

4. Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln

Journal f. d. reine u. angew. Math. 139 (1911), S. 118–154

Einleitung.

In der projektiven Invariantentheorie der Formen von n Variabeln sind die an das Hauptproblem — den Endlichkeitsnachweis des Formensystems — sich anschließenden Fragen kaum behandelt, wenn man über das binäre und ternäre Gebiet hinausgeht. Es sind dies die Fragen nach der gegenseitigen Abhängigkeit der Formen und nach den Methoden zur Beherrschung dieses Formenzusammenhangs. Diese Methoden beruhen wesentlich — wie dies im binären und ternären Gebiet vollständig nachgewiesen ist — auf zwei von Herrn *Study* als „Fundamentalsätze der symbolischen Methode“ bezeichneten Sätzen, nämlich dem Satz von der symbolischen Darstellbarkeit der Formen und dem Satz von den symbolischen Identitäten**). Der letztere Satz sagt aus, daß man alle zwischen ganzen invarianten Bildungen bestehenden Relationen erhält durch sukzessive Anwendung einer kleinen Anzahl von symbolischen Identitäten; daß also die symbolische Methode, und nur diese, die Kenntnis des Formenzusammenhangs gibt, ohne aus dem Gebiet des Invarianten herauszutreten.

*) Vgl. eine kurze Mitteilung an die Salzburger Naturforscherversammlung. Jahresbericht d. deutsch. Math.-Vereinigung. Bd. 19, S. 101.

**) *E. Study*, Methoden zur Theorie der ternären Formen (Leipzig, Teubner, 1889). II. § 6. — Über das Auftreten dieser Fundamentalsätze auch in der Invariantentheorie spezieller Transformationsgruppen vgl. *Study*, Das Apollonische Problem (Math. Ann. Bd. 49 [1897]) und Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven (Transactions of the American Math. Society, Bd. 1 [1909]).

Auf den Grund der Schwierigkeit beim Übergang zu n Variablen hat schon Herr *Gordan* in seinem Erlanger Programm*) hingewiesen; er liegt darin, daß der erste Satz der symbolischen Methode in seiner allgemeinen Fassung nicht mehr gilt. Es treten im n -nären Gebiet bekanntlich Variablenreihen höherer Stufe p_e **) auf und analog Symbolreihen höherer Stufe S^e ; und zwar gelangt man zu diesen Reihen sowohl, wenn man, wie ursprünglich (*Clebsch****), ausgeht von Formen mit beliebig vielen Reihen p_e , als auch wenn man ausgeht von Formen, die nur beliebig viele kogrediente Reihen x enthalten, nach dem Vorgang von *F. Deruyts* und *A. Capelli*†). Eine symbolische Darstellung, die die Reihen p_e , S^e explizit††) enthielte, existiert nun nicht; es ist nötig, die p_e, S^e in die einzelnen Reihen x und die dazu kontragredienten s aufzulösen und diese in verschiedene Determinanten zu verteilen. Nun läßt sich allerdings mittels Differentialbedingungen (vgl. Formel (19.)) verifizieren, daß ein gegebenes Determinantenaggregat die Eigenschaft besitzt, nur von den Reihen p_e, S^e abzuhängen; ein Überblick aber über die Gesamtheit der invarianten Bildungen und über die Prozesse zu ihrer Erzeugung läßt sich auf diese Art nicht gewinnen†††).

Wir zeigen nun in §§ 2 und 6, wie man unter Anwendung des „Satzes von den korrespondierenden Matrizen“††) den ersten Fundamentalsatz in seiner Allgemeinheit wieder erhält, indem man die Darstellung

*) *P. Gordan*, über das Formensystem binärer Formen. S. 46. (Leipzig, Teubner, 1875).

**) Für die Bezeichnung vgl. § 1.

***) *A. Clebsch*, über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. (Abh. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. XVII, 1872).

†) Vgl. *A. Capelli*, Lezioni sulla teoria delle forme algebriche (Napoli 1902), § 22—24, und die dort angeführte Literatur.

††) Genauere Definition der „expliziten Darstellung“ in § 2.

†††) Auch eine von Herrn *Study* herrührende rechnerisch sehr wertvolle Weiterbildung der Symbolik (mitgeteilt von *F. Engel*, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1900, S. 126, und für das quaternäre Gebiet von *E. Study*, Geometrie der Dynamen, S. 135) ist keine explizite Darstellung in unserm Sinne. Sie dürfte z. B. schwerlich zu den *unsymbolischen* Differentiationsprozessen zur Erzeugung der Formen führen.

*†) Abgesehen von *Graßmanns* Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 112 zuerst bei *A. Brill*, über zwei Berührungsprobleme, § 2 (Math. Ann. Bd. 4. 1871).

durch Determinanten ersetzt durch eine Darstellung durch „Matrizenprodukte“. In § 2 wird gezeigt, daß ein jedes die Reihen S^e, p_e explizit enthaltende Matrizenprodukt eine invariante Bildung der Grundform ist; die in § 6 gegebene Umkehrung, daß sich jede invariante Bildung explizit durch Matrizenprodukte darstellen läßt, gelingt erst durch Übertragung des zweiten Fundamentalsatzes (§§ 3–5).

Dieser Satz ist bekannt für Formen, die nur Variablenreihen x enthalten*). