

8. Über ganze rationale Darstellung der Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen

Math. Ann. 77 (1916), S. 93–102

Am Schluß seines Beitrags zur Schwarz-Festschrift „Über die Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen“ spricht D. Hilbert die Vermutung aus, daß sich *diese Invarianten ganz und rational durch die endlich vielen Invarianten des Systems (J, PJ) darstellen lassen*, wo J das volle Invariantensystem von den linear unabhängigen der Grundformen bedeutet, und die Invarianten PJ aus J durch Polarprozesse hervorgehen.

Ich zeige im folgenden in I., daß diese Vermutung tatsächlich zutrifft, und zwar als einfache Folge des *Reduktionssatzes*, daß *jede Form von beliebig vielen Reihen von je n Variablen sich darstellen läßt als Summe von Polaren von Formen, die nur n feste Reihen enthalten und ihrerseits aus der Ausgangsform durch Polarprozesse abgeleitet sind*. Dieser Reduktionssatz ist ein zuerst von F. Mertens formulierter Spezialfall der von A. Capelli, F. Mertens und J. Deruyts gegebenen Verallgemeinerung der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung auf Formen von beliebig vielen Reihen von je n Variablen; eine Verallgemeinerung, die durch formale Umformung der Differentiationsprozesse bewiesen ist.*)

Ich gebe noch in II. einen mehr begrifflichen Beweis des Reduktionssatzes, indem ich die Frage als ein Problem der Äquivalenz von linearen Formenscharen auffasse. Diese Auffassung und ebenso einen wesentlichen

*) F. Mertens: „Über eine Formel der Determinantentheorie.“ (Formel 5) Sitzb. d. Ak. d. Wiss. Wien, Bd. 91, II. Abt. (1885), und ausführlicher (mit Anwendungen) in: „Über ganze Funktionen von m Systemen von je n Unbestimmten“. Monatsh. f. Math. u. Phys. 4. Jahrg. (1893).

Für einige der Capellischen Beweise (seit 1882) vgl. etwa: Math. Ann. 37 oder die (autographierten) „Lezioni sulla teoria delle forme algebriche“ (1902). J. Deruyts: Essai d'une théorie générale des formes algébriques, Mém. d. l. Soc. Roy. des Sciences de Liège (2) 17 (1892).

Teil der benutzten Überlegungen entnehme ich einer Arbeit „Über algebraische Modulsysteme“*) und daran anschließenden unveröffentlichten Sätzen von E. Fischer, deren Verwendung mir dieser freundlichst gestattete.

Schließlich zeige ich noch in III., wie die entsprechenden Überlegungen auch zu den allgemeinsten Reihenentwicklungen führen.

I.

Es sei θ eine in jeder der $N > n$ Reihen

$$A_1, A_2, \dots, A_N$$

homogene Form, wobei allgemein die Reihe A_k aus den n Elementen

$$A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \dots, A_k^{(n)}$$

bestehen möge. Die Koeffizienten von θ können Unbestimmte oder Größen eines gegebenen Rationalitätsbereichs sein. Es bezeichne ferner P eine ganze rationale Funktion — mit *rationalen* Zahlkoeffizienten — der Polarprozesse:

$$P_{hk} = \left(A_h \frac{\partial}{\partial A_k} \right) = A_h^{(1)} \frac{\partial}{\partial A_k^{(1)}} + A_h^{(2)} \frac{\partial}{\partial A_k^{(2)}} + \dots + A_h^{(n)} \frac{\partial}{\partial A_k^{(n)}},$$

wobei unter dem Produkt $P_{hk} P_{ij} \theta$ die Anwendung von P_{hk} auf $P_{ij} \theta$ zu verstehen ist.

Dann ist der erwähnte *Reduktionssatz* gegeben durch die Identität:

$$(1) \quad 6 = \sum PZ,$$

wo die Formen Z nur noch die Reihen

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

enthalten, und aus θ durch Polarprozesse P abgeleitet sind.

