangan real x dan y, jika $x = 0$ atau $y = 0$, maka $xy = 0$

Kontraposisi: Untuk setiap bilangan real x dan y, jika $x \neq 0$ dan $y \neq 0$, maka $xy \neq 0$.

(i) Negasi: Terdapat setidaknya seorang mahasiswa dalam Matematika 228 yang tidak memahami implikasi tetapi tetap akan lulus ujian.

Konvers: Untuk setiap mahasiswa dalam Matematika 228, jika mahasiswa tersebut gagal dalam ujian, maka ia tidak memahami implikasi.

Kontraposisi: Untuk setiap mahasiswa dalam Matematika 228, jika mahasiswa tersebut lulus ujian, maka ia memahami implikasi.

1.6.6.

(a) Pernyataan tersebut benar. Jika n merupakan bilangan bulat genap yang kurang dari atau sama dengan 7, maka satu-satunya kemungkinan agar bilangan tersebut tidak negatif adalah n sama dengan 0, 2, 4, atau 6.

(b) Terdapat bilangan bulat n sedemikian sehingga n genap dan $n \leq 7$, tetapi n tidak negatif dan $n \notin \{0, 2, 4, 6\}$. Pernyataan ini salah karena pernyataan asal benar.

(c) Untuk setiap bilangan bulat n, jika n tidak negatif dan $n \notin \{0, 2, 4, 6\}$, maka n ganjil atau $n > 7$. Pernyataan ini benar karena kontraposisi ekuivalen dengan pernyataan asal (yang benar).

(d) Untuk setiap bilangan bulat n, jika n negatif atau $n \in \{0, 2, 4, 6\}$, maka n genap dan $n \leq 7$. Pernyataan ini salah. $n = -3$ merupakan contoh penyangkal.

1.6.7.

(a) Untuk setiap bilangan x, jika penambahan sembarang bilangan pada x menghasilkan kembali bilangan tersebut, maka perkalian sembarang bilangan dengan x menghasilkan 0. Pernyataan ini benar (baik pada bilangan bulat maupun bilangan real). Bagian "jika" hanya berlaku apabila $x = 0$, dan dalam hal itu, hasil kali bilangan apa pun dengan x adalah 0.

(b) Konversnya, dalam kata-kata, adalah: Untuk setiap bilangan x, jika hasil kali setiap bilangan dengan x adalah nol, maka penambahan setiap bilangan pada x menghasilkan bilangan itu sendiri. Dalam simbol: $\forall x(\forall z(x \cdot z = 0) \rightarrow \forall y(x + y = y))$. Konvers tersebut benar: Satu-satunya bilangan yang menghasilkan 0 ketika dikalikan dengan sembarang bilangan lain adalah $x = 0$. Jika $x = 0$, maka $x + y = y$.

(c) Kontraposisinya, dalam kata-kata, adalah: Untuk setiap bilangan x, jika terdapat suatu bilangan yang tidak menghasilkan nol ketika dikalikan dengan x, maka terdapat suatu bilangan yang tidak menghasilkan bilangan itu sendiri ketika ditambahkan pada x. Dalam simbol: $\forall x(\exists z(x \cdot z \neq 0) \rightarrow \exists y(x + y \neq y))$. Kita mengetahui bahwa kontraposisi tersebut harus benar karena implikasi asal benar.

(d) Negasinya adalah: Terdapat bilangan x sedemikian sehingga penambahan sembarang bilangan pada x menghasilkan kembali bilangan tersebut, tetapi terdapat bilangan yang dapat dikalikan dengan x tanpa menghasilkan 0. Dalam simbol: $\exists x(\forall y(x + y = y) \wedge \exists z(x \cdot z \neq 0))$. Tentu saja, karena implikasi asal benar, negasinya salah.

1.6.8.

(a) $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee (P \wedge \neg R))$.

(b) $\forall x \forall y \forall z(z = x + y \wedge \forall w(x - y \neq w))$.

1.6.9.

(a) Pembuktian langsung.

Bukti. Misalkan n suatu bilangan bulat. Asumsikan n ganjil. Jadi, $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k. Maka

$$7n = 7(2k + 1) = 14k + 7 = 2(7k + 3) + 1.$$

Karena $7k + 3$ merupakan bilangan bulat, kita melihat bahwa $7n$ ganjil. ■

(b) Konversnya adalah: Untuk setiap bilangan bulat n, jika $7n$ ganjil, maka n ganjil. Kita akan membuktikannya melalui kontraposisi.

Bukti. Misalkan n suatu bilangan bulat. Asumsikan n tidak ganjil. Maka $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Jadi $7n = 14k = 2(7k)$, yang berarti bahwa $7n$ genap. Oleh karena itu, $7n$ tidak ganjil. ■

1.6.10.

(a) Misalkan Anda hanya memiliki 5 keping untuk setiap denominasi. Artinya, Anda memiliki 5 keping 1 sen, 5 keping 5 sen, 5 keping 10 sen, dan 5 keping 25 sen. Jumlahnya 20 keping. Namun, Anda memiliki lebih dari 20 keping, sehingga sedikitnya satu jenis pasti berjumlah lebih dari 5 keping.

(b) Misalkan Anda memiliki 22 keping, yang mencakup $2k$ keping 5 sen, $2j$ keping 10 sen, dan $2l$ keping 25 sen (jadi, setiap jenis dari ketiga uang logam ini berjumlah genap). Banyaknya keping 1 sen yang Anda miliki adalah

$$22 - 2k - 2j - 2l = 2(11 - k - j - l).$$

Namun, persamaan ini menyatakan bahwa banyaknya keping 1 sen juga genap (karena sama dengan 2 kali suatu bilangan bulat). Dengan demikian, kita telah membuktikan kontraposisi pernyataan tersebut, "Jika Anda memiliki keping 1 sen dalam jumlah ganjil, maka sedikitnya satu jenis uang logam lain juga berjumlah ganjil."

(c) Anda memerlukan 10 keping. Anda dapat memiliki 3 keping 1 sen, 3 keping 5 sen, dan 3 keping 10 sen. Keping ke-10 pasti merupakan keping 25 sen, sehingga Anda memiliki empat keping yang semuanya berbeda, atau merupakan keping keempat dari denominasi 1 sen, 5 sen, atau 10 sen. Untuk membuktikannya, asumsikan bahwa Anda tidak memiliki empat keping yang semuanya sama ataupun semuanya berbeda. Secara khusus, ini berarti bahwa Anda hanya memiliki tiga jenis uang logam, dan setiap jenis hanya dapat berisi tiga keping, sehingga jumlah keseluruhannya 9 keping, kurang dari 10.

2 · Teori Graf
2.1 · Masalah dan Definisi
2.1.4 · Soal Latihan

2.1.4.1. Graf pada (a) dan (c) isomorfik dengan G.

2.1.4.2. Graf (a) dan (c) saling isomorfik. Demikian pula graf (b) dan (d).

2.1.4.3. G_1 memiliki 24 sisi. $k = 2$ untuk G_2. G_3 memiliki 8 simpul.

2.1.4.4. Graf tersebut harus memiliki 29 sisi.

2.1.4.5.

(a) Nilai n terbesar sedemikian sehingga P_n merupakan subgraf dari K_5 adalah 4.

(b) Nilai n terbesar sedemikian sehingga C_n merupakan subgraf dari K_5 adalah 5.

(c) Nilai n terbesar sedemikian sehingga P_n merupakan subgraf *terinduksi* dari K_5 adalah 1.

(d) Nilai n terbesar sedemikian sehingga C_n merupakan subgraf *terinduksi* dari K_5 adalah 3.

2.1.5 · Latihan Tambahan

2.1.5.1. Pertanyaan ini menanyakan banyaknya sisi pada K_{10}. Setiap simpul (orang) berderajat 9 (berjabat tangan dengan 9 orang). Jadi, jumlah derajatnya adalah 90. Namun, jumlah derajat menghitung setiap sisi (jabat tangan) dua kali, sehingga terdapat 45 sisi pada graf tersebut. Jadi, terjadi 45 jabat tangan.

2.1.5.2. Setiap orang mungkin saja berteman dengan tepat 2 orang. Anda dapat mengatur kelima orang dalam lingkaran dan menetapkan bahwa setiap orang berteman dengan dua orang di kedua sisinya (sehingga diperoleh graf C_5). Namun, tidak mungkin setiap orang berteman dengan tepat 3 orang. Hal itu akan menghasilkan graf dengan simpul berderajat ganjil dalam jumlah ganjil, padahal ini mustahil karena jumlah derajat harus genap.

2.1.5.4. Kedua graf tersebut tidak sama. Sebagai contoh, graf 1 memiliki sisi $\{a, b\}$, sedangkan graf 2 tidak memiliki sisi tersebut. Keduanya isomorfik. Salah satu isomorfisme yang mungkin adalah $f : G_1 \to G_2$ yang didefinisikan oleh $f(a) = d$, $f(b) = c$, $f(c) = e$, $f(d) = b$, $f(e) = a$.

2.1.5.9.

(a) Sebagai contoh:



(b) Hal ini tidak mungkin jika graf-graf tersebut disyaratkan terhubung. Jika tidak disyaratkan, kita dapat mengambil C_8 sebagai salah satu graf dan dua salinan C_4 sebagai graf lainnya.

(c) Tidak mungkin. Jika suatu graf memiliki 5 simpul yang semuanya berderajat 4, setiap simpul harus bertetangga dengan setiap simpul lainnya. Graf tersebut adalah K_5.

(d) Hal ini tidak mungkin. Bahkan, tidak ada satu pun graf dengan sifat ini (graf semacam itu akan memiliki $5 \cdot 3/2 = 7.5$ sisi).

2.1.5.10.

(a) Salah. (b) Benar. (c) Benar. (d) Salah.

2.2 · Pohon
2.2.6 · Soal Latihan

2.2.6.3. Setiap pohon merentang tetap harus memuat 22 simpul. Karena merupakan pohon, pohon merentang tersebut memiliki $22 - 1 = 21$ sisi. Jadi, kita harus menghapus 8 sisi untuk memperoleh pohon merentang.

2.2.6.5. Misalkan x adalah banyaknya daun. Jumlah derajatnya adalah $x+8+6+5+3 = x + 22$. Nilai ini sama dengan dua kali banyaknya sisi. Karena banyaknya sisi satu

lebih sedikit daripada banyaknya simpul, yaitu $x + 4$, kita juga mengetahui bahwa banyaknya sisi adalah $x + 3$.

Dengan demikian, kita memperoleh $2(x + 3) = x + 22$. Menyelesaikan persamaan ini untuk x menghasilkan $x = 16$.

2.2.7 · Latihan Tambahan

2.2.7.1.

(a) Graf ini bukan pohon karena memuat siklus. Perhatikan pula bahwa graf ini memiliki terlalu banyak sisi untuk menjadi pohon, sebab kita mengetahui bahwa setiap pohon dengan v simpul memiliki $v - 1$ sisi.

(b) Graf ini merupakan pohon karena terhubung dan tidak memuat siklus (yang dapat Anda lihat dengan menggambar graf tersebut). Setiap lintasan merupakan pohon.

(c) Graf ini merupakan pohon karena terhubung dan tidak memuat siklus (gambarlah graf tersebut). Setiap graf bintang merupakan pohon.

(d) Graf ini bukan pohon karena tidak terhubung. Perhatikan bahwa graf ini tidak memiliki cukup sisi untuk menjadi pohon.

2.2.7.2.

(a) Barisan ini pasti merupakan barisan derajat suatu pohon. Alasannya, simpul berderajat 4 harus bertetangga dengan keempat simpul berderajat 1 (tidak ada simpul lain yang dapat menjadi tetangganya), sehingga kita memperoleh graf bintang.

(b) Barisan ini tidak mungkin merupakan barisan derajat suatu pohon. Setiap simpul berderajat 3 bertetangga dengan semua simpul dalam graf kecuali satu. Dengan demikian, masing-masing harus bertetangga dengan salah satu simpul berderajat 1 (dan bukan dengan simpul berderajat 1 yang lain). Artinya, kedua simpul berderajat 3 bertetangga dengan simpul berderajat 2 dan juga saling bertetangga, sehingga terdapat siklus.

Sebagai alternatif, hitunglah banyaknya sisi!

(c) Barisan ini mungkin merupakan barisan derajat pohon, tetapi mungkin juga bukan. Lintasan dengan panjang 4 memiliki barisan derajat ini (dan merupakan pohon), tetapi gabungan suatu siklus-3 dan lintasan dengan panjang 1 juga memilikinya (graf ini tidak terhubung, sehingga bukan pohon).

(d) Barisan ini tidak mungkin merupakan barisan derajat suatu pohon. Jumlah derajatnya adalah 28, sehingga terdapat 14 sisi. Akan tetapi, terdapat pula 14 simpul, sehingga tidak berlaku $v = e + 1$; jadi, graf ini tidak mungkin merupakan pohon.

2.2.7.6. Ya. Kita akan membuktikan kontraposisinya. Andaikan G tidak memuat siklus. Maka, G merupakan pohon sehingga harus memenuhi $v = e+1$, bertentangan dengan ketentuan.

2.2.7.12.

(a) Tidak, meskipun terdapat graf-graf yang memenuhi sifat tersebut. Sebagai contoh, K_4 memiliki pohon merentang berupa lintasan (dengan tiga sisi) dan juga pohon merentang berupa graf bintang (dengan simpul pusat berderajat 3).

(b) Ya. Untuk suatu graf tertentu, banyaknya simpul v bersifat tetap. Setiap pohon merentang dari graf tersebut juga memiliki v simpul, dan karena merupakan pohon, pohon merentang itu harus memiliki $v-1$ sisi.

(c) Tidak, meskipun terdapat graf-graf yang memenuhi sifat tersebut (perhatikan bahwa jika semua pohon merentang saling isomorfik, maka semuanya memiliki jumlah daun yang sama). Sekali lagi, K_4 merupakan contoh penyangkal. Salah satu pohon merentangnya berupa lintasan yang hanya memiliki dua daun, sedangkan pohon merentang lainnya berupa graf bintang dengan 3 daun.

2.3 · Graf Planar
2.3.7 · Latihan Tambahan

2.3.7.1. Tidak. Graf planar (terhubung) harus memenuhi rumus Euler: $v - e + f = 2$. Dalam kasus ini, $v - e + f = 6 - 10 + 5 = 1$.

2.3.7.2. G memiliki 10 sisi karena $10 = \frac{2+2+3+4+4+5}{2}$. Graf tersebut mungkin planar, dan jika demikian, menurut rumus Euler graf itu akan memiliki 6 muka: $6-10+f = 2$ berarti $f = 6$. Namun, untuk memastikan bahwa graf tersebut benar-benar planar, kita perlu menggambar graf dengan derajat simpul tersebut tanpa sisi yang berpotongan. Hal ini dapat dilakukan dengan mencoba berbagai kemungkinan (dan memang mungkin).

2.3.7.6. Misalkan muka terakhir memiliki n sisi dan juga n simpul. Dengan demikian, jumlah sisi polihedron tersebut adalah $(7\cdot 3+4\cdot 4+n)/2 = (37+n)/2$. Secara khusus, kita mengetahui bahwa muka terakhir harus memiliki jumlah sisi ganjil. Kita juga mengetahui bahwa $v = 11$. Berdasarkan rumus Euler, berlaku $11-(37+n)/2+12 = 2$, dan dengan menyelesaikannya untuk n, kita memperoleh $n = 5$, sehingga muka terakhir berbentuk segilima.

2.3.7.8.

Bukti. Andaikan terdapat graf G dengan jumlah sisi paling sedikit yang tidak memenuhi rumus Euler.

Perhatikan bahwa G tidak mungkin berupa pohon karena untuk setiap pohon berlaku $v = e + 1$ dan $f = 1$, sehingga $v - e + f = 2$. Oleh karena itu, G harus memuat suatu siklus. Pilih sembarang sisi e_0 yang merupakan bagian dari suatu siklus dalam G, lalu tinjau graf $G' = G - e_0$ yang diperoleh dengan menghapus hanya sisi e_0 dari G.

Karena G' memiliki lebih sedikit sisi daripada G, graf tersebut harus memenuhi rumus Euler. Artinya, $v' - e' + f' = 2$, dengan v', e', dan f' masing-masing menyatakan banyaknya simpul, sisi, dan muka pada G'. Karena G' diperoleh dengan menghapus satu sisi dari suatu siklus dalam G, berlaku $v' = v$, $e' = e - 1$, dan $f' = f - 1$. Oleh karena itu, $v - (e-1) + (f-1) = 2$, sehingga $v - e + f = 2$ juga berlaku. Ini merupakan kontradiksi, sehingga graf G semacam itu tidak mungkin ada. ■

2.3.7.12.

Bukti. Kita mengetahui bahwa dalam setiap graf planar, banyaknya muka f memenuhi $3f \leq 2e$ karena setiap muka dibatasi oleh sedikitnya tiga sisi, sedangkan setiap sisi membatasi dua muka. Gabungkan hal ini dengan rumus Euler:

$$v - e + f = 2$$

$$v - e + \frac{2e}{3} \geq 2$$

$$3v - e \geq 6$$

$$3v - 6 \geq e.$$

■

2.4 · Jejak dan Sirkuit Euler
2.4.5 · Latihan Soal

2.4.5.2. Hanya (b) yang memiliki sirkuit Euler. Graf pada (a) tidak terhubung, sehingga meskipun setiap simpul berderajat genap, graf tersebut tidak memiliki sirkuit Euler. Graf (c) memiliki dua simpul berderajat ganjil, sehingga tidak memiliki sirkuit Euler.

Salah satu sirkuit Euler untuk (b) adalah

$$(a, d, f, e, g, c, b, e, h, b, i, c, f, a).$$

2.4.5.3. Graf pertama memiliki lintasan Euler, tetapi tidak memiliki sirkuit Euler. Graf kedua memiliki sirkuit Euler. Graf ketiga tidak memiliki sirkuit Euler maupun lintasan Euler. Hal ini dapat dilihat dengan menggambar graf-graf tersebut ataupun dengan menentukan derajat setiap simpulnya.

2.4.6 · Latihan Tambahan

2.4.6.1. Pertanyaan ini berkaitan dengan pencarian jejak Euler. Gambarlah sebuah graf dengan satu simpul untuk setiap negara bagian, lalu hubungkan dua simpul jika negara bagian yang diwakilinya memiliki perbatasan bersama. Tepat dua simpul akan berderajat ganjil, yaitu simpul untuk Nevada dan Utah. Jadi, perjalanan darat tersebut harus dimulai di salah satu dari kedua negara bagian itu dan berakhir di negara bagian yang lain.

2.4.6.2.

(a) K_4 tidak memiliki jejak maupun sirkuit Euler.

(b) K_5 memiliki sirkuit Euler (dan dengan demikian juga memiliki jejak Euler).

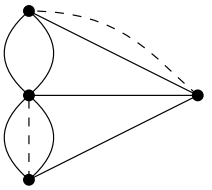
(c) $K_{5,7}$ tidak memiliki jejak maupun sirkuit Euler.

(d) $K_{2,7}$ memiliki jejak Euler, tetapi tidak memiliki sirkuit Euler.

(e) C_7 memiliki sirkuit Euler (graf tersebut memang graf sirkuit!).

(f) P_7 memiliki jejak Euler, tetapi tidak memiliki sirkuit Euler.

2.4.6.8. Jika kita membangun satu jembatan, kita dapat memperoleh jejak Euler. Untuk memperoleh sirkuit Euler, dua jembatan harus dibangun.



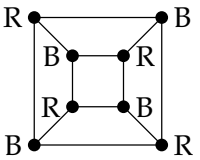
2.5 · Pewarnaan
2.5.6 · Latihan Tambahan

2.5.6.1. 2, karena graf tersebut bipartit. Gunakan satu warna untuk himpunan simpul bagian atas dan satu warna lain untuk himpunan simpul bagian bawah.

2.5.6.2. Sebagai contoh, K_6. Jika bilangan kromatiknya 6, graf tersebut tidak planar; teorema empat warna menyatakan bahwa semua graf planar dapat diwarnai dengan 4 warna atau kurang.

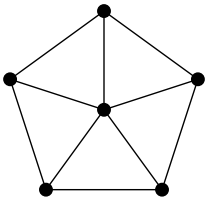
2.5.6.3. Bilangan kromatiknya, berturut-turut dari kiri ke kanan, adalah 2, 3, 4, 5, dan 3.

2.5.6.5. Kubus dapat direpresentasikan sebagai graf planar dan diwarnai dengan dua warna sebagai berikut:



Karena simpul-simpulnya tidak mungkin diwarnai hanya dengan satu warna, kita menyimpulkan bahwa kubus memiliki bilangan kromatik 2 (grafnya bipartit).

2.5.6.9. Graf roda berikut memiliki sifat tersebut. Bagian luar roda membentuk siklus ganjil sehingga memerlukan 3 warna; pusat roda harus memiliki warna yang berbeda dari semua simpul luar.



2.5.6.12. Jika kita menggambar graf dengan setiap huruf merepresentasikan sebuah simpul dan setiap sisi menghubungkan dua huruf yang berurutan dalam alfabet, kita memperoleh graf yang memiliki dua simpul berderajat 1 (A dan Z), sedangkan 24 simpul lainnya semuanya berderajat 2 (sebagai contoh, D bertetangga dengan C dan E). Menurut teorema Brooks, graf ini memiliki bilangan kromatik paling banyak 2 karena itulah derajat maksimum graf tersebut, dan graf itu bukan graf lengkap maupun siklus ganjil. Jadi, hanya diperlukan dua kotak.

2.5.6.13.

2.6 · Relasi dan Graf
2.6.7 · Soal Latihan

2.6.7.1.

(a) Tidak refleksif karena, sebagai contoh, $0 + 0 = 0$ tidak ganjil.

(b) Tidak refleksif karena, sebagai contoh, $(-1) + (-1)$ tidak positif.

(c) Refleksif. Hasil kali sembarang bilangan dengan dirinya sendiri tidak negatif.

(d) Tidak refleksif. $0 \cdot 0$ tidak positif.

(e) Refleksif karena $n - n = 0$ merupakan kelipatan 10.

2.6.7.2. Semua relasi yang diberikan bersifat simetris.

2.6.7.3.

(a) Tidak transitif. Sebagai contoh, $1 \sim 2$ dan $2 \sim 3$, tetapi $1 \not\sim 3$.

(b) Tidak transitif. Sebagai contoh, $-1 \sim 3$ dan $3 \sim -2$, tetapi $-1 \not\sim -2$.

(c) Tidak transitif. Sebagai contoh, $-1 \sim 0$ dan $0 \sim 1$, tetapi $-1 \not\sim 1$.

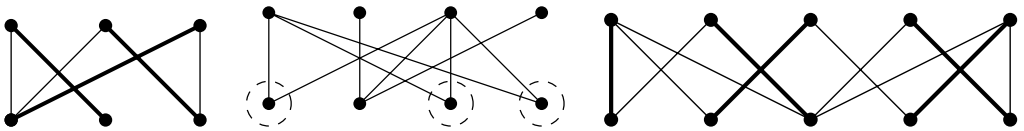
(d) Transitif. Jika $x \sim y$, maka x dan y memiliki tanda yang sama. Selanjutnya, jika $y \sim z$, maka z memiliki tanda yang sama dengan y, sehingga z juga memiliki tanda yang sama dengan x. Jadi, $x \sim z$.

(e) Transitif. Hal ini berlaku karena $z - y + y - x = z - x$. Jadi, jika $z - y$ dan $y - x$ keduanya merupakan kelipatan 10, maka $z - x$ juga merupakan kelipatan 10.

2.7 · Pencocokan pada Graf Bipartit

· Latihan

2.7.1. Graf pertama dan ketiga memiliki pencocokan yang ditunjukkan dengan garis tebal (terdapat pula pencocokan lainnya). Graf tengah tidak memiliki pencocokan. Jika Anda memperhatikan ketiga simpul yang dilingkari, ketiganya hanya memiliki dua tetangga, sehingga melanggar kondisi pencocokan $|N(S)| \geq |S|$ (ketiga simpul yang dilingkari tersebut membentuk himpunan S).



2.8 · Ringkasan Bab

· Tinjauan Bab

2.8.1. Graf pertama dan ketiga sama (cobalah menggeser simpul-simpulnya agar kedua gambar berimpit), tetapi graf di tengah berbeda (hal ini dapat Anda lihat, misalnya, dengan memperhatikan bahwa graf di tengah hanya memiliki satu simpul berderajat 2, sedangkan dua graf lainnya memiliki dua simpul semacam itu).

2.8.2. Graf pertama (dan ketiga) memiliki jejak Euler. Semua graf tersebut planar.

2.8.3. Sebagai contoh, K_5.

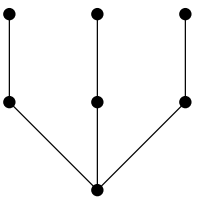
2.8.4. Sebagai contoh, $K_{3,3}$.

2.8.5.

(a) Ya, kedua graf tersebut isomorfik, sebagaimana dapat dilihat dengan menggambarnya. Salah satu isomorfismenya adalah:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ u & z & v & x & w & y & t \end{pmatrix}.$$

(b) Hal ini mudah dilakukan jika Anda menggambar grafnya. Berikut adalah salah satu graf semacam itu:

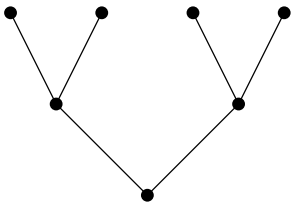


Pelabelan apa pun pada graf ini akan menghasilkan graf yang tidak isomorfik dengan G. Sebagai contoh, kita dapat mengambil $V'' = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan $E'' = \{ab, ac, ad, be, cf, dg\}$.

(c) Barisan derajat G adalah $(3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$.

(d) Secara umum, hal ini seharusnya mungkin: barisan derajat tidak menentukan kelas isomorfisme graf. Namun, dalam kasus ini, semula saya hampir

yakin bahwa hal tersebut tidak mungkin. Keyakinan itu berubah ketika saya menemukan graf berikut:



(e) G adalah pohon (tidak terdapat siklus) sehingga juga merupakan graf bipartit.

(f) Ya, semua pohon bersifat planar. Anda dapat menggambarnya pada bidang tanpa sisi yang berpotongan.

(g) Bilangan kromatik G adalah 2. Tidak sulit untuk memberikan pewarnaan dengan 2 warna (sebagai contoh, warnai a, d, e, g dengan merah dan b, c, f dengan biru), tetapi kita juga mengetahui bahwa semua graf bipartit yang memiliki sisi mempunyai bilangan kromatik 2.

(h) Dari gambar terlihat jelas bahwa tidak terdapat jejak Euler, apalagi sirkuit Euler. Selain itu, karena terdapat lebih dari 2 simpul berderajat ganjil, kita mengetahui dengan pasti bahwa tidak ada jejak Euler.

2.8.6. Ya. Menurut rumus Euler, graf tersebut akan memiliki 2 muka. Graf itu memang memiliki 2 muka. Satu-satunya graf semacam itu adalah C_{10}.

2.8.7.

(a) Hanya jika $n \geq 6$ dan nilainya genap.

(b) Tidak ada.

(c) 12. Graf semacam itu akan memiliki $\frac{5n}{2}$ sisi. Jika graf tersebut planar, maka $n - \frac{5n}{2} + f = 2$, sehingga terdapat $\frac{4+3n}{2}$ muka. Selain itu, harus berlaku $3f \leq 2e$ karena graf tersebut sederhana. Jadi, harus berlaku $3\left(\frac{4+3n}{2}\right) \leq 5n$. Penyelesaian terhadap n menghasilkan $n \geq 12$.

2.8.8.

(a) Terdapat 24 pasangan: 6 pilihan siswi dan 4 pilihan siswa.

(b) Terdapat 45 pasangan: $\binom{10}{2}$ karena kita harus memilih dua dari 10 orang untuk berdansa bersama.

(c) Untuk bagian (a), kita menghitung banyaknya sisi dalam $K_{4,6}$. Pada bagian (b), kita menghitung sisi-sisi K_{10}.

2.8.9. Ya, selama n genap. Jika n ganjil, graf yang bersesuaian akan memiliki jumlah simpul berderajat ganjil yang ganjil, dan hal ini tidak mungkin.

2.8.10.

(a) Tidak. Kesembilan segitiga masing-masing menyumbangkan 3 sisi, dan keenam segilima masing-masing menyumbangkan 5 sisi. Jumlahnya adalah 57, yang harus sama dengan dua kali jumlah sisi karena setiap sisi membatasi tepat 2 muka. Namun, 57 ganjil, sehingga hal ini tidak mungkin.

(b) Sekarang, penjumlahan seluruh sisi dari keenam belas poligon menghasilkan 64, yang berarti polihedron tersebut memiliki 32 sisi. Selanjutnya, kita dapat menggunakan rumus Euler $v - e + f = 2$ untuk menyimpulkan bahwa harus terdapat 18 simpul.

(c) Jika kita menjumlahkan semua simpul dari setiap poligon secara terpisah, jumlahnya adalah 64. Bilangan ini tidak habis dibagi 3, sehingga tidak mungkin setiap simpul menjadi bagian dari tepat 3 muka. Mungkinkah semuanya menjadi bagian dari 4 muka? Hal itu berarti terdapat $64/4 = 16$ simpul, tetapi berdasarkan rumus Euler kita mengetahui bahwa harus terdapat 18 simpul. Kita dapat menuliskan $64 = 3x + 4y$ dan menyelesaikannya untuk x dan y (sebagai bilangan bulat). Kita memperoleh bahwa harus terdapat 10 simpul berderajat 4 dan 8 simpul berderajat 3. (Perhatikan bahwa jumlah muka yang bertemu pada suatu simpul sama dengan derajatnya dalam istilah teori graf.)

2.8.11. Tidak. Setiap polihedron dapat direpresentasikan sebagai graf planar, dan Teorema Empat Warna menyatakan bahwa setiap graf planar memiliki bilangan kromatik paling besar 4.

2.8.12. $K_{n,n}$ memiliki n^2 sisi. Graf tersebut memiliki sirkuit Euler ketika n genap. Graf tersebut planar hanya ketika $n < 3$.

2.8.13. G memiliki 8 sisi (karena jumlah derajatnya adalah 16). Jika G planar, graf tersebut akan memiliki 4 muka (karena $6 - 8 + 4 = 2$). G tidak memiliki jejak Euler karena terdapat lebih dari 2 simpul berderajat ganjil.

2.8.14. 7 warna. Jadi, K_7 tidak planar (berdasarkan kontraposisi Teorema Empat Warna).

2.8.15. Bilangan kromatik $K_{3,4}$ adalah 2 karena graf tersebut bipartit. Anda tidak dapat menentukan apakah graf tersebut planar berdasarkan pewarnaan ini (konvers Teorema Empat Warna tidak benar). Sebenarnya, graf tersebut *tidak* planar karena memuat $K_{3,3}$ sebagai subgraf.

2.8.16. Kita mengetahui bahwa $K_{3,4}$ memiliki 7 simpul dan 12 sisi (setiap simpul dalam kelompok beranggota 3 memiliki derajat 4). Berdasarkan rumus Euler, berlaku $7 - 12 + f = 2$, sehingga jika graf tersebut planar, graf itu akan memiliki $f = 7$ muka. Namun, karena panjang siklus terpendek (girth) graf tersebut adalah 4 (tidak terdapat siklus dengan panjang 3), kita memperoleh $4f \leq 2e$. Akan tetapi, hal ini berarti $28 \leq 24$, suatu kontradiksi.

2.8.17. Dalam semua pertanyaan ini, sebenarnya kita mewarnai simpul-simpul suatu graf. Graf tersebut diperoleh dengan terlebih dahulu menggambar representasi

planar polihedron, lalu mengambil dual planarnya: tempatkan sebuah simpul di tengah setiap muka (termasuk muka luar), dan hubungkan dua simpul apabila muka yang bersesuaian berbagi sisi.

(a) Karena dual planar dodekahedron memuat roda-5, bilangan kromatiknya sedikitnya 4. Sebagai alternatif, andaikan Anda dapat mewarnai muka-mukanya dengan 3 warna tanpa ada dua muka bertetangga yang diberi warna sama. Ambil sembarang muka dan warnai biru. Kelima segilima yang berbatasan dengan segilima biru tersebut tidak dapat diwarnai biru. Warnai segilima pertama dengan merah. Kedua tetangganya (yang bertetangga dengan segilima biru) harus diwarnai hijau. Dua segilima yang tersisa tidak dapat diwarnai biru atau hijau, tetapi juga tidak dapat keduanya diwarnai merah karena keduanya saling bertetangga. Jadi, diperlukan warna keempat.

(b) Dual planar dodekahedron itu sendiri merupakan graf planar. Jadi, berdasarkan Teorema Empat Warna, graf tersebut dapat diwarnai hanya dengan 4 warna tanpa ada dua simpul bertetangga (yang bersesuaian dengan muka polihedron) diberi warna sama.

(c) Muka-muka kubus dapat diwarnai secara tepat dengan 3 warna. Warnai muka "atas" dan "bawah" dengan merah, muka "depan" dan "belakang" dengan biru, serta muka "kiri" dan "kanan" dengan hijau.

2.8.18.

(a) Salah. Untuk membuktikannya, kita dapat memberikan contoh sepasang graf yang memiliki bilangan kromatik sama tetapi tidak isomorfik. Sebagai contoh, $K_{3,3}$ dan $K_{3,4}$ sama-sama memiliki bilangan kromatik 2 tetapi tidak isomorfik.

(b) Salah. Contoh sebelumnya tidak dapat digunakan, tetapi Anda dapat dengan mudah menggambar dua pohon yang memiliki jumlah simpul dan sisi sama tetapi tidak isomorfik. Karena semua pohon yang memiliki sisi mempunyai bilangan kromatik 2, pasangan ini merupakan contoh penyangkal.

(c) Benar. Jika terdapat isomorfisme dari G_1 ke G_2, kita memiliki bijeksi yang menunjukkan pasangan simpul di antara kedua graf. Setiap pewarnaan simpul yang tepat pada G_1 menunjukkan cara mewarnai G_2 secara tepat, cukup dengan memberi $f(v_i)$ warna yang sama dengan v_i untuk setiap simpul $v_i \in V$. Artinya, warnai simpul-simpul dalam G_2 persis seperti simpul-simpul yang bersesuaian dalam G_1. Demikian pula, setiap pewarnaan simpul yang tepat pada G_2 bersesuaian dengan pewarnaan simpul yang tepat pada G_1. Jadi, jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai G_1 secara tepat tidak mungkin lebih kecil daripada jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai G_2 secara tepat, dan sebaliknya, sehingga bilangan kromatik keduanya harus sama.

2.8.19. G memiliki 13 sisi karena harus berlaku $7 - e + 8 = 2$.

2.8.20.

(a) Graf tersebut memiliki jejak Euler, tetapi tidak memiliki sirkuit Euler. Terdapat tepat dua simpul berderajat ganjil. Jejak itu bermula pada salah satunya dan berakhir pada simpul lainnya.

(b) Graf tersebut planar. Meskipun gambar yang diberikan memiliki sisi-sisi yang berpotongan, graf tersebut mudah digambar ulang tanpa sisi yang berpotongan.

(c) Graf tersebut tidak bipartit (terdapat siklus ganjil) dan juga tidak lengkap.

(d) Bilangan kromatik graf tersebut adalah 3.

2.8.21.

(a) Salah. Sebagai contoh, $K_{3,3}$ tidak planar.

(b) Benar. Graf tersebut bipartit, sehingga simpul-simpulnya dapat dibagi menjadi dua kelompok tanpa sisi di antara simpul-simpul dalam kelompok yang sama. Jadi, kita dapat mewarnai semua simpul dalam satu kelompok dengan merah dan kelompok lainnya dengan biru.

(c) Salah. $K_{3,3}$ memiliki 6 simpul berderajat 3 sehingga tidak memiliki jejak Euler.

(d) Salah. Sekali lagi, $K_{3,3}$ merupakan contoh penyangkal.

(e) Salah. Jumlah derajat semua simpul bernilai genap untuk *setiap* graf, sehingga sifat ini tidak mengakibatkan graf tersebut bipartit.

2.8.22.

(a) Jika suatu graf memiliki jejak Euler, graf tersebut planar.

(b) Jika suatu graf tidak memiliki jejak Euler, graf tersebut tidak planar.

(c) Terdapat graf planar yang tidak memiliki jejak Euler.

(d) Ya. Dalam kasus ini, hal tersebut terjadi karena pernyataan semula salah.

(e) Salah. K_4 planar tetapi tidak memiliki jejak Euler.

(f) Salah. K_5 memiliki jejak Euler tetapi tidak planar.

3 · Pencacahan
3.1 · Segitiga Aritmetika Pascal
3.1.7 · Soal Latihan

3.1.7.7.

a. $\binom{10}{5} = 252$ pilihan, karena Anda harus memilih himpunan bagian 5-elemen dari himpunan 10 isian.

b. $\binom{9}{5}$ = 126 pilihan, karena Anda harus memilih 5 dari 9 isian selain paprika hijau.

c. $\binom{9}{4}$ = 126 pilihan, karena Anda harus memilih 4 dari 9 isian selain paprika hijau yang tersisa untuk digunakan bersama paprika hijau.

Perhatikan bahwa 252 = 126 + 126 pilihan. Hal ini masuk akal karena setiap calzone dengan 5 isian memuat paprika hijau atau tidak memuat paprika hijau.

3.1.7.9. Untuk memperoleh x^{14}, kita harus memilih 14 dari 16 faktor agar masing-masing menyumbangkan x, sehingga 2 faktor lainnya menyumbangkan 3. Terdapat $\binom{16}{14}$ cara untuk memilih 14 faktor tersebut. Jadi, suku yang memuat x^{14} adalah $\binom{16}{14}x^{14}3^2$. Dengan kata lain, koefisien x^{14} adalah $\binom{16}{14}3^2 = 1080$.

3.1.7.10. Untuk memperoleh x^9 dari suku pertama, kita harus memilih 9 dari 17 faktor agar masing-masing menyumbangkan x, sehingga 8 faktor lainnya menyumbangkan 2. Terdapat $\binom{17}{9}$ cara untuk memilih 9 faktor tersebut, sehingga koefisiennya adalah $\binom{17}{9} * 2^8$. Selanjutnya, kita harus memilih 5 faktor pada suku kedua agar masing-masing menyumbangkan x, sehingga 16 faktor lainnya menyumbangkan 3. Hal ini menghasilkan koefisien $\binom{21}{5} * 3^{16}$ dari suku tersebut. Secara keseluruhan, koefisien x^9 adalah $\binom{17}{9} * 2^8 + \binom{21}{5} * 3^{16} = 8.75964 \times 10^{11}$.

3.2 · Menggabungkan Hasil

3.2.6 · Soal Latihan

3.2.6.1. Menurut prinsip perkalian, terdapat $6 \times 3 \times 15 = 270$ setelan pakaian berbeda.

3.2.6.2.

a. 8 + 3 = 11 pilihan dasi. Gunakan prinsip penjumlahan.

b. $8 \cdot 3 = 24$ pasangan dasi. Gunakan prinsip perkalian.

c. $2 \cdot (7 + 3) + 8 = 28$ pilihan pakaian.