Wir betrachten nun das Grundformensystem (F) , bestehend aus den N Formen gleicher Ordnung und gleicher Variabelnzahl

$$F_1, F_2, \dots, F_N,$$

deren Koeffizienten bzw. als die N Reihen

$$A_1, A_2, \dots, A_N$$

genommen werden. Mit (J) sei das — aus endlich vielen Invarianten bestehende — volle System von $F_1, \dots, F_n$ bezeichnet, derart, daß jede Invariante von $F_1, \dots, F_n$ sich ganz und rational durch die Invarianten (J) ausdrücken läßt. Die zu beweisende *Hilbertsche Vermutung* besteht dann darin, daß für die Simultaninvarianten S von $F_1, \dots, F_N$ ein volles System

*) E. Fischer: Über algebraische Modulsysteme und lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, § 1—4, J. f. M. 140 (1911).

durch die endlich vielen Invarianten (J, PJ) gegeben ist, wo PJ alle durch Polarprozesse P aus J ableitbaren Invarianten bedeutet.

In der Tat wird jede rationalzahlige Simultaninvariante S von (F) eine in jeder der N Reihen $A_1 \cdots A_N$ homogene Form — mit rationalen Zahlenkoeffizienten —, auf die sich somit die Identität (1) anwenden läßt. Da die Anwendung der Polarprozesse P auf S bekanntlich wieder Invarianten erzeugt, werden auch die Formen Z wieder Invarianten, und zwar Simultaninvarianten von $F_1 \cdots F_n$, da sie nur noch die Reihen $A_1 \cdots A_n$ enthalten; sie sind also nach Voraussetzung ganze rationale Funktionen der Invarianten (J) . Somit geht die Identität (1) über in:

$$S = \sum PY$$

wo die Y Potenzprodukte der Invarianten (J) bedeuten. Die wirkliche Ausführung der Prozesse P auf Y besteht aber nach der Definition von P in der sukzessiven, endlich oft wiederholten Ausführung der einfachen Polaroperationen P_{hk} , die nach der Differentiationsregel für Produkte auf Summen von Produkten aus Invarianten (J) und (PJ) führen. Das gleiche gilt für die Anwendung von P_{hk} auf ein Produkt aus (J) und (PJ) , und somit liefert auch PY nur ganze rationale Verbindungen von (J, PJ) . Die ganze rationale Darstellbarkeit aller Invarianten S durch (J, PJ) ist damit bewiesen.

II.

Dem Beweis des Reduktionssatzes schicken wir einiges über lineare Formenscharen voraus. Unter einer *linearen Formenschar in K* verstehen wir dabei ein System von Formen gleicher Dimension von der Vollständigkeit, daß neben θ_1 und θ_2 stets auch $c_1\theta_1 + c_2\theta_2$ zum System gehört, wo c_1, c_2 Größen eines vorgegebenen Rationalitätsbereichs K sind, und K den Koeffizientenbereich der θ enthält. Unter diesen Formen gibt es stets eine endliche Anzahl — etwa ϱ — linear unabhängige in K , während je $\varrho + 1$ Formen einer linearen Relation mit Koeffizienten aus K genügen; die Schar hat den Rang ϱ in bezug auf K .) Es gilt die leicht einzusehende *Tatsache*: Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{T}$ zwei lineare Scharen in K von gleichem Rang ϱ , und ist $\mathfrak{T}$ eine Teilschar von $\mathfrak{L}$, so sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{T}$ identisch (äquivalent).

Dies vorausgeschickt, gehen wir zum Reduktionssatz über. Nun geht die Identität (in I)

$$(1) \quad \theta = \sum PZ$$

*) Allgemeinere lineare Formenscharen — deren Rang nicht endlich zu sein braucht — erhält man, indem man die Beschränkung der gleichen Dimension fallen läßt, oder auch die Beschränkung daß K den Koeffizientenbereich der θ enthält.

in eine analoge für $P\theta$ über, wenn man auf beiden Seiten denselben Polarprozeß P anwendet; der Reduktionssatz gibt also gleichzeitig eine Darstellung *aller* Polaren von θ durch Summen der speziellen Polaren PZ . Da andererseits diese speziellen Polaren sicher in der Gesamtheit aller enthalten sind, *sagt also der Reduktionssatz die Äquivalenz dieser beiden linearen Formenscharen aus*; insbesondere auch die Äquivalenz derjenigen Teilscharen, deren Formen in jeder *einzelnen* Reihe gleicher Dimension wie θ sind. Zum Nachweis dieser Äquivalenz fügen wir noch eine durch die Formen Z bedingte Zwischenschar ein. Wir geben der Einfachheit halber den *Beweis* zunächst *im Falle dreier binärer Reihen* ($N=3$, $n=2$), um dann den parallel laufenden allgemeinen Beweis kurz anzudeuten.

Sei also $\theta(x, y, z)$ bzw. von den Dimensionen α, β, p in den Reihen $x_1x_2; y_1y_2; z_1z_2$; die Koeffizienten von θ sollen vorerst Unbestimmte a (oder auch rationale Zahlen) sein. Dann betrachten wir die drei linearen Formenscharen:

1. Die Schar $\mathfrak{L}$, bestehend aus allen Formen $f(x, y, z)$, die aus θ durch Polarprozesse P hervorgegangen und in den einzelnen Reihen x, y, z von gleicher Dimension wie θ sind; $\mathfrak{L}$ enthält insbesondere auch θ . Indem man $f(x, y, z)$ als Formen von x, y, z und den Unbestimmten a betrachtet, ist der Koeffizientenbereich durch den Körper R der rationalen Zahlen gegeben; auch für K muß R genommen werden, da nur bei rationalzahligem c_1, c_2 auch $c_1P_1 + c_2P_2$ wieder ein Prozeß P wird; $\mathfrak{L}$ sei vom Rang q in bezug auf R .

2. Die Schar $\mathfrak{S}$, bestehend aus allen Formen $g(\lambda; x, y)$, die definiert sind durch

$$g(\lambda; x, y) = f(x, y, \lambda_1x + \lambda_2y),$$

oder, durch Polarprozesse ausgedrückt:

$$\begin{aligned} g(\lambda; xy) &= \frac{1}{p!} \left[(\lambda_1x + \lambda_2y) \frac{\partial}{\partial z} \right]^p f(x, y, z)^* \\ &= g_0(xy) \lambda_1^p + g_1(x, y) \lambda_1^{p-1} \lambda_2 + \cdots + g_p(xy) \lambda_2^p \end{aligned}$$

wobei man hat:

$$i! (p-i)! g_i(xy) = \left(y \frac{\partial}{\partial z} \right)^i \left(x \frac{\partial}{\partial z} \right)^{p-i} f(xy z).$$

*) Es bedeutet wie in I:

$$\left(t \frac{\partial}{\partial z} \right) = t_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

also speziell:

$$\begin{aligned} \left[(\lambda_1x + \lambda_2y) \frac{\partial}{\partial z} \right] &= (\lambda_1x_1 + \lambda_2y_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda_1x_2 + \lambda_2y_2) \frac{\partial}{\partial z_2}; \\ \left[z \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] &= z_1 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + z_2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right). \end{aligned}$$

Durch die $g_i(xy)$ sind somit Formen Z der Identität (1) gegeben: Die g sind rationalzahlige Formen in x, y, λ und den Unbestimmten a ; $\mathfrak{S}$ sei vom Rang σ in bezug auf R .

3. Die Schar $\mathfrak{T}$, die aus $\mathfrak{S}$ durch den inversen Polarprozeß hervorgeht, wie $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{L}$; die Formen h von $\mathfrak{T}$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= \frac{1}{p!} \left[z \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^p g(\lambda; xy) \\ &= h_0(xyz) + h_1(xyz) + \cdots + h_p(xyz), \end{aligned}$$

wobei nach 2. gilt:

$$h_i(xyz) = \left(z \frac{\partial}{\partial x} \right)^{p-i} \left(z \frac{\partial}{\partial y} \right)^i g_i(xy).$$

Die einzelnen h_i und folglich auch h sind also Formen PZ und deren Summen; $\mathfrak{T}$ sei vom Rang τ in bezug auf R .