3.2.6.3.

a. Terdapat 256 bilangan heksadesimal 3 digit yang digit pertamanya E, satu untuk setiap pilihan digit sisanya. Demikian pula, terdapat 256 bilangan heksadesimal yang digit pertamanya F. Kita mencari gabungan dua himpunan yang saling lepas ini, sehingga terdapat $256 + 256 = 2 \cdot 256 = 512$ bilangan heksadesimal 3 digit yang digit pertamanya E atau F.

b. Digit pertama dapat dipilih dengan 6 cara, masing-masing digit ke-2 sampai ke-5 dengan 16 cara, dan digit terakhir dengan 10 cara. Jadi, terdapat $6 \cdot 16^4 \cdot 10 = 3932160$ bilangan heksadesimal yang memenuhi syarat tersebut.

c. Banyaknya bilangan heksadesimal 4 digit yang diawali huruf adalah $6 \cdot 16^3 = 24576$. Banyaknya bilangan heksadesimal 4 digit yang diakhiri angka adalah $16^3 \cdot 10 = 40960$. Kita menginginkan semua anggota dari kedua himpunan ini. Akan tetapi, keduanya sama-sama memuat bilangan heksadesimal 4 digit

yang sekaligus diawali huruf dan diakhiri angka, sebanyak $6 \cdot 16^2 \cdot 10 = 15360$, sehingga banyaknya harus dikurangi satu kali. Jadi, banyaknya bilangan heksadesimal 4 digit yang diawali huruf atau diakhiri angka adalah:

$$24576 + 40960 - 15360 = 50176$$

3.2.6.4.

a. $2^8 = 256$ himpunan bagian. Untuk masing-masing dari 8 anggota, kita memilih apakah anggota tersebut disertakan atau tidak.

b. $2^5 = 32$ himpunan bagian. Untuk masing-masing dari 5 anggota yang tersisa, kita memilih apakah anggota tersebut disertakan atau tidak.

c. $2^8 - 2^4 = 240$ himpunan bagian. Dari banyaknya semua himpunan bagian, kurangi banyaknya himpunan bagian yang tidak memuat bilangan ganjil. Banyaknya himpunan semacam itu adalah 2^4, karena untuk setiap anggota genap kita memilih apakah anggota tersebut disertakan atau tidak.

d. $\binom{4}{1} \cdot 2^4 = 64$ himpunan bagian. Pertama pilih satu bilangan genap. Kemudian, untuk setiap bilangan ganjil, pilih apakah bilangan tersebut disertakan atau tidak.

3.2.6.5.

a. $\binom{6}{4} = 15$ subhimpunan

b. $\binom{3}{1} = 3$ subhimpunan. Kita perlu memilih 1 dari 3 elemen S yang tersisa untuk dimasukkan ke dalam subhimpunan.

c. $\binom{6}{4} = 15$ subhimpunan. Setiap subhimpunan dengan kardinalitas 4 harus memuat setidaknya satu bilangan ganjil.

d. $\binom{3}{1} = 3$ subhimpunan. Pilih 1 dari 3 bilangan genap. Semua 3 bilangan ganjil dalam S yang tersisa harus berada dalam subhimpunan.

3.2.6.7.

a. Setiap barisan dapat dipandang sebagai string 4 bit berbobot 2, karena 2 dari 4 koin harus berupa koin satu sen. Jadi, terdapat $\binom{4}{2} = 6$ barisan yang mungkin. Setiap barisan memerlukan 4 koin, sehingga untuk menyusun semua barisan sekaligus diperlukan 24 koin, separuh koin lima sen dan separuh koin satu sen.

b. Sekarang terdapat $2^4 = 16$ barisan yang mungkin. Jika barisan dikelompokkan menurut banyaknya koin satu sen—0, 1, 2, dan seterusnya—jumlah ini juga sama dengan $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{4}{4}$. Karena setiap barisan memuat 4 koin, seluruhnya diperlukan $4 \cdot 16 = 64$ koin.

3.2.6.8. Hitung secara terpisah banyaknya string untuk setiap jumlah angka 1 yang diperbolehkan, lalu jumlahkan semuanya. Dengan demikian, terdapat $\binom{11}{4} + \binom{11}{5} + \cdots \binom{11}{11} = 1816$ string.

3.2.6.9. Pertanyaan ini setara dengan pertanyaan tentang string 10 bit, karena setiap himpunan bagian dapat direpresentasikan oleh string 10 bit dengan angka 1 yang menandakan bahwa anggota terkait disertakan. Jadi, terdapat $\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \cdots + \binom{10}{10} = 176$ himpunan bagian.

3.2.6.10.

a. $\binom{14}{7} = 3432$ lintasan. Semua lintasan memiliki panjang 14, yaitu 7 langkah ke atas dan 7 langkah ke kanan. Kita cukup memilih 7 dari 14 langkah tersebut yang akan diarahkan ke kanan.

b. $\binom{7}{3}\binom{7}{4} = 1225$ lintasan. Pertama bergeraklah menuju $(8, 9)$, lalu lanjutkan ke $(12, 12)$.

c. $\binom{14}{7} - \binom{7}{3}\binom{7}{4} = 2207$ lintasan. Kurangi semua lintasan yang dihitung pada bagian (b).

3.2.7 · Latihan Tambahan

3.2.7.1.

(a) Sebagai contoh, 16 adalah banyaknya pilihan jika Anda ingin menonton satu film, berupa film komedi atau film horor.

(b) Sebagai contoh, 63 adalah banyaknya pilihan jika Anda akan menonton dua film, pertama film komedi lalu film horor.

3.3 · Hasil yang Tidak Saling Lepas

3.3.6 · Soal Latihan

3.3.6.3. 49 mahasiswa. Gunakan diagram Venn atau prinsip inklusi–eksklusi (PIE): $30 + 24 + 28 - (18 + 10 + 12) + 7 = 49$.

3.3.6.4. Dengan menggunakan prinsip inklusi–eksklusi, banyak mahasiswa yang menyukai sedikitnya satu olahan kentang yang disebutkan adalah

$54 + 39 + 51 - (18 + 28 + 29) + 11 = 80.$

Jadi, ada $100 - 80 = 20$ mahasiswa yang tidak menyukai kentang. Soal ini juga dapat diselesaikan dengan diagram Venn.

3.3.6.5.

a. $2^{10} = 1024$. Terdapat 2 pilihan untuk setiap bit pada 10 posisi yang tersisa.

b. $\binom{10}{6} = 210$. Kita perlu memilih 6 dari 10 bit yang tersisa untuk bernilai 1.

c. 2816. Ada 2^{10} string yang diawali 011 dan 2^{11} string yang diakhiri 01 (untuk 11 bit, kita memilih 1 atau 0). Namun, string yang diawali 011 sekaligus diakhiri 01 terhitung dua kali; ada 2^8 string semacam itu. Dengan prinsip inklusi–eksklusi (PIE), diperoleh $2^{10} + 2^{11} - 2^8 = 2816$.

d. 484. Ada $\binom{10}{6} = 210$ string berbobot 8 yang diawali 011 dan $\binom{11}{7} = 330$ string yang diakhiri 01. Sekali lagi terjadi penghitungan ganda: ada string berbobot

8 yang diawali 011 sekaligus diakhiri 01, tepatnya sebanyak $\binom{8}{5} = 56$. Jadi, seluruhnya ada $210 + 330 - 56 = 484$ string.

3.3.6.6. Ada 429 nilai n. Gunakan prinsip inklusi–eksklusi (PIE), yaitu $178 + 238 + 143 - (59 + 35 + 47) + 11$, atau gunakan diagram Venn. Untuk menentukan banyak bilangan yang habis dibagi 3 dan 5, misalnya, hitung $715/(3 \cdot 5)$ lalu bulatkan ke bawah.

3.3.6.7. Untuk menentukan banyak bilangan yang benar-benar kurang dari 1400 dan merupakan kelipatan 4, kita dapat membagi $1400 - 1$ dengan 4 lalu membulatkan hasilnya ke bawah. Ada 349 bilangan semacam itu. Demikian pula, terdapat 199 kelipatan 7 dan 155 kelipatan 9 yang kurang dari 1400.

Kita juga perlu memperhitungkan irisannya. Bilangan yang merupakan kelipatan 4 dan 7 harus merupakan kelipatan 28; terdapat 49 bilangan semacam itu. Terdapat 38 bilangan yang merupakan kelipatan 4 dan 9, serta 22 bilangan yang merupakan kelipatan 7 dan 9. Terakhir, terdapat 5 bilangan yang merupakan kelipatan ketiganya.

Dengan menggunakan prinsip inklusi–eksklusi (PIE), diperoleh
$349 + 199 + 155 - (49 + 38 + 22) + 5 = 599$
bilangan yang kurang dari 1400 dan merupakan kelipatan 4, 7, atau 9.

3.3.6.8.

a. Ada $12^{13} = 1.06993 \times 10^{14}$ kata, karena untuk masing-masing dari 13 posisi kita memilih satu dari 12 huruf.

b. Ada $(12) \cdot (11) \cdot (10) \ldots (12 - 13 + 1) = 0$ kata. Setelah satu huruf dipilih, jumlah huruf yang tersedia untuk posisi berikutnya berkurang.

c. Ada $12^{10} = 6.19174 \times 10^{10}$ kata: kita hanya perlu memilih huruf-huruf yang mengikuti "ade".

d. Ada $12^{10} + 12^{11} - 12^8 = 8.04496 \times 10^{11}$ kata. Terdapat 12^{10} kata yang diawali "ade" dan 12^{11} kata lain yang diakhiri "be". Selanjutnya, kita kurangi kata-kata yang memenuhi keduanya karena sebelumnya terhitung dua kali.

e. Ada $(12 \cdot (12-1) \cdot (12-2) \ldots (12-13+1)) - (11 \cdot (9) \cdot (9-1) \cdot (9-2) \ldots 9-10+1) = 0$ kata. Kita mengambil semua kata tanpa pengulangan, lalu mengurangi kata-kata yang memuat subkata terlarang "bed". Subkata "bed" dapat dimulai pada salah satu dari 11 posisi; untuk setiap posisi tersebut, kita harus memilih 10 huruf sisanya dari 9 huruf yang tersisa dalam alfabet.

3.4 · Kombinasi dan Permutasi
3.4.6 · Soal Latihan

3.4.6.1.

a. Ada $\binom{8}{2} = 28$ piza. Kita harus memilih 2 dari 8 jenis topping tanpa memperhatikan urutan.

b. Ada $2^8 = 256$ piza. Untuk setiap jenis topping, pilih ya atau tidak.

c. Ada $P(8,4) = 1680$ cara. Isilah masing-masing dari 4 posisi pada kolom kiri dengan satu jenis topping piza yang berbeda.

3.4.6.2. Meskipun namanya kunci kombinasi, yang kita hitung di sini bukanlah kombinasi dalam arti matematis. Urutan kemunculan ketiga angka penting. Ada $P(41,3) = 41 \cdot 40 \cdot 39$ kemungkinan berbeda untuk "kombinasi" kunci tersebut. Perhitungan ini menganggap tidak ada angka yang boleh diulang (jika pengulangan diperbolehkan, jawabannya adalah 41^3).

3.4.6.3.

a. Ini merupakan penerapan langsung prinsip perkalian. Untuk setiap satu dari 7 posisi, tersedia 8 digit yang dapat dipilih, sehingga terdapat $8^7 = 2.09715 \times 10^6$ bilangan.

b. Sekarang tersedia 8 pilihan untuk digit pertama, 7 untuk digit kedua, dan seterusnya. Jadi, terdapat $8 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (9-7) = P(8,7) = 40320$ bilangan.

c. Untuk membentuk bilangan semacam itu, kita cukup memilih 7 digit berbeda. Setelah dipilih, hanya ada satu cara untuk menyusunnya dalam urutan menaik. Jadi, terdapat $\binom{8}{7} = 8$ bilangan.

3.4.6.4.

a. Jawabannya dapat ditulis sebagai $P(30,19) = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 12$, yang sama dengan $\frac{30!}{11!}$. Jika kita memandang prosesnya sebagai memilih 19 buku lalu menyusun 19 buku tersebut, jawabannya juga dapat ditulis sebagai $\binom{30}{19} \cdot 19!$. Karena urutan apa pun diperbolehkan dan susunan yang berbeda dihitung sebagai hasil yang berbeda, permutasi tepat digunakan di sini.

b. Di sini kita hanya perlu memilih buku; setelah itu tidak ada pilihan dalam penyusunannya. Jadi, jawabannya adalah $\binom{30}{19}$.

3.4.6.5. Karena terdapat 14 huruf berbeda dalam "ambidextrously", tersedia 14 pilihan untuk huruf pertama, 13 untuk huruf berikutnya, 12 untuk huruf setelahnya, dan seterusnya. Jadi, terdapat 14! anagram.

3.4.6.6. Setelah huruf pertama (yaitu s), kita harus menyusun ulang 5 huruf yang tersisa. Kini hanya ada dua jenis huruf, sehingga persoalan ini sebenarnya setara dengan persoalan untaian bit: satu jenis huruf berperan sebagai 0 dan jenis lainnya sebagai 1. Jadi, terdapat $\binom{5}{2} = 10$ anagram yang diawali "s".

3.4.6.7. Pertama, tentukan posisi untuk menempatkan ketiga huruf "g". Terdapat 7 posisi dan kita harus memilih 3 di antaranya untuk diisi dengan "g". Hal ini dapat dilakukan dengan $\binom{7}{3}$ cara. Masing-masing dari 4 posisi yang tersisa diisi dengan huruf yang berbeda, sehingga ada 4! cara untuk menyelesaikan anagram. Jadi, seluruhnya terdapat $\binom{7}{3} \cdot 4!$ anagram. Menariknya, hasilnya adalah 840, yang juga sama dengan $P(7,4)$. Untuk memperoleh jawaban dengan cara ini, mulailah dengan memilih satu dari 7 *posisi* untuk diisi huruf pertama yang bukan "g", lalu pilih salah satu posisi yang masih tersisa untuk huruf berikutnya, dan seterusnya.

Setelah itu, tempatkan "g" pada 3 posisi yang tersisa.

3.4.6.8.

a. $\binom{40}{4} \cdot \binom{36}{4} \cdot \binom{32}{4} \cdot \cdots \cdot \binom{4}{4}$ cara. Pilih 4 dari 40 orang untuk kelompok berempat pertama, lalu 4 dari 36 orang yang tersisa untuk kelompok kedua, dan seterusnya (gunakan prinsip perkalian untuk menggabungkannya).

b. $10!\binom{30}{3} \cdot \binom{27}{3} \cdot \binom{24}{3} \cdot \cdots \cdot \binom{3}{3}$ cara. Pertama tentukan jadwal tee bagi 10 anggota dewan, lalu pilih 3 dari 30 orang yang bukan anggota dewan untuk bermain dengan anggota dewan pertama, kemudian 3 dari 27 orang yang tersisa untuk bermain dengan anggota dewan kedua, dan seterusnya.

3.4.6.9. 13!. Ada 14 orang yang duduk mengelilingi meja, tetapi posisi Raja Arthur tidak penting. Yang penting hanyalah siapa yang duduk di sebelah kirinya, dua kursi di sebelah kirinya, dan seterusnya.

3.4.6.10.

a. Ada 22^{13} fungsi. Untuk bayangan setiap elemen domain, tersedia 22 pilihan.

b. Ada $P(22, 13) = 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \cdots \cdot 9$ fungsi injektif. Tersedia 22 pilihan untuk bayangan elemen pertama domain, lalu hanya 21 pilihan untuk elemen kedua, 20 untuk elemen ketiga, dan seterusnya.

3.4.6.11.

a. Ada $6^5 = 7776$ fungsi, karena tersedia 6 pilihan bayangan untuk masing-masing dari 5 elemen domain.

b. Ada $P(6, 5) = 6 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 2 = 720$ fungsi, karena nilai keluaran tidak boleh berulang.

c. Ada $\binom{6}{5} = 6$ fungsi. Karena fungsi harus injektif dan naik, kita cukup memilih 5 elemen berbeda yang akan menjadi nilai fungsi dari 6 elemen kodomain. Setelah elemen-elemen itu dipilih, elemen terkecil harus menjadi bayangan 1, elemen terkecil berikutnya menjadi bayangan 2, dan seterusnya. Langkah ini tidak menambah banyak fungsi karena hanya ada satu cara untuk memasangkan elemen-elemen terpilih tersebut agar fungsi naik.

3.4.7 · Latihan Tambahan

3.4.7.1. 120.

3.5 · Menghitung Multihimpunan

3.5.5 · Soal Latihan

3.5.5.1.

a. $\binom{10}{9}$ himpunan. Kita harus memilih 9 dari 10 digit untuk dimasukkan ke dalam himpunan.

b. Gunakan batang dan batu: Setiap batu merepresentasikan salah satu dari

9 elemen multihimpunan; setiap batang merepresentasikan perpindahan antar-digit. Jadi terdapat 9 batu dan 9 batang, yang menghasilkan $\binom{18}{9}$ multihimpunan.

3.5.5.2.

a. Terdapat $\binom{6}{5}$ bilangan. Kita cukup memilih 5 dari 6 digit dan, setelah pilihan dibuat, menempatkannya dalam urutan menaik.

b. Gunakan batang dan batu. Gunakan satu batu untuk merepresentasikan masing-masing dari 5 digit dalam bilangan tersebut, dan gunakan posisinya relatif terhadap batang untuk menunjukkan angka mana yang mengisi posisi itu. Jadi kita memiliki 5 batu dan 5 batang, yang menghasilkan $\binom{10}{5}$ bilangan.

3.5.5.3.

a. $\binom{25}{16}$ cara. Setiap hasil dapat direpresentasikan oleh barisan yang terdiri atas 9 batang dan 16 batu.

b. $\binom{15}{6}$ cara. Pertama, masukkan satu bola ke dalam setiap wadah. Setelah itu tersisa 9 batang dan 6 batu.

3.5.5.4.

a. $\binom{11}{9}$ solusi. Setelah setiap variabel terlebih dahulu memperoleh 1 batu, tersisa 9 batu dan 2 batang.

b. $\binom{14}{12}$ solusi. Kita memiliki 12 batu dan 2 batang.

c. $\binom{23}{2}$ solusi. Masalah ini ekuivalen dengan menentukan banyaknya solusi untuk $x' + y' + z' = 21$ dengan x', y', dan z' taknegatif. (Sesungguhnya kita hanya melakukan substitusi. Ambil $x = x' - 3$, $y = y' - 3$ dan $z = z' - 3$).

3.5.5.5. Dalam Yahtzee biasa, terdapat $\binom{10}{5}$ hasil yang mungkin. Setiap dadu direpresentasikan oleh satu batu; nilainya ditentukan oleh letak batu itu relatif terhadap batang.

Untuk Super-Yahtzee, terdapat $\binom{13}{9}$ hasil. Kita memiliki 4 batu (untuk 4 dadu) dan 9 batang (untuk 9 perpindahan di antara bilangan 1 sampai 10).

3.5.5.6. Kita harus menentukan banyaknya kombinasi berbeda dari 9 keping uang logam yang mungkin. Misalkan setiap batu merepresentasikan satu keping uang logam dan setiap batang merepresentasikan perpindahan dari satu jenis uang logam ke jenis berikutnya. Sebagai contoh, jika kita memiliki 7 keping uang logam, $**|*||****$ merepresentasikan 2 *penny*, satu *nickel*, tanpa *dime*, dan 4 *quarter*. Banyaknya diagram batang dan batu dengan total 12 simbol (9 batu dan 3 batang) adalah $\binom{12}{9}$. Jadi peluang Anda menebak dengan benar adalah 0.00454545.

3.5.5.7. Terdapat $\binom{25}{22}$ solusi. Pertama, kita memenuhi kendala pada variabel-variabel tersebut dengan membagikan 13 satuan kepada mereka. Kemudian kita menentukan semua solusi untuk $x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 22$ dalam bilangan bulat taknegatif.