Wie die Konstruktion der Formen $h(x, y, z)$ von $\mathfrak{T}$ zeigt, sind diese durch Polarprozesse P aus θ hervorgegangen, und in den Reihen x, y, z einzeln gleicher Dimension wie θ ; die Schar $\mathfrak{T}$ bildet somit eine Teilschar von $\mathfrak{L}$, und nach der oben erwähnten Tatsache ist zum Nachweis der Äquivalenz nur noch die Gleichheit des Ranges nachzuweisen. Bei diesem Nachweis wird von der speziellen Struktur der $f(xyz)$ — Polaren ein und derselben Form θ — nicht mehr Gebrauch gemacht.

a) Zum Vergleich des Ranges von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ dient der Hilfssatz a): Aus $f(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = 0$ folgt notwendig $f(x, y, z) = 0$. Dies ergibt sich unmittelbar aus der zwischen drei binären Reihen bestehenden identischen Relation:

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0, \text{ wo } (xy) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdots,$$

die zur Folge hat:

$$f[x, y, (zy)x + (xz)y] = (xy)^p f(x, y, z).$$

Aus $f(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = 0$ (identisch in λ) ergibt sich somit, wie die Substitution $\lambda_1 = (zy)$, $\lambda_2 = (xz)$ zeigt, da $(xy) \neq 0$ — notwendig $f(x, y, z) = 0$.

Nach diesem Hilfssatz herrscht zwischen den Formen aus $\mathfrak{S}$ und aus $\mathfrak{L}$ ein-eindeutiges Entsprechen. Aus

$$f_1(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = g(\lambda; xy); \quad f_2(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = g(\lambda; xy)$$

folgt nämlich notwendig:

$$f_1(xyz) = f_2(xyz).$$

Es bleibt weiter jede Relation in $\mathfrak{S}$ auch zwischen den eindeutig entsprechenden Formen in $\mathfrak{L}$ erhalten (und umgekehrt). Denn aus

$$c_1 g^{(1)}(\lambda; xy) + c_2 g^{(2)}(\lambda; xy) + \cdots + c_r g^{(r)}(\lambda; xy) = 0$$

folgt nach dem Hilfssatz notwendig:

$$c_1 f^{(1)}(x, y, z) + c_2 f^{(2)}(x, y, z) + \dots + c_x f^{(x)}(x, y, z) = 0.$$

Damit ist die Gleichheit des Ranges von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ bewiesen; $\varrho = \sigma$.

b) Zum Vergleich des Ranges von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ dient entsprechend der Hilfssatz b): Aus $h(x, y, z) = 0$ folgt notwendig $g(\lambda; xy) = 0$. Zum Beweise bedenken wir, daß nach 3. $h(x, y, z) = 0$ gleichbedeutend ist mit dem Verschwinden der einzelnen Potenzprodukte

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{p_2} g(\lambda; x, y), \quad (p_1 + p_2 = p)$$

woraus durch weiteres Differenzieren auch das Verschwinden der Potenzprodukte

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{\beta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots\right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots\right)^{p_2} g(\lambda, xy)$$

folgt. Mithin verschwindet auch jede lineare Kombination dieser Potenzprodukte, daher jede Form

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y}\right) g(\lambda, xy).$$

Wählt man f speziell so, daß man hat:

$$f(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = g(\lambda; xy),$$

so kommt also auch:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) g(\lambda, x, y) = 0;$$

oder — wenn man setzt:

$$g(\lambda, xy) = \sum G_i \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} x_1^{\alpha_3} x_2^{\alpha_4} y_1^{\alpha_5} y_2^{\alpha_6},$$

wo also die G_i rationalzahlige Linearformen der Unbestimmten a sind —

$$\sum \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_6! G_i^2 = 0$$

und folglich $g(\lambda; xy) = 0$.

Aus Hilfssatz b) folgt genau wie in a) die Gleichheit des Ranges von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$; $\sigma = \tau$.

Mithin hat man nach a) und b): $\varrho = \tau$; und damit ist — da $\mathfrak{T}$ Teil-schar von $\mathfrak{L}$ — die Äquivalenz dieser beiden linearen Scharen bewiesen. Es läßt sich also jede Form aus $\mathfrak{L}$, insbesondere auch θ , darstellen als lineare, rationalzahlige Kombination von ϱ linear unabhängigen Formen $h(x, y, z)$:

$$\theta = \sum c_i h^{(i)}(x, y, z) = \sum PZ.$$

Diese für unbestimmte Koeffizienten a von θ abgeleitete Identität bleibt aber erhalten, wenn man die Unbestimmten a durch Größen irgendeines Rationalitätsbereichs ersetzt, und der Reduktionssatz ist somit im Falle dreier binären Reihen allgemein bewiesen.

Der allgemeine Beweis, für N Reihen von je n Variabeln, läuft nun völlig parallel. Es sei $\theta(A)$ bzw. von der Dimension α_i in der Reihe A_i . Dann betrachten wir wieder die drei linearen Formenscharen:

1. die Schar $\mathfrak{L}$, bestehend aus allen Formen $f(A)$, die aus $\theta(A)$ durch Polarprozesse P hervorgegangen, und in jeder einzelnen Reihe A_i von gleicher Dimension wie $\theta(A)$ sind;

2. die Schar $\mathfrak{S}$, bestehend aus allen Formen $g(\lambda; A_1 \cdots A_n)$, die aus $f(A)$ durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \lambda_{n+1}^{(1)} A_1 + \lambda_{n+1}^{(2)} A_2 + \cdots + \lambda_{n+1}^{(n)} A_n \\ &\vdots \\ A_N &= \lambda_N^{(1)} A_1 + \lambda_N^{(2)} A_2 + \cdots + \lambda_N^{(n)} A_n \end{aligned}$$

hervorgehen; dabei sind durch die Koeffizienten der einzelnen Potenzprodukte der λ in $g(\lambda; A_1 \cdots A_n)$ Formen Z der Identität (1) gegeben;

3. die Schar $\mathfrak{T}$, bestehend aus allen Formen $h(A)$, die definiert sind durch:

$$\begin{aligned} h(A) &= \left[A_{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_{n+1}^{(1)}} \frac{\partial}{\partial A_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial \lambda_{n+1}^{(n)}} \frac{\partial}{\partial A_n} \right) \right]^{\alpha_{n+1}} \cdots \\ &\cdots \left[A_N \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_N^{(1)}} \frac{\partial}{\partial A_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial \lambda_N^{(n)}} \frac{\partial}{\partial A_n} \right) \right]^{\alpha_N} g(\lambda; A_1 \cdots A_n); \end{aligned}$$

$h(A)$ ist eine Summe von Formen PZ .

Nun bleibt wegen der zwischen je $n+1$ Reihen bestehenden identischen Relation Hilfssatz a) erhalten; ebenso gilt Hilfssatz b), bei dessen Beweis die Variabelnzahl gar nicht in Betracht kam. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{T}$ sind also von gleichem Rang, und — da $\mathfrak{T}$ Teilschar von $\mathfrak{L}$ — identisch. Somit gilt die Identität

$$(1) \quad \theta = \sum PZ$$

für unbestimmte Koeffizienten, und folglich für Größen eines beliebigen Rationalitätsbereichs als Koeffizienten; *der Reduktionssatz ist damit allgemein bewiesen.*

III.