3.5.5.8.

a. $\binom{13}{6} = 1716$. Perhatikan bahwa fungsi yang menaik secara ketat pasti injektif. Jadi, semua 6 keluaran harus berbeda. Pertama-tama, pilih 6 keluaran yang akan kita gunakan: terdapat $\binom{13}{6}$ cara untuk melakukannya. Sekarang, ada berapa cara untuk menetapkan keluaran-keluaran itu kepada masukan 1 sampai 6? Hanya satu cara, karena hanya ada satu cara untuk menyusun bilangan dalam urutan menaik.

b. $\binom{18}{6}$. Ini sebenarnya merupakan masalah batang dan batu. Batu-batunya adalah 6 masukan, dan batang-batangnya adalah 12 celah di antara 13 keluaran yang mungkin. Pandanglah demikian: Kita akan menetapkan $f(1)$, lalu $f(2)$, lalu $f(3)$, dan seterusnya dalam urutan itu. Mulailah dengan kemungkinan keluaran 0. Kita dapat menggunakannya sebagai keluaran $f(1)$, atau beralih ke 1 sebagai keluaran yang mungkin. Misalkan kita menetapkan $f(1) = 1$. Sekarang kita berada pada 1 (tidak dapat kembali ke 0). Apakah $f(2) = 1$? Jika ya, letakkan satu batu lagi. Jika tidak, letakkan satu batang dan beralih ke 2. Anda mungkin beralih ke 3, lalu menetapkan $f(2) = 3$ dan $f(3) = 3$ (dua batu lagi) sebelum beralih ke 4 sebagai keluaran yang mungkin. Demikian seterusnya.

3.5.5.9.

a. $\binom{28}{7}$ racikan soda (urutan tidak penting dan pengulangan tidak diperbolehkan).

b. $P(28, 7) = (28) \cdot (28 - 1) \cdot \cdots \cdot 22$ racikan soda (urutan penting dan pengulangan tidak diperbolehkan).

c. $\binom{34}{7}$ racikan soda (urutan tidak penting dan pengulangan diperbolehkan; 7 batu dan 27 batang).

d. 28^7 racikan soda (urutan penting dan pengulangan diperbolehkan; 28 pilihan dilakukan 7 kali).

3.5.6 · Latihan Tambahan

3.5.6.1.

(a) Anda mengambil 3 rasa stroberi, 1 limau, 0 akar manis, 2 bluberi, dan 0 permen karet.

(b) Ini terbalik. Kita tidak ingin batu merepresentasikan anak-anak karena anak-anak tersebut tidak identik, sedangkan batu-batunya identik. Sebaliknya, kita harus menggunakan 5 batu (untuk lolipop) dan 5 batang untuk berpindah di antara 6 anak. Sebagai contoh,

$$\circ\circ\|\circ\circ\circ\|\|$$

merepresentasikan hasil ketika anak pertama memperoleh 2 lolipop, anak ketiga memperoleh 3, dan anak-anak lainnya tidak memperoleh satu pun.

(c) Ini adalah kata AAAEOO.

(d) Ini tidak merepresentasikan suatu solusi. Setiap batu seharusnya merepresentasikan satu dari 6 satuan yang jumlahnya 6, dan batang-batang seharusnya *menandai perpindahan* di antara variabel-variabel yang berbeda. Kita memiliki satu batang terlalu banyak. Salah satu contoh diagram yang benar adalah

$$\circ|\circ\circ||\circ\circ\circ,$$

yang merepresentasikan bahwa $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, dan $x_4 = 3$.

3.6 · Pembuktian Kombinatorial
3.6.5 · Soal Latihan

3.6.5.1.

- Perhatikan pertanyaan, "Ada berapa bilangan dua digit yang diawali dengan 3 atau 4?"
- Cara pertama untuk menjawab pertanyaan ini menghasilkan $10 + 10$.
- Hal ini karena terdapat 10 bilangan yang diawali dengan 3 dan 10 bilangan lainnya yang diawali dengan 4.
- Jawaban kedua untuk pertanyaan tersebut adalah $2 \cdot 10$.
- Hal ini karena Anda memiliki 2 pilihan untuk digit pertama dan 10 pilihan untuk digit kedua.
- Karena kedua ekspresi menjawab pertanyaan yang sama, keduanya harus sama. Jadi, $10 + 10 = 2 \cdot 10$.

3.6.5.2.

A. *Salah.*

Ini tidak akan membantu karena ketika kita berpindah dari satu ruas persamaan ke ruas lainnya, kita tidak menghitung hal yang sama. Kita memerlukan pertanyaan yang membuat k benda dan 2 benda berasal dari himpunan yang sama, yang terdiri atas n benda.

B. *Benar.*

C. *Salah.*

Jika kita menginginkan 2 atau k orang, kita harus menjumlahkan banyaknya hasil dari masing-masing pilihan.

D. *Benar.*

3.6.6 · Latihan Tambahan

3.6.6.1.

Bukti. Pertanyaan: Ada berapa kata 2 huruf yang diawali dengan a, b, atau c dan diakhiri dengan y atau z?

Jawaban 1: Terdapat dua kata yang diawali dengan a, dua yang diawali dengan b, dan dua yang diawali dengan c, sehingga jumlahnya $2 + 2 + 2$.

Jawaban 2: Terdapat tiga pilihan untuk huruf pertama dan dua pilihan untuk huruf kedua, sehingga jumlahnya $3 \cdot 2$.

Karena kedua jawaban tersebut menjawab pertanyaan yang sama, keduanya sama. Jadi, $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$. ■

3.6.6.5.

(a) Ia memiliki $\binom{15}{6}$ cara untuk memilih 6 pengiring pengantin, lalu untuk setiap cara tersebut terdapat 6 pilihan untuk pengiring pengantin utama. Jadi, ia memiliki $\binom{15}{6}6$ pilihan.

(b) Ia memiliki 15 pilihan untuk menentukan pengiring pengantin utama. Kemudian ia perlu memilih 5 dari 14 sahabat yang tersisa sebagai pengiring pengantin, yang dapat dilakukan dalam $\binom{14}{5}$ cara. Jadi, ia memiliki $15\binom{14}{5}$ pilihan.

(c) Kita telah menjawab pertanyaan (ada berapa rombongan pengantin yang dapat dipilih mempelai perempuan) dengan dua cara. Cara pertama menghasilkan ruas kiri identitas, sedangkan cara kedua menghasilkan ruas kanannya. Oleh karena itu, identitas tersebut berlaku.

3.6.6.7.

Bukti. Pertanyaan: Anda memiliki wadah besar berisi bola pingpong, yang masing-masing diberi nomor berbeda. Anda harus memilih k bola, menempatkan dua di antaranya ke dalam stoples dan yang lainnya ke dalam kotak. Ada berapa cara untuk melakukannya?

Jawaban 1: Pertama, pilih 2 dari n bola untuk ditempatkan dalam stoples. Kemudian pilih $k-2$ dari $n-2$ bola yang tersisa untuk ditempatkan dalam kotak. Tugas pertama dapat dilakukan dalam $\binom{n}{2}$ cara berbeda dan tugas kedua dalam $\binom{n-2}{k-2}$ cara. Jadi, terdapat $\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$ cara untuk memilih bola-bola tersebut.

Jawaban 2: Pertama, pilih k bola dari n bola di dalam wadah. Kemudian pilih 2 dari k bola yang telah dipilih untuk ditempatkan dalam stoples, dan tempatkan $k-2$ bola yang tersisa dalam kotak. Tugas pertama dapat dilakukan dalam $\binom{n}{k}$ cara dan tugas kedua dalam $\binom{k}{2}$ cara. Jadi, terdapat $\binom{n}{k}\binom{k}{2}$ cara untuk memilih bola-bola tersebut.

Karena kedua jawaban mencacah hal yang sama, keduanya harus sama, sehingga identitas tersebut terbukti. ■

3.8 · Pencacahan Lanjut dengan Prinsip Inklusi–Eksklusi
3.8.5 · Soal Latihan

3.8.5.1.

a. $\binom{15}{6}$ kombinasi makanan. Pertama, belanjakan \$7 untuk membeli satu dari setiap hidangan, lalu gunakan 9 batu untuk memilih hidangan di antara 6 batang.

b. $\binom{22}{6}$ kombinasi makanan. Di sini Anda memiliki 16 batu dan 6 batang (yang memisahkan 7 hidangan). c. $\binom{22}{6} - \left[\binom{7}{1}\binom{19}{6} - \binom{7}{2}\binom{16}{6} + \binom{7}{3}\binom{13}{6}\cdots\right]$ kombinasi makanan. Gunakan prinsip inklusi–eksklusi untuk mengurangkan semua kombinasi yang memuat 3 porsi atau lebih dari suatu hidangan.

3.8.5.2.

a. $\binom{22}{5} = 26334$ — terdapat 17 batu dan 5 batang.

b. $\binom{16}{5} = 4368$ — beli satu dari setiap hidangan dengan menggunakan \$6. Setelah itu tersisa \$11 untuk dibagikan di antara 6 hidangan, sehingga terdapat 11 batu dan 5 batang.

c. $\binom{22}{5} - \left[\binom{6}{1}\binom{17}{5} - \binom{6}{2}\binom{12}{5} + \cdots\right]$ pesanan. Gunakan prinsip inklusi–eksklusi untuk mengurangkan semua pesanan yang memuat 5 porsi atau lebih dari suatu hidangan.

3.8.5.3. $\binom{18}{4} - \left[\binom{5}{1}\binom{11}{4} - \binom{5}{2}\binom{4}{4}\right]$.

3.8.5.4. Cara termudah untuk menyelesaikan masalah ini adalah terlebih dahulu memberikan nilai minimum (1) kepada setiap variabel, lalu mencacah solusi untuk $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$ dengan $0 \le y_i \le 5$. Dengan mengambil $x_i = y_i + 1$, setiap solusi persamaan baru ini berkorespondensi dengan tepat satu solusi persamaan semula.

Sekarang, semua cara membagikan 15 satuan kepada empat variabel y_i dapat ditentukan dengan batang dan batu, tepatnya 15 batu dan 3 batang, sehingga terdapat $\binom{18}{15}$ cara. Namun, hitungan ini mencakup cara-cara ketika satu atau lebih variabel y_i diberi lebih dari 5 satuan. Karena itu, kurangkan dengan prinsip inklusi–eksklusi untuk memperoleh $\binom{18}{3} - \left(\binom{4}{1}\binom{12}{3} - \binom{4}{2}\binom{6}{3} + \ldots\right)$

Koefisien $\binom{4}{1}$ mencacah banyaknya cara memilih satu variabel yang diberi terlalu banyak satuan; koefisien $\binom{12}{3}$ mencacah banyaknya cara membagikan satuan yang tersisa kepada 4 variabel, dan seterusnya.

3.8.5.5.

a. $\binom{12}{7} = 792$. Karena setiap siswa dapat menerima paling banyak satu bintang, kita harus memilih 7 dari 12 siswa yang akan menerimanya.

b. Tanpa pembatasan tersebut, terdapat $\binom{18}{11}$ cara untuk membagikan bintang. Sekarang kita menggunakan prinsip inklusi–eksklusi (PIE) untuk meny-ingkirkan semua pembagian yang membuat sedikitnya satu siswa menerima lebih dari satu bintang:

$$\binom{18}{11} - \left[\binom{12}{1}\binom{16}{11} - \binom{12}{2}\binom{14}{11} + \binom{12}{3}\binom{12}{11} - \cdots\right] = 792.$$

3.8.5.6. Pertama, pilih satu dari 4 anggota untuk ditetapkan. Untuk setiap pilihan tersebut, susun 3 anggota yang tersisa tanpa titik tetap menggunakan rumus lanjutan prinsip inklusi–eksklusi. Diperoleh $\binom{4}{1}\left(3! - \left[\binom{3}{1}2! - \binom{3}{2}1! + \cdots + (-1)^{3+1}\binom{3}{3}0!\right]\right)$ permutasi.

3.8.5.7. Terdapat $\binom{12}{8}\left(4! - \left[\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \cdots + (-1)^{4+1}\binom{4}{4}0!\right]\right) = 4455$ cara. Kita memilih 8 dari 12 perempuan untuk menerima topinya sendiri, lalu mengalikannya dengan banyak cara untuk membagikan topi yang tersisa tanpa seorang pun menerima topinya sendiri.

3.8.5.8.

a.
$$8! - \left[\binom{8}{1}7! - \binom{8}{2}6! + \cdots + (-1)^{8+1}\binom{8}{8}0!\right] = 14833$$

b.
$$\binom{8}{4}\left(4! - \left[\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \cdots + (-1)^{4+1}\binom{4}{4}0!\right]\right) = 630$$

c. 0. Jika 7 hadiah sudah mendapatkan label aslinya, hanya tersisa satu hadiah dan satu label. Karena itu, hadiah ke-8 juga harus mendapatkan labelnya sendiri.

3.8.5.9. Ada $5 \cdot 6^7$ fungsi yang memenuhi $f(1) \neq c$ dan $5 \cdot 6^7$ fungsi lainnya yang memenuhi $f(2) \neq f$. Ada $5^2 \cdot 6^6$ fungsi yang memenuhi $f(1) \neq c$ sekaligus $f(2) \neq f$. Jadi, banyaknya fungsi yang memenuhi $f(1) \neq c$ atau $f(2) \neq f$ atau keduanya adalah

$$5 \cdot 6^7 + 5 \cdot 6^7 - 5^2 \cdot 6^6 = 1.63296 \times 10^6.$$

3.8.5.10. Terdapat $5^8 - \left[\binom{5}{1}4^8 - \binom{5}{2}3^8 + \binom{5}{3}2^8 + \cdots + (-1)^5\binom{5}{4}1^8\right]$ fungsi. Suku 5^8 menghitung semua fungsi dari A ke B. Kita mengurangi fungsi-fungsi yang tidak surjektif. Pilih satu anggota B yang tidak termasuk dalam daerah hasil (dengan $\binom{5}{1}$ cara), lalu hitung semua fungsi semacam itu (4^8). Namun, cara ini menghitung terlalu banyak fungsi yang mengecualikan dua anggota B dari daerah hasil, sehingga fungsi-fungsi tersebut harus dikurangi. Lanjutkan dengan cara yang sama menggunakan prinsip inklusi–eksklusi (PIE).

3.8.5.11. Ada 1854 fungsi. Pertanyaan ini sebenarnya meminta banyaknya permutasi tanpa titik tetap pada 7 anggota.

3.8.6 · Latihan Tambahan

3.8.6.2. Kesembilan permutasi tanpa titik tetap tersebut adalah 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, dan 4321.

3.9 · Ringkasan Bab

· Tinjauan Bab

3.9.1.

a. $\binom{14}{10}$ cara. Setelah memberikan satu hadiah kepada setiap anak, tersisa 10 hadiah (bintang) yang harus dibagi di antara 5 anak (menggunakan 4 sekat).

b. $\binom{19}{15} = 3876$ cara. Terdapat 15 bintang dan 4 sekat.

c. 5^{15}. Untuk setiap hadiah terdapat 5 pilihan penerima. Ini setara dengan membentuk fungsi dari himpunan hadiah ke himpunan anak.

d. $5^{15} - \left[\binom{5}{1}(5-1)^{15} - \binom{5}{2}(5-2)^{15} + \binom{5}{3}(5-3)^{15} \ldots\right]$ cara. Sekarang fungsi dari himpunan hadiah ke himpunan anak harus surjektif.

3.9.2.

(a) Bukan keduanya. Terdapat $\binom{14}{4}$ lintasan.

(b) $\binom{10}{4}$ pilihan dasi kupu-kupu.

(c) $P(10, 4)$, karena urutan penting.

(d) Bukan keduanya. Dengan mengasumsikan Anda hanya akan mengenakan keempat dasi itu pada 4 dari 7 hari, tanpa pengulangan: $\binom{10}{4}P(7, 4)$.

(e) $P(10, 4)$.

(f) $\binom{10}{4}$.

(g) Bukan keduanya. Karena huruf boleh diulang: 10^4. Jika pengulangan tidak diperbolehkan, jawabannya adalah $P(10, 4)$.

(h) Bukan keduanya. Sebenarnya, "k" adalah huruf ke-11 dalam alfabet, sehingga jawabannya adalah 0. Jika "k" termasuk di antara 10 huruf pertama, hanya akan ada 1 cara – yakni menuliskannya.

(i) Bukan keduanya. Jawabannya adalah $\binom{9}{3}$ (jika setiap anak memperoleh sebuah apel) atau $\binom{13}{3}$ (jika ada anak yang boleh tidak memperoleh apel).

(j) Bukan keduanya. Perhatikan bahwa jawabannya tidak mungkin $\binom{10}{4}$ karena 10 objek dan 4 objek tersebut berasal dari kelompok yang berbeda. Jawabannya adalah 4^{10}, dengan mengasumsikan setiap anak menyantap satu jenis sereal.

(k) $\binom{10}{4}$. Jangan terkecoh oleh kata "menyusun" dalam pertanyaan tersebut. Anda memilih 4 dari 10 *posisi* untuk menempatkan angka 1.

(l) $\binom{10}{4}$ (dengan mengasumsikan urutan tidak relevan).

(m) Bukan keduanya. Jawabannya adalah 16^{10} (setiap anak memilih ya atau tidak untuk masing-masing dari 4 jenis).

(n) Bukan keduanya. Jawabannya 0.

(o) Bukan keduanya. Jawabannya adalah $4^{10} - [\binom{4}{1}3^{10} - \binom{4}{2}2^{10} + \binom{4}{3}1^{10}]$.

(p) Bukan keduanya. Jawabannya adalah $10 \cdot 4$.

(q) Bukan keduanya. Jawabannya adalah 4^{10}.

(r) $\binom{10}{4}$ (yang sama dengan $\binom{10}{6}$).

(s) Bukan keduanya. Jika semua anak dianggap identik dan Anda tidak menginginkan tim kosong, jawabannya adalah $\binom{10}{4}$. Namun, persoalan ini sama dengan menentukan banyaknya fungsi surjektif dari himpunan berukuran 11 ke himpunan berukuran 5.

(t) $\binom{10}{4}$.

(u) $\binom{10}{4}$.

(v) Bukan keduanya. Jawabannya adalah 4!.

(w) Bukan keduanya. Jawabannya adalah $\binom{10}{4}$ jika tidak ada pilihan yang diulang. Jika pengulangan diperbolehkan, persoalannya menjadi $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 4$, yang memiliki $\binom{13}{9}$ solusi dalam bilangan bulat taknegatif.

(x) Bukan keduanya. Karena pengulangan jenis kue kering diperbolehkan, jawabannya adalah 10^4. Tanpa pengulangan, jawabannya adalah $P(10, 4)$.

(y) $\binom{10}{4}$ karena nilai ini sama dengan $\binom{9}{4} + \binom{9}{3}$.

(z) Bukan keduanya. Persoalan ini akan menjadi persoalan pencacahan yang rumit (mungkin menggunakan prinsip inklusi–eksklusi).

3.9.3.

a. $2^{14} = 16384$ pilihan. Untuk setiap dasi ada dua pilihan: dikenakan atau tidak.

b. Terdapat 511 pilihan dasi panjang (dari 2^9 pilihan dikurangi pilihan "tanpa dasi panjang") dan 31 pilihan dasi kupu-kupu (dari 2^5 pilihan dikurangi pilihan "tanpa dasi kupu-kupu"). Jadi, seluruhnya terdapat $511 \cdot 31 = 15841$ pilihan.

c. $\binom{9}{3}\binom{5}{2} = 840$ pilihan.

d. Pilih satu dari 2 dasi kupu-kupu untuk dikenakan paling luar. Setelah itu, terdapat 4 pilihan untuk dasi berikutnya, 4-1 pilihan untuk dasi sesudahnya, dan seterusnya. Jadi, terdapat $2 \cdot 4! = 48$ pilihan.

3.9.4. Anda memiliki 8 dasi kupu-kupu ungu, 3 dasi kupu-kupu merah, 3 dasi kupu-kupu biru, dan 5 dasi kupu-kupu hijau. Ada berapa cara memilih satu dasi kupu-kupu dari setiap warna untuk dibawa dalam perjalanan? Terdapat $8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ cara. Ada berapa pilihan jika Anda hendak mengenakan satu dasi kupu-kupu

besok? Terdapat $8 + 3 + 3 + 5$ pilihan.

3.9.5.

a. 8^{11} bilangan.

b. $8^{10} \cdot 4$ bilangan (pilih sembarang digit untuk 10 digit pertama, lalu pilih digit terakhir yang genap atau ganjil sesuai paritas jumlah digit pertama agar jumlah seluruh digit genap).

c. Kita memerlukan sedikitnya 6 digit genap. Untuk tepat 6 digit genap terdapat $\binom{11}{6}4^6 4^{11-6}$. Untuk 6+1 digit genap terdapat $\binom{11}{(6+1)}4^{6+1} * 4^{11-6-1}$, dan seterusnya. Dengan menjumlahkan semuanya, diperoleh banyak bilangan yang memiliki sedikitnya 6 digit genap.