Wir zeigen noch kurz, wie durch analoge Überlegungen auch die *allgemeine Reihenentwicklung* (für $N \leq n$) gewonnen wird. Es sei Z eine einzeln homogene Form der n Reihen $A_1 \cdots A_n$ von je n Größen; und Δ die Determinante dieser Reihen. Dann beweisen wir vorerst die (1) entsprechende Identität:

$$(2) \quad Z \equiv \sum PH \text{ mod } \Delta,$$

wo die Formen H nur noch die Reihen $A_1 \cdots A_{n-1}$ enthalten, und aus Z durch Prozesse P abgeleitet sind.

Der Beweis beruht in der Umwandlung der in II. abgeleiteten Relationen in Kongruenzen mod Δ . Der Einfachheit halber seien *drei ternäre Reihen* x, y, z zugrunde gelegt; die Koeffizienten seien als Unbestimmte vorausgesetzt.

Die drei linearen Scharen $\mathfrak{L}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ seien wie in II. im Fall der binären Reihen definiert; ihr Rang sei ϱ, σ, τ ; während ϱ^* und τ^* den Rang von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{T}$ mod Δ bezeichnen (d. h. es gibt ϱ^* , aber nicht $\varrho^* + 1$ Formen aus $\mathfrak{L}$, die linearunabhängig mod Δ sind). Dann gilt wie in II. der

Hilfssatz a): Aus $f(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = 0$ folgt notwendig $f(xyz) \equiv 0$ mod Δ (und umgekehrt). Es herrscht nämlich vermöge der zwischen vier ternären Reihen bestehenden Relation:

$$\Delta_1 x - \Delta_2 y + \Delta_3 z = \Delta t, \quad \text{wo } \Delta_1 = (yzt) \dots,$$

stets zwischen drei ternären Reihen eine lineare Relation mod Δ :

$$\Delta_1 x - \Delta_2 y + \Delta_3 z \equiv 0 \text{ mod } \Delta,$$

und man hat folglich wie in II:

$$f(x, y, -\Delta_1 x + \Delta_2 y) \equiv \Delta_3^2 f(x, y, z) \text{ mod } \Delta.$$

Aus $f(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = 0$ (ident. in λ) folgt somit — da Δ irreduzibel und Δ_3 nicht durch Δ teilbar — notwendig $f(x, y, z) \equiv 0$ mod Δ . Die Umkehrung ist wegen $\Delta(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y) = 0$ klar. Hieraus schließt man wie in II.: $\varrho^* = \sigma$.

Hilfssatz b) bleibt mit Beweis erhalten und man hat somit: $\sigma = \tau$. Zum Nachweis $\tau = \tau^*$ dient der

Hilfssatz c): Aus $h(x, y, z) \equiv 0$ mod Δ folgt notwendig $h(x, y, z) = 0$. $h(x, y, z)$ verschwindet nämlich als Polare bei Anwendung des bekannten Ω -Prozesses, was sich ausdrückt durch die Differentialgleichung:

$$\Delta \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) h(xyz) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) h(x, y, z) = 0. *)$$

Hat man nun: $h(x, y, z) = \Delta(x, y, z) \cdot k(x, y, z)$, so verschwindet durch weiteres Differenzieren auch:

$$k \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = h \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) h(x, y, z),$$

und folglich $h(x, y, z)$. Somit hat man $\varrho^* = \sigma = \tau = \tau^*$, und da $\mathfrak{T}$ Teilschar von $\mathfrak{L}$, ist die Identität (2) bewiesen; eine entsprechende Überlegung ergibt den Beweis bei n Variablen.

*) Man hat nach 3.:

$$c \cdot \Omega(h) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right) \left(x \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{\alpha-1} \left(y \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^{\beta-1} \left[z \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right]^{\nu-1} g(\lambda; \xi, \eta)$$

und $\Omega(h)$ verschwindet also wegen des Verschwindens des Determinantenfaktors.

Indem man die Identität (2) auf den Multiplikator von Δ anwendet, kommt eine Entwicklung:

$$Z = \varphi_0 + \Delta \varphi_1 + \Delta^2 \varphi_2 + \cdots + \Delta^\mu \varphi_\mu,$$

wo die φ_i einzeln bei Anwendung des Ω -Prozesses verschwinden. Die i malige Wiederholung des Prozesses ergibt somit — da man allgemein hat: $\Omega(\Delta \cdot \psi) = c_1 \psi + c_2 \Delta \cdot \Omega(\psi)$ —:

$$c \cdot \Omega^i(Z) \equiv \varphi_i \text{ mod } \Delta;$$

andererseits hat man nach (2):

$$c \cdot \Omega^i(Z) \equiv \sum P H_i \text{ mod } \Delta,$$

wo die H_i ebenso aus der Form $\Omega^i(Z)$ abgeleitet sind wie H aus Z . Nach Hilfssatz c) (in der Ausdehnung auf n Variable) kommt somit: $\varphi_i = \sum P H_i$, und folglich:

$$(3) \quad Z = \sum P H + \Delta \cdot \sum P H_1 + \Delta^2 \cdot \sum P H_2 + \cdots + \Delta^\mu \cdot \sum P H_\mu$$

als allgemeinste Reihenentwicklung einer Form von n Reihen von je n Variablen nach Polaren von Formen von nur $n - 1$ Reihen.

Die Reihenentwicklung für Formen von N Reihen von n Variablen ($N < n$) gewinnt man daraus bekanntlich durch eine einfache Substitution. Wir setzen (für $N = 3$, $n > 3$):

$$u = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z, \quad v = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z, \quad w = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z$$

und entwickeln $H(u, v, w) = Z(\xi, \eta, \xi)$ nach (3). Man hat dann, da ξ, η, ξ nur in den Verbindungen u, v, w auftreten:

$$\left(\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \left(v \frac{\partial}{\partial u} \right) \cdots; \quad \Omega = \sum \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w} \right)_{i k l} (xyz)_{i k l} = \nabla_{u v w} (xyz).$$

Vermöge der Spezialisierung: $\xi_1 = \eta_2 = \xi_3 = 1$; $\xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0$ geht $H(u, v, w)$ über in $H(x, y, z)$, $\nabla_{u v w} (xyz)$ bis auf einen Zahlfaktor in $\nabla_{x y z} (xyz) = \nabla_{x y z}$, da die Anwendung von $\left(y \frac{\partial}{\partial x} \right)$ usw. auf die Determinanten $(xyz)_{i k l}$ diese zum Verschwinden bringt. Da Entsprechendes auch bei N Reihen gilt, folgt somit aus (3) eine Entwicklung:

$$(4) \quad H = \sum P \Phi + \sum P \Phi_1 + \cdots + \sum P \Phi_\mu,$$

wo die Φ_i aus $\nabla_{A_1 \cdots A_N} H$ durch Prozesse P hervorgegangen und nur noch die Reihen $A_1 \cdots A_{N-1}$ enthalten, abgesehen von den in ∇' auftretenden Determinantenverbindungen — die wie erwähnt bei der Polarisierung nicht in Betracht kommen.

Ersetzt man daher diese Determinanten in ∇^i durch Unbestimmte p , so kann man die entstehenden Formen wieder nach (4) entwickeln; und erhält so schließlich eine Entwicklung

$$(5) \quad H = \left[\sum P\psi(p) \right]_{p = \text{Determinanten der } A_1 \dots A_N},$$

wo die ψ aus der Ausgangsform durch Prozesse P und $\nabla_{A_1 \dots A_N}(p)$, $\nabla_{A_1 \dots A_{N-1}}(p)$ usw. hervorgehen. Mit diesen Entwicklungen und ihren Kombinationen — indem man etwa auf die in (1) auftretenden Formen Z (3) und hierauf (4) und (5) anwendet — sind alle bekannten Entwicklungen für Formen von beliebig vielen Reihen von je n kogredienten Variablen erschöpft.

Erlangen, 5. Januar 1915.