3.9.6. Ada 48 penumpang. Kita mencari kardinalitas gabungan tiga himpunan yang tidak saling lepas. Dengan prinsip inklusi–eksklusi (PIE), diperoleh $27 + 20 + 29 - (13 + 11 + 10) + 6 = 48$.

3.9.7.

a. $2^1 0$ string.

b. $\binom{10}{5}$ string.

c. $\binom{10}{5}$ himpunan bagian.

3.9.8. $3^5 \cdot \binom{15}{10} + 5^{14} \cdot \binom{21}{7}$.

3.9.9. Jika pengulangan huruf diperbolehkan, kita memilih 3 dari 10 posisi yang akan ditempati huruf vokal, kemudian memilih satu dari 5 huruf vokal untuk setiap posisi tersebut, dan akhirnya memilih satu dari 21 huruf lainnya untuk masing-masing dari 7 posisi yang tersisa. Jadi, terdapat $\binom{10}{3}5^3 21^7$ kata.

Tanpa pengulangan, kita tetap memilih posisi huruf-huruf vokal, tetapi setiap kali sebuah huruf vokal ditempatkan, pilihan untuk huruf vokal berikutnya berkurang satu. Demikian pula, huruf konsonan tidak boleh berulang. Dengan demikian, terdapat $\binom{10}{3}P(5,3)P(21,7)$ kata.

3.9.10.

a. $\binom{3}{2}\binom{9}{4} = 378$ lintasan.

b. $\binom{12}{6} - \binom{10}{5}\binom{2}{1} = 420$ lintasan.

c. $\binom{3}{2}\binom{9}{4} + \binom{10}{5}\binom{2}{1} - \binom{3}{2}\binom{7}{3}\binom{2}{1} = 672$ lintasan.

3.9.11. Terdapat $\binom{31}{15}\left(\binom{31}{15} - 1\right)$ rute. Untuk setiap pilihan di antara $\binom{31}{15}$ rute menuju tempat kerja, banyaknya pilihan rute pulang yang berbeda tepat satu lebih sedikit.

3.9.12. Terdapat $2^8 + 2^9 - 2^6$ string (dengan menggunakan prinsip inklusi–eksklusi).

3.9.13. Terdapat $\binom{12}{3} + \binom{13}{4} - \binom{10}{2}$ string.

3.9.14.

a. Terdapat 3 posisi yang mungkin untuk mengawali subkata tersebut, lalu terdapat 2! cara untuk menyusun huruf-huruf lain pada 2 posisi yang tersisa. Jadi, banyaknya kata yang menghindari subkata "bad" sebagai tiga huruf berurutan adalah $5! - 3 \cdot 2! = 114$.

b. Jika sekarang kita harus menghindari kata yang menempatkan "b" sebelum "a" dan "a" sebelum "d", kita harus memilih posisi ketiga huruf tersebut (dalam urutan itu), lalu menyusun 2 huruf yang tersisa. Jadi, terdapat $5! - \binom{5}{3}2! = 100$ kata.

3.9.15. 2^n adalah banyaknya lintasan kisi yang panjangnya n, sebab pada setiap langkah Anda dapat bergerak ke atas atau ke kanan. Lintasan semacam itu akan berakhir pada garis $x + y = n$. Jadi, Anda akan berakhir di $(0, n)$, atau $(1, n-1)$, atau $(2, n-2)$, atau ... atau $(n, 0)$. Jika lintasan menuju setiap titik tersebut dicacah secara terpisah, diperoleh $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n}$ (setiap kali dengan memilih langkah mana di antara n langkah yang bergerak ke kanan). Kedua metode ini mencacah kuantitas yang sama, sehingga hasilnya sama.

3.9.16.

a. $\binom{15}{10} = 3003$ cara.

b. $\binom{21}{16} = 20349$ cara.

c. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor 16/8 \rfloor} (-1)^j \binom{6}{j}\binom{15 - j8}{5} = 2877$ cara.

3.9.17.

a. Terdapat $4^3 + 4^3 - 4^2 = 112$ fungsi.

b. Terdapat $3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3 \cdot 4^2 = 240$ fungsi.

c. Terdapat $4! - [3! + 3! - 2!] = 14$ fungsi. Perhatikan bahwa kita menggunakan faktorial, bukan perpangkatan, karena kita mencari fungsi injektif.

d. Karena domain dan kodomain merupakan himpunan berhingga dengan kardinalitas yang sama, surjektif ekuivalen dengan injektif. Jadi, kita dapat memulai dengan semua 4! fungsi injektif dan mengurangkan fungsi-fungsi yang memiliki satu atau lebih titik tetap. Kita memperoleh $\displaystyle\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}(4-j)! = 9$ fungsi.

3.9.18. $\displaystyle\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}(3-j)^5 = 150.$

3.9.19.

a. Terdapat $\binom{13}{8} = 1287$ kombinasi. Kita harus memilih 8 dari 13 jenis kue. Urutan tidak penting.

b. Terdapat $P(13, 8) = 13 \cdot (13 - 1) \cdot (13 - 2) \cdot \cdots \cdot (13 - 8 + 1) = 5.18918 \times 10^7$ cara. Kita memilih sekaligus mengurutkan 8 dari 13 jenis kue. Sekarang urutan penting.

c. Terdapat $\binom{35}{23} = 8.34452 \times 10^8$ pilihan. Kita menempatkan 12 batang untuk memisahkan 13 jenis saat menyusun 23 kue. Kue-kue tersebut merupakan batu, sedangkan batang menandai perpindahan antarjenis.

d. Terdapat 13^{23} pilihan. Ada 13 pilihan untuk kue berbentuk angka "1", 13 pilihan untuk kue berbentuk angka "2", dan seterusnya.

e. Terdapat $\sum_{j=0}^{13} (-1)^j \binom{13}{j} (13 - j)^{23} = 2.49879 \times 10^{24}$ pilihan. Kita harus menggunakan prinsip inklusi–eksklusi untuk mengecualikan semua cara yang tidak menggunakan satu atau lebih jenis kue.

3.9.20.

(a) Anda memberikan 4 jenis kue kering kepada dosen Anda yang dipilih dari 10 jenis kue kering berbeda. Persoalan ini tidak mudah ditafsirkan menggunakan fungsi. Kita *dapat* mengatakan bahwa domain memuat 4 jenis yang akan diberikan kepada dosen dan kodomain memuat 10 jenis yang dapat dipilih, tetapi pencacahan fungsi injektif akan menghasilkan terlalu banyak kemungkinan (tidak penting apakah Anda memilih jenis 3 terlebih dahulu dan jenis 2 kemudian, atau sebaliknya; yang penting adalah kedua jenis tersebut dipilih).

(b) Kita ingin meninjau fungsi injektif dari himpunan {terbanyak, terbanyak kedua, tersedikit kedua, tersedikit} ke himpunan 10 jenis kue kering. Kita menginginkan fungsi injektif karena kita tidak dapat memilih jenis kue kering yang sama untuk diberikan dalam jumlah terbanyak sekaligus tersedikit (misalnya).

(c) Persoalan ini tidak cocok ditafsirkan sebagai fungsi. Masalahnya, domain harus berupa 12 kue kering yang Anda panggang, tetapi elemen-elemen ini tidak dapat dibedakan (tidak ada kue kering pertama, kue kering kedua, dan seterusnya).

(d) Domainnya adalah 12 bentuk, sedangkan kodomainnya adalah 10 jenis kue kering. Karena kita dapat menggunakan jenis yang sama untuk bentuk yang berbeda, kita tertarik untuk mencacah semua fungsi di sini.

(e) Di sini kita mensyaratkan agar setiap jenis kue kering diberikan setidaknya satu kali, sehingga sekarang kita menanyakan banyaknya fungsi surjektif di antara fungsi-fungsi yang dicacah pada bagian sebelumnya.

4 · Barisan
4.1 · Mendeskripsikan Barisan
4.1.7 · Latihan Tambahan

4.1.7.1.

(a) Definisi rekursifnya adalah $a_n = a_{n-1} + 2$ dengan $a_1 = 1$. Rumus tertutupnya adalah $a_n = 2n - 1$.

(b) Barisan jumlah parsialnya adalah $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$. Definisi rekursifnya (seperti biasa) adalah $b_n = b_{n-1} + a_n$, yang dalam kasus ini menjadi $b_n = b_{n-1} + 2n - 1$. Tampaknya rumus tertutupnya adalah $b_n = n^2$

4.1.7.2.

(a) $0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, \ldots$.

(b) $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

4.1.7.3. Semua barisan mempunyai relasi rekurensi yang sama: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (sama seperti bilangan Fibonacci). Satu-satunya perbedaan terletak pada syarat awalnya.

4.1.7.4. $3, 10, 24, 52, 108, \ldots$. Definisi rekursif untuk $10, 24, 52, \ldots$ adalah $a_n = 2a_{n-1} + 4$ dengan $a_1 = 10$.

4.1.7.5. $-1, -1, 1, 5, 11, 19, \ldots$ Dengan demikian, barisan $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ mempunyai rumus tertutup $a_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 2$.

4.1.7.6. Dari rumus tertutup ini diperoleh $a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} + 7 \cdot 5^{n-1}$ dan $a_{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2} + 7 \cdot 5^{n-2}$. Kemudian kita memperoleh

$$\begin{aligned} 7a_{n-1} - 10a_{n-2} &= 7(3 \cdot 2^{n-1} + 7 \cdot 5^{n-1}) - 10(3 \cdot 2^{n-2} + 7 \cdot 5^{n-2}) \\ &= 21 \cdot 2^{n-1} + 49 \cdot 5^{n-1} - 30 \cdot 2^{n-2} - 70 \cdot 5^{n-2} \\ &= 21 \cdot 2^{n-1} + 49 \cdot 5^{n-1} - 15 \cdot 2^{n-1} - 14 \cdot 5^{n-1} \\ &= 6 \cdot 2^{n-1} + 35 \cdot 5^{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 5^n = a_n. \end{aligned}$$

Jadi, rumus tertutup tersebut sesuai dengan relasi rekurensi. Rumus tertutup itu mempunyai suku awal $a_0 = 10$ dan $a_1 = 41$.

4.1.7.10.

(a) $\sum_{k=1}^{n} 2k$.

(b) $\sum_{k=1}^{107} (1 + 4(k-1))$.

(c) $\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k}$.

(d) $\prod_{k=1}^{n} 2k$.

(e) $\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1}$.

4.1.7.11.

(a) $\sum_{k=1}^{100} (3 + 4k) = 7 + 11 + 15 + \cdots + 403$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$.

(c) $\sum_{k=2}^{50} \frac{1}{(k^2-1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{2499}$.

(d) $\prod_{k=2}^{100} \frac{k^2}{(k^2-1)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdots \frac{10000}{9999}$.

(e) $\prod_{k=0}^{n} (2 + 3k) = (2)(5)(8)(11)(14) \cdots (2 + 3n)$.

4.2 · Laju Pertumbuhan
4.2.6 · Soal Latihan

4.2.6.8. Untuk barisan aritmetika: $x = 83.6666666666667$, $y = 42.3333333333333$. Kita mengetahui bahwa $125 + d = x$, $x + d = y$, dan $y + d = 1$. Dengan kata lain, $125 + 3d = 1$, sehingga $d = -41.3333333333333$. Untuk barisan geometri: $x = 25$ dan $y = 5$. Kita dapat menentukan rasio tetap barisan geometri dengan menyelesaikan $125 \cdot r^3 = 1$ untuk r.

4.2.6.9. Untuk barisan aritmetika: $x = 13$, $y = 22$. Kita mengetahui bahwa $4 + d = x$, $x + d = y$, dan $y + d = 31$. Dengan kata lain, $4 + 3d = 31$, sehingga $d = (27)/3$.

Untuk barisan geometri: $x = 7.91578$ dan $y = 15.6649$. Kita dapat menentukan rasio tetap barisan geometri dengan menyelesaikan $4 \cdot r^3 = 31$ untuk r.

4.3 · Barisan Polinomial
4.3.6 · Soal Latihan

4.3.6.1.

(a) $a_n = a_{n-1} + 3$; $a_1 = 10$.

(b) $a_n = 7 + 3n$.

(c) Ya, $1555 = a_{516}$.

(d) Barisan tersebut memiliki 142 suku.

(e) Jumlahnya adalah 31453.

(f) $b_n = 3 + \frac{(10+7+3n)n}{2}$.

4.3.6.2.

a. 25, yaitu $20 + 5$.

b. Barisan tersebut adalah barisan aritmetika dengan $a_0 = 5$ dan beda tetap 5, sehingga $a_n = 5 + 5n$.

c. 25250. Kita ingin menghitung $5 + 10 + 15 + \cdots + 500$. Balik urutannya lalu jumlahkan untuk memperoleh 100 pasangan yang masing-masing berjumlah 505, sehingga totalnya 50500. Nilai ini dua kali jumlah yang dicari.

4.3.6.3.

a. 45.

b. $\frac{238 \cdot (44+1)}{2} = 5355$.

4.3.6.4.

a. $n - (-2) + 1$ suku, karena untuk memperoleh -18 dari rumus $12n + 6$ kita harus menggunakan $n = -2$.

b. $12n - 6$, yaitu 12 lebih kecil daripada $12n + 6$ (atau substitusikan $n - 1$ untuk n).

c. $\frac{(12n-12)*(n-(-2)+1)}{2}$. Balik urutan suku lalu jumlahkan. Setiap pasangan menghasilkan konstanta $12n - 12$, dan terdapat $n - (-2) + 1$ suku.

4.3.6.5. 273310. Jika kita menetapkan $a_0 = 2$,, suku-suku dalam jumlah tersebut membentuk barisan aritmetika dengan rumus tertutup $a_n = 2 + 6n$. Jadi, $1808 = a_{301}$, dan terdapat 302 suku dalam jumlah itu. Balik urutannya lalu jumlahkan untuk memperoleh 302 pasangan identik yang masing-masing berjumlah 1810. Hasil tersebut dua kali jumlah yang dicari. Maka $1810 \cdot 302/2 = 273310$.

4.3.6.6. $a_n = n^2 + 8n$. Kita mengetahui bahwa rumus yang dicari berbentuk kuadrat karena beda keduanya tetap. Jadi, $a_n = an^2 + bn + c$. Karena $a_0 = 0$,, diperoleh $c = 0$. Selanjutnya, selesaikan sistem

$$9 = a + b$$
$$20 = 4a + 2b$$

untuk memperoleh $a = 1$ dan $b = 8$.

4.3.6.7. $a_n = n^2 + 4n - 1$. Kita mengetahui bahwa rumus yang dicari berbentuk kuadrat karena beda keduanya tetap. Jadi, $a_n = an^2 + bn + c$. Karena $a_0 = -1$,

diperoleh $c = -1$. Selanjutnya, selesaikan sistem

$$4 = a + b + -1$$
$$11 = 4a + 2b + -1$$

untuk memperoleh $a = 1$ dan $b = 4$.

4.3.6.8. $a_n = 2n^3 - 2n + 5$. Kita mengetahui bahwa rumus yang dicari berbentuk kubik karena beda ketiganya tetap. Jadi, $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Karena $a_0 = 5$, diperoleh $d = 5$. Selanjutnya, selesaikan sistem

$$5 = a + b + c + 5$$
$$17 = 8a + 4b + 2c + 5$$
$$53 = 27a + 9b + 3c + 5$$

untuk memperoleh $a = 2$, $b = 0$, dan $c = -2$.

4.3.6.9. $a_n = 2n^3 + 8n^2 - 4n + 3$. Kita mengetahui bahwa rumus yang dicari berbentuk kubik karena beda ketiganya tetap. Jadi, $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Dengan menelusuri barisan ke belakang, diperoleh $a_0 = 3$, sehingga $d = 3$. Kemudian selesaikan sistem

$$9 = a + b + c + 3$$
$$43 = 8a + 4b + 2c + 3$$
$$117 = 27a + 9b + 3c + 3$$

untuk memperoleh $a = 2$, $b = 8$, dan $c = -4$.

4.3.6.10. $a_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + 2 = 2n^2 - n + 1$ Dengan demikian, $a_n - a_{n-1} = 4n + 1$. Perhatikan bahwa bentuk ini linear (aritmetika).

4.3.6.11. $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 2n$. Kita mengetahui bahwa polinom yang dicari berderajat tiga karena selisih ketiganya konstan. Jadi, $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Dengan bekerja mundur, kita memperoleh $a_0 = 0$, sehingga $d = 0$. Selanjutnya, selesaikan sistem

$$7 = a + b + c$$
$$32 = 8a + 4b + 2c$$
$$87 = 27a + 9b + 3c$$

untuk memperoleh $a = 2$, $b = 3$, dan $c = 2$.

4.3.7 · Latihan Tambahan

4.3.7.4. $a_n = n^2 - n + 1$.

4.3.7.5. $a_n = n^3 + n^2 - n + 1$

4.3.7.6. Kita memiliki $2 = 2$, $7 = 2+5$, $15 = 2+5+8$, $26 = 2+5+8+11$, dan seterusnya. Suku-suku dalam penjumlahan tersebut diberikan oleh barisan aritmetika $b_n = 2+3n$. Dengan kata lain, $a_n = \sum_{k=0}^{n}(2 + 3k)$. Untuk menemukan rumus tertutupnya, kita balikkan urutan dan jumlahkan. Kita memperoleh $a_n = \frac{(4+3n)(n+1)}{2}$ (faktor $n + 1$ muncul karena terdapat $n + 1$ suku dalam penjumlahan untuk a_n).

4.3.7.9. $a_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1) + c = an^2 - 2an + a + bn - b + c$. Oleh karena itu, $a_n - a_{n-1} = 2an - a + b$, yang berbentuk aritmetika. Perhatikan bahwa bentuk ini

tidak persis sama dengan turunan a_n, yaitu $2an + b$, tetapi keduanya hampir sama.

4.3.7.10. Tidak. Barisan selisihnya sama dengan barisan awal, sehingga tidak ada tingkat selisih yang akan menjadi konstan.

4.3.7.11. Tidak. Barisan tersebut merupakan barisan geometri dan memiliki rumus tertutup $2 \cdot 3^n$. Rumus ini merupakan fungsi eksponensial, yang tidak sama dengan polinomial berderajat berapa pun. Jika barisan selisih ke-n konstan, rumus tertutup barisan awal akan berupa polinomial berderajat n.

4.4 · Barisan Eksponensial
4.4.5 · Soal Latihan

4.4.5.1. $\frac{6 \cdot 5^{20} - 6}{4}$. Misalkan jumlah tersebut adalah S,, lalu hitung $5S - S = 4S$, sehingga semua suku kecuali 6 dan $6 \cdot 5^{20}$ saling meniadakan. Selanjutnya, selesaikan persamaan untuk S.

4.4.5.2. $\frac{1-(-1)^{38}\frac{7^{38}}{4^{38}}}{11/4}$. Hitung $S + \frac{7}{4}S$.

4.4.5.3. $a_n = -4 + 2^{n+1}$. Di sini kita perlu menggunakan metode teleskopik atau iterasi. Sebagai contoh, metode teleskopik menghasilkan

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 2^1 \\ a_2 - a_1 &= 2^2 \\ a_3 - a_2 &= 2^3 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= 2^n \end{aligned}$$

yang jika dijumlahkan menghasilkan $a_n - a_0 = 2^{n+1} - 2$ (dengan menggunakan teknik kalikan-geser-kurangkan untuk deret geometri di ruas kanan). Substitusikan $a_0 = -2$, lalu selesaikan persamaan untuk a_n guna menuntaskan penyelesaian.

4.4.5.4. Dengan teknik akar karakteristik, diperoleh $a_n = (-4)^n + 6^n$.

4.4.5.5. Akar karakteristik untuk kedua barisan adalah -1 dan 2 (karena kedua barisan memiliki relasi rekurensi yang sama, akar karakteristiknya juga sama). Dengan menentukan koefisien untuk masing-masing barisan, diperoleh rumus tertutupnya. Kita memperoleh $a_n = (-1)^n + 2^n$ dan $b_n = \left(\frac{4}{3}\right)(-1)^n + \left(\frac{23}{3}\right) \cdot 2^n$.

4.4.5.6. Dengan teknik akar karakteristik, diperoleh $a_n = 7 \cdot 2^n - 3(-1)^n$.

4.4.6 · Latihan Tambahan

4.4.6.1. 171 dan 341. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dengan $a_0 = 3$ dan $a_1 = 5$. Rumus tertutupnya adalah $a_n = \frac{8}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$. Untuk menemukannya, selesaikan persamaan karakteristik $x^2 - x - 2 = 0$ sehingga diperoleh akar karakteristik $x = 2$ dan $x = -1$. Kemudian, selesaikan sistem

$$3 = a + b$$

$$5 = 2a - b$$

4.4.6.3. Kita menyatakan bahwa $a_n = 4^n$ memenuhi relasi tersebut. Substitusikan rumus itu: $4^n = 3(4^{n-1}) + 4(4^{n-2})$. Persamaan ini benar; cukup sederhanakan ruas kanannya.

4.4.6.6.

(a) $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$.

(b) 4, 21, 104, 521, 2604, 13021

(c) $a_n = \frac{5}{6}5^n + \frac{1}{6}(-1)^n$.

4.4.6.8. Polinomial karakteristiknya adalah $x^2 - 2x + 1$, yang memiliki $x = 1$ sebagai satu-satunya akar; akar tersebut merupakan akar berulang. Jadi, dengan menggunakan teknik akar karakteristik untuk akar berulang, penyelesaian umumnya adalah $a_n = a + bn$, dengan a dan b bergantung pada syarat awal.

(a) $a_n = 1 + n$.

(b) Sebagai contoh, kita dapat memilih $a_0 = 21$ dan $a_1 = 22$.

(c) Untuk setiap x. Ambil $a_0 = x - 9$ dan $a_1 = x - 8$.

4.5 · Pembuktian dengan Induksi
4.5.6 · Soal Latihan

4.5.6.1.

A. *Benar.*

B. *Benar.*

C. *Salah.*

D. *Salah.*

E. *Salah.*

4.5.6.2.

A. *Benar.*

B. *Salah.*

C. *Salah.*

D. *Salah.*

E. *Salah.*

4.5.6.3.

A. *Benar.*

B. *Salah.*

Meskipun penjumlahan dimulai dengan 2, kita perlu memperhatikan nilai n terkecil yang dicakup oleh pernyataan $P(n)$.

C. *Salah.*

D. *Salah.*

E. *Salah.*

4.5.6.4.

A. *Benar.*

B. *Salah.*

Ini mengasumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk semua $k \geq 1$, tepat seperti hal yang hendak dibuktikan. Dalam langkah induksi, kita hanya boleh mengasumsikan $P(k)$ untuk suatu k sembarang, lalu membuktikan $P(k+1)$.

C. *Salah.*

D. *Salah.*

4.5.6.5.

- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$a_n = 5^n - 1$".
- Perhatikan bahwa $a_0 = 5^0 - 1 = 0$, sehingga $P(0)$ benar.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu bilangan bulat sembarang $k \geq 0$.
- Dengan demikian, $a_k = 5^k - 1$.
- Berdasarkan relasi rekurensi, kita memiliki $a_{k+1} = 5a_k + 4 = 5(5^k - 1) + 4$.
- Bentuk ini menyederhana menjadi $a_{k+1} = 5^{k+1} - 5 + 4 = 5^{k+1} - 1$, sehingga $P(k+1)$ benar.
- Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$.

4.5.6.6.

- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "$14^n - 1$ merupakan kelipatan 13."
- Perhatikan bahwa $14^1 - 1 = 13$, sehingga bilangan ini jelas merupakan kelipatan 13.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu bilangan bulat sembarang $k \geq 1$.
- Dengan demikian, $14^k - 1 = 13 \cdot j$ untuk suatu bilangan bulat j.

- Karena $14^{k+1} - 1 = 14(14^k - 1) + 14 - 1 = 14(13 \cdot j) + 13$, kita melihat bahwa $14^{k+1} - 1$ merupakan kelipatan 13.
- Jadi, $P(k+1)$ benar.
- Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.

4.5.6.7.

- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan "$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$."
- Untuk kasus dasar, perhatikan bahwa $P(1)$ dan $P(2)$ benar karena $1 = 2 - 1$ dan $1 + 1 = 3 - 1$.
- Sekarang asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu bilangan bulat sembarang $k \geq 2$.
- Artinya, asumsikan $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$.
- Dengan menambahkan F_{k+1} pada kedua ruas, kita memperoleh $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + F_k + F_{k+1} = F_{k+1} + F_{k+2} - 1$.
- Berdasarkan definisi bilangan Fibonacci, $F_{k+1} + F_{k+2} = F_{k+3}$, sehingga ruas kanan menyederhana menjadi $F_{k+3} - 1$.
- Jadi, $P(k+1)$ benar, dan oleh karena itu berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.

4.5.7 · Latihan Tambahan

4.5.7.1.

(a) Jika jumlah biji kita berakhiran 5 lalu jumlah itu digandakan, kita akan memperoleh jumlah biji yang berakhiran 0 (karena $5 \cdot 2 = 10$). Jika kemudian kita mengurangkan 5, kita kembali memperoleh jumlah biji yang berakhiran 5. Jadi, jika pada suatu hari jumlahnya berakhiran 5, pada hari berikutnya jumlahnya juga akan berakhiran 5.

(b) Jika Anda tidak *memulai* dengan jumlah biji yang berakhiran 5 (pada hari pertama), penalaran di atas tetap benar tetapi tidak membantu. Sebagai contoh, jika Anda mulai dengan jumlah yang berakhiran 3, pada hari berikutnya jumlahnya akan berakhiran 1.

(c) Bagian (b) adalah kasus dasar, dan bagian (a) adalah langkah induksi. Jika pada hari pertama jumlah kita berakhiran 5 (berdasarkan bagian (b)), maka pada hari kedua jumlahnya juga akan berakhiran 5 (berdasarkan bagian (a)). Kemudian, dengan kembali menggunakan bagian (a), jumlahnya akan berakhiran 5 pada hari ketiga. Dengan sekali lagi menggunakan bagian (a), jumlahnya juga akan berakhiran 5 pada hari keempat.

Pembuktian dengan induksi menyatakan bahwa pada *setiap* hari jumlahnya

akan berakhiran 5. Hal ini berlaku karena kita dapat memulai dari kasus dasar, lalu menggunakan langkah induksi berulang kali sampai mencapai n yang diinginkan.

4.5.7.2.

Bukti. Kita harus membuktikan bahwa $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Maka, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Pertama, kita membuktikan kasus dasar, $P(0)$, yang menyatakan bahwa $1 = 2^{0+1} - 1$. Karena $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$, kita melihat bahwa $P(0)$ benar. Sekarang untuk langkah induksi. Asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ sembarang. Artinya, $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Kita harus menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar (yakni bahwa $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$). Untuk melakukannya, kita mulai dari ruas kiri $P(k+1)$ dan bergerak menuju ruas kanan:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} && \text{berdasarkan hipotesis induksi.} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Jadi, $P(k+1)$ benar, sehingga berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

4.5.7.3.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "$7^n - 1$ merupakan kelipatan 6." Kita akan menunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Pertama, kita membuktikan kasus dasar, $P(0)$. Karena $7^0 - 1 = 0$, dan 0 merupakan kelipatan 6, $P(0)$ benar. Sekarang untuk langkah induksi. Asumsikan $P(k)$ berlaku untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ sembarang. Artinya, $7^k - 1$ merupakan kelipatan 6, atau dengan kata lain, $7^k - 1 = 6j$ untuk suatu bilangan bulat j. Sekarang perhatikan $7^{k+1} - 1$:

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 1 &= 7^{k+1} - 7 + 6 && \text{dengan trik: } -1 = -7 + 6 \\ &= 7(7^k - 1) + 6 && \text{keluarkan faktor 7 dari dua suku pertama} \\ &= 7(6j) + 6 && \text{berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= 6(7j + 1) && \text{keluarkan faktor 6} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $7^{k+1} - 1$ merupakan kelipatan 6, atau dengan kata lain, $P(k+1)$ benar. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

4.5.7.4.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$. Pertama, kasus dasar $P(1)$. Kita memiliki $1 = 1^2$, yang benar, sehingga $P(1)$ terbukti. Sekarang untuk langkah induksi. Asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk suatu $k \geq 1$ tetap yang sembarang. Artinya, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Sekarang kita akan membuktikan bahwa

$P(k+1)$ juga benar (yakni bahwa $1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2$). Kita mulai dari ruas kiri $P(k+1)$ dan bergerak menuju ruas kanan:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) &= k^2+(2k+1) && \text{berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= (k+1)^2 && \text{dengan memfaktorkan} \end{aligned}$$

Jadi, $P(k+1)$ berlaku, sehingga berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$. ■

4.5.7.5.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $F_0+F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$. Kita akan menunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$. Kasus dasarnya mudah karena $F_0=0$ dan $F_1=1$, sehingga $F_0=F_1-1$. Sekarang perhatikan langkah induksi. Asumsikan $P(k)$ benar; artinya, asumsikan $F_0+F_2+F_4+\cdots+F_{2k}=F_{2k+1}-1$. Untuk membuktikan $P(k+1)$, kita bergerak dari kiri ke kanan:

$$\begin{aligned} F_0+F_2+\cdots+F_{2k}+F_{2k+2} &= F_{2k+1}-1+F_{2k+2} && \text{berdasarkan hipotesis induksi.} \\ &= F_{2k+1}+F_{2k+2}-1 \\ &= F_{2k+3}-1 && \text{berdasarkan definisi rekursif.} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $F_0+F_2+F_4+\cdots+F_{2k+2}=F_{2k+3}-1$, yang berarti $P(k+1)$ berlaku. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 0$. ■

4.5.7.6.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $2^n < n!$. Kita akan menunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 4$. Pertama, kita memeriksa kasus dasar dan melihat bahwa $2^4 < 4!$ (karena $16 < 24$), sehingga $P(4)$ benar. Sekarang untuk langkah induksi. Asumsikan $P(k)$ benar untuk suatu $k \geq 4$ sembarang. Artinya, $2^k < k!$. Sekarang perhatikan $P(k+1)$: $2^{k+1} < (k+1)!$. Untuk membuktikannya, kita mulai dari ruas kiri dan bergerak menuju ruas kanan.

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &< 2 \cdot k! && \text{berdasarkan hipotesis induksi} \\ &< (k+1) \cdot k! && \text{karena } k+1 > 2 \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $2^{k+1} < (k+1)!$, sehingga kita telah membuktikan $P(k+1)$. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 4$. ■

4.5.7.12. Masalahnya adalah kita tidak pernah membuktikan kasus dasar. Tentu saja, ketika $n=0$, berlaku $0+3 \neq 0+7$.

4.5.7.13.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $n+3 < n+7$. Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Pertama, perhatikan bahwa kasus dasar berlaku: $0+3 < 0+7$. Sekarang, untuk langkah induksi, asumsikan

bahwa $P(k)$ benar. Artinya, $k + 3 < k + 7$. Kita harus menunjukkan bahwa $P(k + 1)$ benar. Karena $k + 3 < k + 7$, tambahkan 1 pada kedua ruas. Ini menghasilkan $k+3+1 < k+7+1$. Dengan mengelompokkan kembali, diperoleh $(k+1)+3 < (k+1)+7$. Namun, ini tepat merupakan $P(k+1)$. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

4.5.7.14. Masalahnya adalah meskipun $P(0)$ benar, dan meskipun $P(k) \to P(k + 1)$ berlaku untuk *beberapa* nilai k, terdapat setidaknya satu nilai k (yaitu $k = 99$) yang membuat implikasi tersebut gagal. Agar pembuktian dengan induksi sah, $P(k) \to P(k + 1)$ harus benar untuk semua nilai k yang lebih besar daripada atau sama dengan nilai pada kasus dasar.

4.5.7.16. Sekali lagi, kita gagal membuktikan kasus dasar: ketika $n = 0$, berlaku $n^2 + n = 0$, yang genap, bukan ganjil.

4.5.7.22. Gagasannya adalah bahwa jika kita mengambil logaritma dari a^n, kita dapat menaikkan n sebesar 1 dengan mengalikan satu faktor a lagi (di dalam logaritma). Akibatnya, satu $\log(a)$ lagi ditambahkan pada jumlah tersebut.

Bukti. Tetapkan sembarang bilangan real positif a. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $\log(a^n) = n \log(a)$. Kasus dasar, $P(2)$, benar karena $\log(a^2) = \log(a \cdot a) = \log(a) + \log(a) = 2\log(a)$, berdasarkan aturan hasil kali logaritma. Sekarang, untuk langkah induksi, asumsikan bahwa $P(k)$ benar. Artinya, $\log(a^k) = k \log(a)$. Perhatikan $\log(a^{k+1})$. Kita memperoleh

$$\log(a^{k+1}) = \log(a^k \cdot a) = \log(a^k) + \log(a) = k \log(a) + \log(a),$$

dengan kesamaan terakhir diperoleh dari hipotesis induksi. Bentuk ini menyederhana menjadi $(k + 1)\log(a)$, sehingga membuktikan $P(k + 1)$. Jadi, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 2$. ■

4.6 · Induksi Kuat
4.6.4 · Soal Latihan

4.6.4.1.

A. *Benar.*

B. *Benar.*

C. *Salah.*

D. *Salah.*

E. *Salah.*

4.6.4.2.

- Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa batang cokelat yang panjangnya n petak dapat diuraikan menjadi n bagian dengan melakukan $n - 1$ kali pematahan.

- $P(1)$ benar karena batang cokelat yang panjangnya 1 petak sudah berupa satu bagian.
- Asumsikan bahwa $P(j)$ benar untuk semua $j \leq k$, untuk suatu $k \geq 1$ sembarang.
- Perhatikan batang cokelat yang panjangnya $k + 1$ petak.
- Di mana pun Anda mematahkan batang ini, hasilnya adalah dua batang yang lebih kecil, misalnya masing-masing dengan panjang a dan b.
- Karena a dan b tidak lebih besar daripada k, berdasarkan hipotesis induksi kedua batang yang lebih kecil ini dapat diuraikan menjadi petak-petak tunggal dengan masing-masing $a - 1$ dan $b - 1$ kali pematahan.
- Jadi, jumlah seluruh pematahan adalah $a - 1 + b - 1 + 1 = a + b - 1$, yaitu $k + 1 - 1 = k$.
- Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi kuat, $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.

4.6.5 · Latihan Tambahan

4.6.5.3. Pembuktian akan dilakukan dengan induksi kuat.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "n merupakan pangkat dari 2 atau dapat ditulis sebagai jumlah beberapa pangkat dari 2 yang saling berbeda." Kita akan menunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$.

Kasus dasar: $1 = 2^0$ merupakan pangkat dari 2, sehingga $P(1)$ benar.

Langkah induksi: Misalkan $P(k)$ benar untuk semua $k < n$. Jika n merupakan pangkat dari 2, kita selesai. Jika tidak, misalkan 2^x adalah pangkat terbesar dari 2 yang benar-benar lebih kecil daripada n. Perhatikan $n - 2^x$, yang merupakan bilangan lebih kecil, bahkan lebih kecil daripada n maupun 2^x. Jadi, $n - 2^x$ merupakan pangkat dari 2 atau dapat ditulis sebagai jumlah beberapa pangkat dari 2 yang saling berbeda, tetapi tidak satu pun dari pangkat-pangkat itu merupakan 2^x. Dengan demikian, setelah menyertakan 2^x, kita telah menulis n sebagai jumlah beberapa pangkat dari 2 yang saling berbeda.

Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika (kuat), $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 1$. ■

4.7 · Ringkasan Bab

· Tinjauan Bab

4.7.1. Barisan tersebut memuat 206+1 suku, sehingga jumlahnya adalah $\frac{1250 \cdot (206+1)}{2} = 129375$.

4.7.2.

a. Ada $n - 3 + 1$ suku.

b. $10n + (-12)$.

c. $\dfrac{(10n + 26) * (n - 3 + 1)}{2}$.

4.7.3.

a. $6, 30, 150, 750, \ldots$ Barisan tersebut merupakan barisan geometri.

b. $\dfrac{6 \cdot 5^{22} - 6}{4} = 3.57628 \times 10^{15}$.

4.7.5. $a_n = n^2 + 8n + 2$. Kita mengetahui bahwa polinom yang dicari berderajat dua karena selisih keduanya konstan. Jadi, $a_n = an^2 + bn + c$. Dengan bekerja mundur, kita memperoleh $a_0 = 2$, sehingga $c = 2$. Selanjutnya, selesaikan sistem

$$\begin{aligned} 11 &= a + b + 2 \\ 22 &= 4a + 2b + 2 \end{aligned}$$

untuk memperoleh $a = 1$ dan $b = 8$.

4.7.6.

(a) Barisan jumlah parsial merupakan polinom berderajat 4 (barisan bedanya adalah barisan semula).

(b) Barisan beda kedua merupakan polinom berderajat 1 (sebuah barisan aritmetika).

4.7.7.

(a) $4, 6, 10, 16, 26, 42, \ldots$.

(b) Tidak. Mengambil beda menghasilkan kembali barisan semula, sehingga bedanya tidak akan pernah tetap.

4.7.8. $b_n = (n + 3)n$.

4.7.10. Barisannya adalah $4, 9, 89, 269, 2049, \ldots$. Dengan teknik akar karakteristik, diperoleh rumus tertutup $a_n = \left(\frac{11}{9}\right)(-4)^n + \left(\frac{25}{9}\right) \cdot 5^n$.

4.7.11. Barisan tersebut adalah $5, 7, 111, 459, 3375, \ldots$. Dengan teknik akar karakteristik, diperoleh rumus tertutup $a_n = \left(\frac{23}{9}\right)(-3)^n + \left(\frac{22}{9}\right) \cdot 6^n$.

4.7.12.

(a) Pada hari pertama, 2 kelinci mini Anda menjadi 2 kelinci besar. Pada hari ke-2, 2 kelinci besar tersebut menghasilkan 4 kelinci mini. Pada hari ke-3, Anda memiliki 4 kelinci mini (yang dihasilkan oleh 2 kelinci besar Anda) ditambah 6 kelinci besar (2 kelinci semula ditambah 4 kelinci yang baru tumbuh dewasa). Pada hari ke-4, Anda memiliki 12 kelinci mini (masing-masing 2 dari keenam kelinci besar) ditambah 10 kelinci besar (6 kelinci sebelumnya ditambah 4 kelinci yang baru tumbuh dewasa). Barisan jumlah seluruh kelinci adalah $2, 2, 6, 10, 22, 42 \ldots$, dimulai dengan $a_0 = 2$ dan $a_1 = 2$.

(b) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Hal ini berlaku karena jumlah kelinci sama dengan jumlah

kelinci yang Anda miliki pada hari sebelumnya (baik mini maupun besar) ditambah 2 kali jumlah kelinci yang Anda miliki dua hari sebelumnya (karena semua kelinci yang Anda miliki 2 hari lalu kini sudah besar dan masing-masing menghasilkan 2 kelinci baru).

(c) Dengan menggunakan teknik akar karakteristik, kita memperoleh $a_n = a \cdot 2^n + b(-1)^n$, lalu menentukan a dan b sehingga diperoleh $a_n = \frac{4}{3}2^n + \frac{2}{3}(-1)^n$.

4.7.17. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan, "Setiap himpunan yang memuat n anggota memiliki 2^n himpunan bagian yang berbeda." Kita akan menunjukkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \geq 1$. Kasus dasar: Setiap himpunan dengan 1 anggota, misalnya $\{a\}$, memiliki tepat 2 himpunan bagian: himpunan kosong dan himpunan itu sendiri. Jadi, banyaknya himpunan bagian adalah $2 = 2^1$. Dengan demikian, $P(1)$ benar. Kasus induksi: Misalkan $P(k)$ benar untuk suatu $k \geq 1$ sembarang. Jadi, setiap himpunan yang memuat tepat k anggota memiliki 2^k himpunan bagian yang berbeda. Sekarang perhatikan suatu himpunan yang memuat $k+1$ anggota: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Setiap himpunan bagian dari A harus memuat a_{k+1} atau tidak memuatnya. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian dari A adalah suatu himpunan bagian dari $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, dengan atau tanpa a_{k+1}. Jadi, terdapat 2^k himpunan bagian dari A yang memuat a_{k+1} dan 2^k himpunan bagian lain dari A yang tidak memuat a_{k+1}. Jumlah keseluruhannya adalah $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ himpunan bagian dari A. Karena pilihan A sembarang, argumen ini berlaku bagi setiap himpunan yang memuat $k+1$ anggota, sehingga $P(k+1)$ benar. Oleh karena itu, berdasarkan prinsip induksi matematika, $P(n)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

5 · Meninjau Kembali Struktur Diskret

5.1 · Himpunan

5.1.5 · Latihan

5.1.5.1.

a. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Himpunan ini memuat semua anggota yang berada di A atau B atau keduanya.

b. $A \cap B = \{2, 4, 5, 6\}$. Himpunan ini memuat semua anggota yang berada di A sekaligus B.

c. $A \setminus B = \{7\}$. Himpunan ini memuat semua anggota A kecuali anggota yang juga berada di B. Himpunan tersebut juga dapat ditulis sebagai $A \cap \overline{B}$.

d. $B \setminus A = \{8\}$. Himpunan ini memuat semua anggota B kecuali anggota yang juga berada di A. Bentuk lain penulisannya adalah $B \cap \overline{A}$. Perhatikan bahwa $A \setminus B \neq B \setminus A$.

5.1.5.2.

a. Himpunan ini adalah $\{3, 4, 5, \ldots\}$ karena setiap elemennya harus berupa bilangan asli yang kuadratnya sekurang-kurangnya 3 lebih besar daripada 4. Karena $3^2 - 3 = 6$, sedangkan $2^2 - 3 = 1$, bilangan asli pertama yang memenuhi

syarat tersebut adalah 3.

b. Kita memperoleh himpunan yang sama seperti pada bagian sebelumnya, dan bilangan taknegatif terkecil yang membuat $n^2 - 7$ menjadi bilangan asli adalah 3.

   Perhatikan bahwa jika kita tidak menetapkan $n \geq 0$ melalui syarat $n \in \mathbb{N}$, maka setiap bilangan bulat yang lebih kecil daripada -3 juga akan berada dalam himpunan tersebut, sehingga tidak akan ada elemen terkecil.

c. Himpunan ini adalah $\{4, 5, 8, 13, \ldots\}$, yaitu himpunan bilangan yang menjadi *hasil* dari menguadratkan suatu bilangan asli lalu menambahkan 4. ($0^2 + 4 = 4$, $1^2 + 4 = 5$, $2^2 + 4 = 8$, dan seterusnya.) Jadi, elemen terkecil himpunan tersebut adalah 4.

d. Sekarang kita mencari bilangan asli yang diperoleh dengan mengambil suatu bilangan asli, menguadratkannya, lalu menambahkan 4. Himpunannya adalah $\{4, 5, 8, 13, \ldots\}$, sama seperti pada bagian sebelumnya. Jadi, sekali lagi, elemen terkecilnya adalah 4.

5.1.5.4. Himpunan berukuran terbesar yang merupakan himpunan bagian dari A dan B adalah *irisan* A dan B, yaitu $A \cap B = \{8\}$.

5.1.5.7. Terdapat tepat 4 himpunan semacam itu: $\{1, 4, 14\}$, $\{1, 4, 12, 14\}$, $\{1, 4, 7, 14\}$, dan $\{1, 4, 7, 12, 14\}$.

5.1.5.8.

a. $A \cap B = \{4, 5, 6\}$.

b. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

c. $A \setminus B = \{2, 3\}$.

d. $A \cap \overline{(B \cup C)} = \{2\}$.

5.1.5.11. Sebagai contoh, $A = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ dan $B = \{3, 5\}$.

5.1.5.12. Sebagai contoh, $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \{1, 2, 3\}\}$

5.1.5.13.

(a) Tidak.

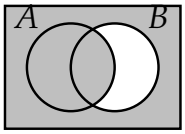
(b) Tidak.

(c) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat yang merupakan kelipatan 2 sekaligus 3 (jadi, kelipatan 6). Oleh karena itu, $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z}(x = 6y)\}$.

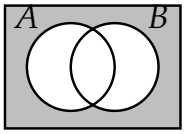
(d) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

5.1.5.15.

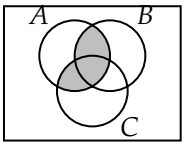
(a) $A \cup \overline{B}$:



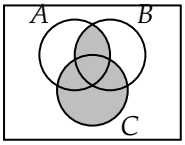
(b) $\overline{(A \cup B)}$:



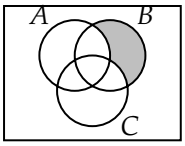
(c) $A \cap (B \cup C)$:



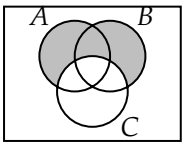
(d) $(A \cap B) \cup C$:



(e) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$:



(f) $(A \cup B) \setminus C$:



5.1.5.17.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}.$$

5.1.5.18. Masing-masing dari 9 anggota dapat membentuk sebuah himpunan tunggal, sehingga terdapat 9 himpunan bagian semacam itu.

Untuk menghitung himpunan bagian beranggota dua, perhatikan bahwa terdapat 8 himpunan yang memuat 1, kemudian 7 himpunan yang memuat 2 tetapi tidak memuat 1, kemudian 6 himpunan yang memuat 3 tetapi tidak memuat 1 atau 2, dan seterusnya. Jadi, 36 dapat diperoleh dengan menjumlahkan bilangan dari 1 sampai 8.

5.1.5.20. Sebagai contoh, $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{5,6,7,8,9\}$ menghasilkan $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

5.1.5.28. Di sini kita perlu sedikit berhati-hati. Jika B memuat 3 elemen, maka A hanya memuat bilangan 3 (yang dituliskan dua kali). Dengan demikian, $|A| = 1$, sehingga $B = \{1,3\}$, yang hanya memiliki 2 elemen. Jadi, $|B| \neq 3$. Ini berarti bahwa $|A| = 2$, sehingga B setidaknya memuat elemen 1 dan 2. Karena $|B| \neq 3$, harus berlaku $|B| = 2$, yang sesuai dengan definisi B.

Oleh karena itu, harus berlaku $A = \{2,3\}$ dan $B = \{1,2\}$.

5.2 · Fungsi
5.2.4 · Latihan
5.2.4.1.

a. $f(4) = 2$, karena 2 adalah bilangan yang terletak di bawah 4 dalam notasi dua baris.

b. Salah satu n yang memenuhi adalah $n = 3$, karena $f(3) = 4$. Perhatikan bahwa 3 terletak di atas 4 dalam notasi tersebut.

c. $n = 1$ memenuhi sifat tersebut. Kita menyebut 1 sebagai titik tetap dari f. Tidak semua fungsi memiliki titik semacam itu.

d. Anggota tersebut adalah 3 (bahkan, inilah satu-satunya anggota kodomain yang tidak berada dalam daerah hasil). Dengan kata lain, 3 bukan citra dari anggota mana pun di bawah f; tidak ada anggota yang dipetakan ke 3.

5.2.4.5. Terdapat 16 fungsi berbeda. Tidak satu pun fungsi tersebut injektif. Tepat 14 fungsi bersifat surjektif (ada 2 yang tidak surjektif, yaitu fungsi yang memetakan semua anggota ke a atau semuanya ke b). Tidak ada fungsi yang bijektif karena tidak ada fungsi injektif dalam soal ini.

5.2.4.6. Terdapat 16 fungsi: tersedia empat pilihan keluaran bagi $f(1)$, dan untuk setiap pilihan tersebut tersedia empat pilihan keluaran bagi $f(2)$. Dari fungsi-fungsi ini, 12 bersifat injektif, 0 bersifat surjektif, dan 0 memiliki kedua sifat tersebut (yaitu, bijektif):

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & b \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & c \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & d \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & c \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & d \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & d \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & b \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & c \end{pmatrix}$$

5.2.4.7.

(a) f tidak injektif karena $f(2) = f(5)$; dua masukan yang berbeda memiliki keluaran yang sama.

(b) f surjektif karena setiap elemen kodomain termasuk dalam daerah hasil.

(c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.2.4.12.

(a) f injektif, tetapi tidak surjektif (misalnya, 0 tidak pernah menjadi keluaran).

(b) f injektif dan surjektif. Berbeda dengan pertanyaan sebelumnya, setiap bilangan bulat merupakan keluaran (dari bilangan bulat yang nilainya 4 lebih kecil).

(c) f injektif, tetapi tidak surjektif (misalnya, 10 bukan 8 kurang dari suatu

kelipatan 5).

(d) f tidak injektif, tetapi surjektif. Setiap bilangan bulat merupakan keluaran (misalnya, dari dua kali bilangan itu sendiri), tetapi beberapa bilangan bulat merupakan keluaran dari lebih dari satu masukan: $f(5) = 3 = f(6)$.

5.2.4.13.

(a) f tidak injektif. Untuk membuktikannya, kita cukup mencari dua elemen berbeda dalam domain yang dipetakan ke elemen kodomain yang sama. Karena $f(\{1\}) = 1$ dan $f(\{2\}) = 1$, kita melihat bahwa f tidak injektif.

(b) f tidak surjektif. Himpunan bagian terbesar dari A adalah A itu sendiri, dan $|A| = 10$. Jadi, tidak ada bilangan asli yang lebih besar dari 10 yang dapat menjadi keluaran.

(c) $f^{-1}(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{10\}\}$ (himpunan semua himpunan bagian beranggota tunggal dari A).

(d) $f^{-1}(0) = \{\emptyset\}$. Perhatikan bahwa menulis $f^{-1}(0) = \emptyset$ merupakan kekeliruan; bentuk itu akan menyatakan bahwa tidak ada masukan yang memiliki 0 sebagai keluaran.

(e) $f^{-1}(12) = \emptyset$ karena tidak ada himpunan bagian dari A yang berkardinalitas 12.

5.2.4.16.

(a) $|f^{-1}(3)| \leq 1$. Dengan kata lain, $f^{-1}(3)$ merupakan himpunan kosong atau himpunan yang memuat tepat satu elemen. Fungsi injektif tidak mungkin memiliki dua elemen domain yang keduanya dipetakan ke 3.

(b) $|f^{-1}(3)| \geq 1$. Dengan kata lain, $f^{-1}(3)$ merupakan himpunan yang memuat paling sedikit satu elemen, mungkin lebih. Pada fungsi surjektif, harus ada sesuatu yang dipetakan ke 3.

(c) $|f^{-1}(3)| = 1$. Terdapat tepat satu elemen X yang dipetakan ke 3, sehingga $f^{-1}(3)$ merupakan himpunan yang memuat satu elemen tersebut.

5.2.4.17. X sebenarnya dapat berupa sembarang himpunan, asalkan $f(x) = 0$ atau $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in X$. Sebagai contoh, $X = \mathbb{N}$ dan $f(n) = 0$ memenuhi syarat.

5.2.4.21.

(a) f injektif.

Bukti. Misalkan x dan y merupakan elemen domain $\mathbb{Z}$. Asumsikan $f(x) = f(y)$. Jika x dan y keduanya genap, maka $f(x) = x + 1$ dan $f(y) = y + 1$. Karena $f(x) = f(y)$, kita memperoleh $x + 1 = y + 1$, yang mengakibatkan $x = y$. Demikian pula, jika x dan y keduanya ganjil, maka $x - 3 = y - 3$, sehingga sekali lagi $x = y$. Satu-satunya kemungkinan lain adalah x genap dan y ganjil (atau sebaliknya). Namun, dalam hal itu $x + 1$ akan ganjil, sedangkan $y - 3$ akan genap, sehingga tidak mungkin $f(x) = f(y)$. Oleh karena itu, jika

$f(x) = f(y)$, kita memperoleh $x = y$, yang membuktikan bahwa f injektif. ■

(b) f surjektif.

Bukti. Misalkan y adalah elemen kodomain $\mathbb{Z}$. Kita akan menunjukkan bahwa terdapat elemen n dalam domain ($\mathbb{Z}$) sedemikian sehingga $f(n) = y$. Ada dua kasus. Pertama, jika y genap, misalkan $n = y + 3$. Karena y genap, n ganjil, sehingga $f(n) = n - 3 = y + 3 - 3 = y$ seperti yang diinginkan. Kedua, jika y ganjil, misalkan $n = y - 1$. Karena y ganjil, n genap, sehingga $f(n) = n + 1 = y - 1 + 1 = y$ seperti yang diperlukan. Oleh karena itu, f surjektif. ■

5.2.4.22. Ya, hal ini merupakan fungsi jika domain dan kodomain dipilih dengan tepat. Domainnya adalah himpunan mahasiswa, sedangkan kodomainnya adalah himpunan nilai yang mungkin. Fungsi tersebut hampir pasti tidak injektif karena kemungkinan ada dua mahasiswa yang memperoleh nilai yang sama. Fungsi tersebut mungkin surjektif – sifat ini terpenuhi jika untuk setiap nilai terdapat sedikitnya satu mahasiswa yang memperolehnya.

5.2.4.24. Pembagian ini bukan fungsi.

5.2.4.25. Definisi rekursifnya adalah $f(0) = 0;\ f(n+1) = f(n) + n$.

5.2.4.26. Secara umum, $|A| \geq \left|f(A)\right|$ karena banyaknya keluaran tidak mungkin melebihi banyaknya masukan (setiap masukan menuju tepat satu keluaran), tetapi banyaknya keluaran dapat lebih sedikit jika fungsi tersebut tidak injektif. Jika fungsi tersebut injektif, maka $|A| = \left|f(A)\right|$, meskipun kesamaan dapat terjadi bahkan jika f tidak injektif (fungsi tersebut harus injektif ketika *dibatasi* pada A). Surjektivitas f saja tidak memberikan hubungan tambahan untuk A sembarang. Jika f bijektif, maka $|A| = \left|f(A)\right|$.

5.2.4.27. Secara umum, tidak ada hubungan antara $|B|$ dan $\left|f^{-1}(B)\right|$. Hal ini karena B mungkin memuat elemen yang tidak termasuk dalam daerah hasil f, sehingga bahkan mungkin $f^{-1}(B) = \emptyset$. Di sisi lain, mungkin terdapat banyak elemen domain yang semuanya dipetakan ke sedikit elemen dalam B, sehingga $f^{-1}(B)$ lebih besar daripada B.

Lebih khusus lagi, jika f injektif, maka $|B| \geq \left|f^{-1}(B)\right|$ (karena setiap elemen dalam B berasal dari paling banyak satu elemen domain). Jika f surjektif, maka $|B| \leq \left|f^{-1}(B)\right|$ (karena setiap elemen dalam B harus berasal dari paling sedikit satu elemen domain). Jadi, jika f bijektif, maka $|B| = \left|f^{-1}(B)\right|$.

6 · Topik Tambahan
6.1 · Fungsi Pembangkit
6.1.5 · Latihan
6.1.5.1.

(a) $\dfrac{4}{1-x}$.

(b) $\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

(c) $\dfrac{2x^3}{(1-x)^2}$.

(d) $\dfrac{1}{1-5x}$.

(e) $\dfrac{1}{1+3x}$.

(f) $\dfrac{1}{1-5x^2}$.

(g) $\dfrac{x}{(1-x^3)^2}$.

6.1.5.2.

(a) $0, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots$.

(b) $1, 4, 16, 64, 256, \ldots$.

(c) $0, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

(d) $0, 3, -6, 9, -12, 15, -18, \ldots$.

(e) $1, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$.

6.1.5.4. Nyatakan fungsi pembangkitnya dengan A. Hitung $A - xA = 4 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$. Dengan demikian, $A - xA = 4 + \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Menyelesaikan persamaan untuk memperoleh A memberikan $\dfrac{4}{1-x} + \dfrac{x}{(1-x)^3}$.

6.1.5.5. $\dfrac{1+2x}{1-3x+x^2}$.

6.1.5.6. Hitung $A - xA - x^2A$, lalu selesaikan persamaan untuk memperoleh A. Fungsi pembangkitnya adalah $\dfrac{x}{1-x-x^2}$.

6.1.5.7. $\dfrac{x}{(1-x)(1-x-x^2)}$.

6.1.5.8. $\dfrac{2}{1-5x} + \dfrac{7}{1+3x}$.

6.1.5.9. $a_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 3 \cdot 4^{n-1} + 1 & n \geq 1. \end{cases}$

6.1.5.12.

(a) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.

(b) $\frac{1}{(1+x)^2}$.

(c) $\frac{3x}{(1-x)^2}$.

(d) $\frac{3x}{(1-x)^3}$. (jumlah parsial).

6.1.5.13.

(a) $0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.

(b) $1, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 5, 0, 8, 0, \ldots$.

(c) $1, 3, 18, 81, 405, \ldots$.

(d) $1, 2, 4, 7, 12, 20, \ldots$.

6.1.5.15. $\frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$.

6.2 · Pengantar Teori Bilangan

6.2.6 · Latihan

6.2.6.1.

Bukti. Misalkan $a \mid b$. Maka b merupakan kelipatan a, atau dengan kata lain, $b = ak$ untuk suatu bilangan bulat k. Namun, dengan demikian $bc = akc$, dan karena kc adalah bilangan bulat, ini menyatakan bahwa bc merupakan kelipatan a. Dengan kata lain, $a \mid bc$. ■

6.2.6.3. $\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$, $\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$, $\{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$, dan $\{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$.

6.2.6.5.

Bukti. Asumsikan $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$. Ini berarti $a = b + kn$ dan $c = d + jn$ untuk suatu bilangan bulat k dan j. Perhatikan $a - c$. Kita peroleh:

$$a - c = b + kn - (d + jn) = b - d + (k - j)n.$$

Dengan kata lain, $a - c$ sama dengan $b - d$ ditambah suatu kelipatan n, sehingga $a - c \equiv b - d \pmod{n}$. ■

6.2.6.6.

(a) $3^{456} \equiv 1^{456} = 1 \pmod{2}$.

(b) $3^{456} = 9^{228} \equiv (-1)^{228} = 1 \pmod{5}$.

(c) $3^{456} = 9^{228} \equiv 2^{228} = 8^{76} \equiv 1^{76} = 1 \pmod{7}$.

(d) $3^{456} = 9^{228} \equiv 0^{228} = 0 \pmod{9}$.

6.2.6.8. Untuk setiap kongruensi ini, cukup substitusikan semua bilangan bulat mulai dari 0 hingga satu kurang dari modulusnya untuk melihat mana, jika ada, yang memenuhi.

(a) Tidak ada solusi.

(b) $x = 2, x = 5, x = 8$.

(c) Tidak ada solusi.

6.2.6.10. $x = 5 + 22k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$.

6.2.6.12. $x = 6 + 15k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$.

6.2.6.14. Kita harus menyelesaikan $7x + 5 \equiv 2 \pmod{11}$. Ini menghasilkan $x \equiv 9 \pmod{11}$. Secara umum, $x = 9 + 11k$, tetapi jika sembarang x seperti itu dibagi 11, sisanya akan selalu 9.

6.2.6.15. Bagi seluruh persamaan dengan 2: $3x + 5y = 16$. Ubah menjadi kongruensi modulo 3: $5y \equiv 16 \pmod{3}$, yang tereduksi menjadi $2y \equiv 1 \pmod{3}$. Jadi, $y \equiv 2 \pmod{3}$ atau $y = 2 + 3k$. Substitusikan kembali ke $3x + 5y = 16$, lalu selesaikan untuk x, sehingga diperoleh $x = 2 - 5k$. Jadi, solusi umumnya adalah $x = 2 - 5k$ dan $y = 2 + 3k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$.

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Deskripsi	Halaman
$\therefore$	"oleh karena itu"	16
$P, Q, R, S, \ldots$	variabel proposisional (kalimat)	20
$\wedge$	"dan" logis (konjungsi)	20
$\vee$	"atau" logis (disjungsi)	20
$\neg$	negasi logis	20
K_n	graf lengkap dengan n simpul	124
$K_{m,n}$	graf bipartit lengkap dengan m dan n simpul	126
C_n	siklus pada n simpul	126
P_n	lintasan pada $n+1$ simpul	126
$\chi(G)$	bilangan kromatik G	173
$\Delta(G)$	derajat maksimum dalam G	178
$\chi'(G)$	indeks kromatik G	179
$N(S)$	himpunan tetangga dari S	206
$\mathbf{B}_k^n$	himpunan string bit dengan panjang n dan bobot k.	224
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$	351
T_n	bilangan segitiga ke-n	356
F_n	bilangan Fibonacci ke-n	363
Δ^k	selisih ke-k suatu barisan	384
$\emptyset$	himpunan kosong	440
$\mathbb{N}$	himpunan bilangan asli	440
$\mathbb{Z}$	himpunan bilangan bulat	440
$\mathbb{Q}$	himpunan bilangan rasional	440
$\mathbb{R}$	himpunan bilangan real	440
$\mathcal{P}(A)$	himpunan kuasa dari A	440
$\{,\}$	kurung kurawal, untuk mengapit elemen himpunan.	441
:	"sedemikian sehingga"	441
$\in$	"merupakan elemen dari"	441
$\subseteq$	"merupakan himpunan bagian dari"	441
$\subset$	"merupakan himpunan bagian sejati dari"	441
$\cap$	irisan himpunan	441
$\cup$	gabungan himpunan	441
$\times$	hasil kali Kartesius	441

(Dilanjutkan di halaman berikutnya)

Simbol	Deskripsi	Halaman
$\setminus$	selisih himpunan	441
$\overline{A}$	komplemen A	441
$\|A\|$	kardinalitas (ukuran) A	441
$A \times B$	hasil kali Kartesius A dan B	447
$f(A)$	citra A oleh f	462
$f^{-1}(B)$	citra invers B oleh f	462

Indeks

ada, 24
akar (pada pohon), 142
akar karakteristik, 399, 400, 402
algoritma Euklides, 498
algoritma Kruskal, 142
algoritma pembagian, 488
algoritma Prim, 142
anak (pada pohon berakar), 142
anteseden, *Lihat* premis
antisimetris, 10
argumen, 15
aritmetika modular, 492
atau (penghubung logis), 20
    inklusif dibandingkan dengan eksklusif, 21
    syarat kebenaran untuk, 20
atau eksklusif, 21
atau inklusif, 21
aturan deduksi, 60
aturan empat, 454

bangun ruang Platonik, *Lihat* polihedron beraturan
barisan, 8, 351
    definisi induktif untuk, 353
    definisi rekursif untuk, 353
    notasi untuk, 351
    rumus tertutup untuk, 352, 353
    sebagai fungsi, 351
barisan aritmetika
    penjumlahan, 380
barisan Fibonacci, 9, 353, 429
    identitas, 429
    jumlah parsial, 363, 418, 434
    relasi rekurensi, 401
    selisih, 388
barisan geometri
    penjumlahan, 397
barisan hingga, 8
barisan jumlah parsial, 359, 419, 434
    untuk barisan Fibonacci, 363
    untuk bilangan segitiga, 372
barisan, hingga, 8
batang dan batu, 275
    dibandingkan dengan kombinasi, 343
bertetangga
    simpul, 117, 127
    sisi, 127
bijeksi, 459, 461, 465
bikondisional, 20
bilangan asli, himpunan, 440
bilangan bulat, himpunan, 439, 440
bilangan kompleks (sebagai akar karakteristik), 402
bilangan kromatik, 127, 172
bilangan prima, 92, 425
bilangan rasional, himpunan, 440
bilangan real, himpunan, 440
bilangan segitiga, 9, 357, 372
bilangan soliter, 46
bintang dan batang, *Lihat* batang dan batu
bit, 223
bobot (string bit), 224
bobot string bit, 224
bola dan kotak, *Lihat* batang dan batu
bukti, 15

cakupan (kuantor), 24
citra, 462
    dari suatu elemen, 7, 453, 464, 465
    dari suatu himpunan, 462
    dari suatu himpunan bagian, 465
citra invers, 462, 465
    dari suatu himpunan bagian, 465
    perbandingan dengan fungsi invers, 463
citra invers lengkap, 462, 465

daerah hasil suatu fungsi, 453, 464

dan (penghubung logis), 20
    syarat kebenaran untuk, 20
dasi kupu-kupu, 301, 344, 556
daun, 128, 138
definisi rekursif, 353
    untuk suatu barisan, 9
    untuk suatu fungsi, 8
Δ^k-konstan, 384, 385
derajat, 124, 127
    barisan derajat, 125
    maksimum, 178
    rumus jumlah, 125
derajat maksimum, 178
derajat simpul, 124, 127
    barisan derajat, 125
desain, 11
diagram Venn, 447
    irisan, 448
    selisih himpunan, 448
    untuk menghitung, 248
digit biner, *Lihat* bit
disjungsi, 20
distribusi (pencacahan), 275
    dengan batas atas, 325
distribusi peluang seragam, 308
Doctor Who, 93, 437
dodekahedron, 156
domain, 7, 453, 464
domino, 169, 365, 395

ekuivalensi logis, 53
elemen suatu himpunan, 438
enumerasi, *Lihat* pencacahan

faktor persekutuan terbesar, 494
faktorial, 263
fungsi, 7, 453, 464
    cara mendeskripsikan, 454
    menaik
      pencacahan, 286
    notasi, 464
    notasi dua baris, 456, 464
    pencacahan, 284, 333, 337, 338
    takmenurun
      pencacahan, 286
fungsi pada, *Lihat* surjeksi
fungsi pembangkit, 473
    pengambilan selisih, 477
    perkalian dan jumlah parsial, 480
    relasi rekurensi, 481
fungsi satu-satu, *Lihat* injeksi
fungsi terdiferensialkan
    aturan hasil kali umum, 420
    aturan penjumlahan umum, 420

gabungan, 248
gabungan himpunan, 441, 445
    kardinalitas, 249
gcd, *Lihat* faktor persekutuan terbesar
generalisasi universal, 26, 27
geometri hingga, 11
Goldbach, 70
graf, 10, 116, 119, 127
    barisan derajat, 125
    bertetangga, 116, 127
    bilangan kromatik, 127, 172, 176
    bipartit, 126, 127
    bipartit lengkap, 126, 127
    daun, 128
    derajat, 124, 127
    derajat maksimum, 178
    gambar, 119
    hutan, 128
    indeks kromatik, 179
    isomorfik (definisi intuitif), 120
    isomorfik (definisi tepat), 121
    jejak, 128
    jejak Euler, 127
    kelas isomorfisme, 122
    klik, 177
    kordal, 178
    lengkap, 124, 126, 127
    lintasan, 126, 128
    multigraf, 124, 127
    panjang siklus terpendek, 153
    pencocokan, 205, 207
    perjalanan, 128
    Petersen, 159
    pewarnaan simpul, 128, 172
    pewarnaan simpul versus sisi, 183

planar, 128
pohon, 128
sederhana, 123
sempurna, 178, 184
siklus, 126–128
simpul, 116, 119
sirkuit Euler, 127
sisi, 116, 119
subgraf, 123, 128
subgraf terinduksi, 128
terhubung, 124, 127
tetangga, 132, 206, 207
graf bipartit, 126, 127
graf bipartit lengkap, 126, 127
graf kordal, 178
graf lengkap, 124, 126, 127
graf nonplanar, 151
graf Petersen, 159
$K_{3,3}$, 153
K_5, 152
graf Petersen, 159
graf planar, 128, 148
bilangan kromatik, 176
graf nonplanar, 151
graf Petersen, 159
$K_{3,3}$, 153
K_5, 152
graf sederhana, 123
graf sempurna, 178, 184
graf terhubung, 124, 127
grafik (suatu fungsi), 454

Hanoi, 349
hasil (peluang), 308
hasil (pencacahan), 233
hasil kali Kartesius, 441, 447
himpunan, 6, 437
bilangan asli, 440
bilangan bulat, 439, 440
bilangan rasional, 440
bilangan real, 440
diagram Venn, 447
gabungan, 441
hasil kali, *Lihat* hasil kali Kartesius
hubungan antarhimpunan, 442
irisan, 441
kardinalitas, 441
komplemen, 441
notasi untuk, 437
operasi, 444
selisih, 441, 445
semua himpunan bagian, *Lihat* himpunan kuasa
himpunan bagian, 442
himpunan kosong, 248, 440
himpunan kuasa, 440, 443
kardinalitas, 435
himpunan semesta, 445
himpunan transitif, 452
hipotesis induksi, 409, 410
homogen
relasi rekurensi, 402
hukum De Morgan, 54
hukum logika, 59
hutan, 128, 135

identitas binomial, 291
contoh, 291
ikosahedron, 156
implikasi, 20, 33
indeks kromatik, 179
induk (pada pohon berakar), 142
induksi, 406, 409
ganda, 429
kasus dasar, 409
untuk induksi kuat, 424
langkah induksi, 409
untuk induksi kuat, 424
penggunaan yang keliru, 413
perbandingan induksi biasa dan induksi kuat, 426
induksi ganda, *Lihat* induksi, ganda
induksi kuat, 421
induksi matematika, *Lihat* induksi
injeksi, 333, 459, 460, 464
pencacahan, 338
inklusi–eksklusi, *Lihat* prinsip inklusi–eksklusi
invers, 38

irisan, 248
irisan himpunan, 441, 445
irrefleksif, 10
isomorfik
    definisi intuitif, 120
    definisi tepat, 121
isomorfisme graf, 121

jabat tangan, 419
    kaitan dengan graf, 130
jalan, 161
    Euler, *Lihat* jejak Euler
jejak, 128
    Euler, 161
jejak Euler, 127, 161
jhj, *Lihat* jika dan hanya jika
jika dan hanya jika (penghubung logis), 20
    syarat kebenaran untuk, 20
jika. . . , maka. . . (penghubung logis), 20
    syarat kebenaran untuk, 20
jumlah parsial, *Lihat* barisan jumlah parsial

permutasi-k dari n elemen, 264
kalimat (dibandingkan dengan pernyataan), 19
kardinalitas, 248, 444
    gabungan, 249, 253
    himpunan kuasa, 435
    suatu himpunan, 441
kartu, 232
kartu remi, 93, 232
kasus dasar, 408, 409, 424
kata (pencacahan), 235
kebebasan, 315
kejadian (peluang), 309
kejadian (pencacahan), 233
kejadian saling lepas, 235
kelas isomorfisme, 122
kelas residu, *Lihat* kelas sisa
kelas sisa, 488
kelinci cokelat ajaib, 434
kesatria dan penipu, 14, 64, 114
kesimpulan, 15, 33
keturunan (pada pohon berakar), 142
kisi bilangan bulat, 221
kisi, bilangan bulat, *Lihat* kisi bilangan bulat
klik, 177
K_n, 124
kodomain, 7, 453, 464
koefisien binomial, 227, 228, 338
    rumus tertutup, 266
kombinasi, 260
    dibandingkan dengan permutasi, 266, 338, 343, 344
    rumus tertutup, 266
komplemen (suatu kejadian), 311
komplemen suatu himpunan, 441, 445
komplemen, peluang, 312
komposisi fungsi, 470
kondisional, 20, 33
konektif utama, 51
kongruensi
    penyelesaian, 495
konjektur Goldbach, 111
konjungsi, 20
konsekuen, *Lihat* kesimpulan
kontradiksi, 80
kontraposisi, 38
    pembuktian melalui, 77
konvers, 38
korolari, 101
kuantor, 24
    implisit, 26
kuantor eksistensial, 24
kuantor implisit, 26
kuantor universal, 24
kubus, 154
kukuh, 15
Königsberg, Tujuh Jembatan, 116, 162

langkah induksi, 408, 409, 424
leluhur (pada pohon berakar), 142
lema jabat tangan, 125
lintasan, 128
    augmentasi, 208
    berselang-seling, 208

Euler, *Lihat* jejak Euler
Hamilton, 161, 165
jenis graf, 126
lintasan augmentasi, 208
lintasan benteng, 218
lintasan berselang-seling, 208
lintasan Hamilton, 161, 165
pada graf bipartit, 169
lintasan kisi, 221
panjang, 222

masalah Monty Hall, 317
masalah perkawinan, *Lihat* pencocokan
membagi, 486
Menara Hanoi, 349, 350
mengimplikasikan (penghubung logis), 20
syarat kebenaran untuk, 20
menumpuk peluru meriam, 394
mod, 490
modus ponens, 60
monokromatik, 180
muka (graf planar), 148, 149
multigraf, 124, 127
multihimpunan, 11
hubungan dengan multigraf, 124
pencacahan, 285
multihimpunan (pencacahan), 275

Natal, 433
negasi, 20
negasi ganda, 55
nilai kebenaran, 19, 20
notasi dua baris, 456, 464
notasi pembentuk himpunan, 439
notasi penjumlahan, 359, 364
notasi perkalian, 364
notasi sigma, 359
NP-lengkap, 165

oktahedron, 156
operasi pada himpunan, 444
orang Kanada, himpunan, 413

pangkat 2, 357
panjang siklus terpendek, 153
panjang string bit, 224
papan catur
lintasan benteng, 218
menghitung persegi pada, 383
pengubinan, 365
petak yang hilang, 93, 94
paradoks ulang tahun, 307
partisi, 489
peluang, 310
peluang bersyarat, 317
pembagian dengan sisa, *Lihat* algoritma pembagian
pembuktian
dengan induksi, 406
dengan induksi kuat, 421
dengan kontradiksi, 80
kombinatorial, 288, 295
melalui kontraposisi, 77
pembuktian kombinatorial, 288, 295
pembuktian langsung, 72
pencacahan, 217
pembagi, 246
sisi dalam graf, 125
pencarian
melebar, 143
mendalam, 144
pencarian melebar, 143
pencarian mendalam, 144
pencocokan, 205
parsial, 208
pencocokan parsial, 208
pencocokan polinomial, 378, 385
pencocokan sempurna, *Lihat* pencocokan
penelusuran elemen, 98
penghubung, 19, 20
penghubung biner, 19
penghubung logis, 19, 20
penghubung uner, 19
penjahat minimal, 139
penutup (simpul), 210
penutup simpul, 210
percobaan acak, 308
perjalanan, 128

permutasi, 260, 262, 264
    dibandingkan dengan kombinasi, 266, 338, 343, 344
    dari k elemen yang dipilih dari n, *Lihat* permutasi-k dari n elemen
    dari n elemen, 263
permutasi tanpa titik tetap, 331
    proporsi di antara semua permutasi, 341
pernyataan, 16, 18
pernyataan atomik, 18
pernyataan molekuler, 18
persamaan Diofantin, 497
    solusi, 498
persamaan karakteristik, 400
pewarnaan
    simpul, 172
    simpul versus sisi, 183
    sisi, 179
pewarnaan simpul, 128, 172
pewarnaan simpul yang tepat, 128
PIE, *Lihat* prinsip inklusi–eksklusi
pohon, 128, 135
    banyak sisi dan simpul, 139
    berakar, 135, 142
    merentang, 140
pohon berakar, 135, 142
pohon merentang, 140
    minimum, 141
pohon merentang minimum, 141
polihedron, 154
    beraturan, 154
polihedron beraturan, 154
polihedron konveks, 154
polinomial karakteristik, 400
predikat, 24
    biner, 30
predikat biner, 30
premis, 15, 33
prinsip aditif, *Lihat* prinsip penjumlahan
prinsip inklusi–eksklusi, 248, 325
    untuk 2 himpunan, 253
    untuk 3 himpunan, 253
    untuk 4 himpunan atau lebih, 329
prinsip lintasan pacu, 412
prinsip multiplikatif, *Lihat* prinsip perkalian
prinsip penjumlahan, 232, 235
    menggunakan himpunan, 249
prinsip penjumlahan (peluang), 314
prinsip perkalian, 232, 237
prinsip sarang merpati, 83

rasio emas, 401
refleksif, 10
relasi, 10
relasi biner, 10
relasi ekuivalensi, 10, 489
relasi keterbagian, 485, 486
relasi rekurensi, 353
    fungsi pembangkit, 481
    penyelesaian, 395, 400, 402
    untuk banyaknya string bit, 224
    untuk suatu fungsi, 458
representasi biner, 428
representasi planar, 149
ruang sampel, 308
rujukan diri, *Lihat* rujukan, diri
rujukan, diri, *Lihat* rujukan diri
rumus tertutup, 352
    untuk suatu barisan, 9, 385
    untuk suatu fungsi, 8, 457

sahih, 15
sahih secara logis, *Lihat* hukum logika
saling lepas, 248
saudara (pada pohon berakar), 142
Segitiga Pascal
    pola dalam, 290
segitiga Pascal, 220, 365, 394
    jumlah pada baris, 419
selisih himpunan, 441, 445
selisih hingga, 385
selisih suatu barisan, 384
sembarang, 74
semesta pembicaraan, 25
sepak bola Amerika, 418, 428
siklus, 127, 128

Hamilton, 161, 165
jenis graf, 126
siklus Hamilton, 161, 165
pada graf bipartit, 169
simetris, 10
simpul, 11, 117, 119, 127
sirkuit, 161
Euler, 161
sirkuit Euler, 127, 161
sisi, 11, 117, 119, 127
string
biner, *Lihat* string bit
terner, 303, 364
string bit, 223, 224, 365
bobot, 224
panjang, 224
pembuktian kombinatorial yang melibatkan, 303
string terner, 303, 364
struktur, 5
struktur diskret, *Lihat* struktur
subgraf, 123, 128
subgraf terinduksi, 123, 128
subhimpunan, 225
pencacahan, 225
sudoku, 69, 72
sudut dalam, 418, 428
suku (dari suatu barisan), 9
surjeksi, 333, 459, 464
syarat awal, 353
untuk suatu fungsi, 458
syarat cukup, 42
syarat kebenaran, 20
untuk atau, 20
untuk dan, 20
untuk jika dan hanya jika, 20
untuk jika. . . , maka. . . , 20
untuk tidak, 20
syarat pencocokan, 207
syarat perlu, 42

tabel kebenaran, 20, 50
tautologi, 52, 70
teka-teki, 114
batang cokelat, 422
jejak domino, 169
kardinalitas, 452
kesatria dan penipu, 14, 64
Menara Hanoi, 349
pembagian persegi, 429
tujuh jembatan, 116
ulang tahun, 307
teorema binomial, 228
teorema Brooks, 178
teorema empat warna, 176
teorema enam warna, 184
teorema perkawinan Hall, 207
teorema Pythagoras, 32
teorema tongkat hoki, 420
teorema Vizing, 180
teori bilangan, 485
teori Ramsey, 180
tetangga simpul, 132, 206, 207
tetrahedron, 156
tidak (penghubung logis), 20
syarat kebenaran untuk, 20
transitif, 10
tripel Pythagoras, 10, 497
Tujuh Jembatan Königsberg, 116, 162
tupel, *Lihat* barisan, hingga
tur, Euler, *Lihat* sirkuit Euler
The Twelve Days of Christmas, 433

ukuran suatu himpunan, *Lihat* kardinalitas
untuk semua, 24

variabel bebas, 24
variabel Boolean, *Lihat* variabel proposisional
variabel kalimat, *Lihat* variabel proposisional
variabel proposisional, 19
variabel, proposisional, 19

wilayah (graf), *Lihat* muka (graf planar)
wilayah planar, *Lihat* muka (graf planar)

zombi, 418

Kolofon

Buku ini disusun dengan PreTeXt.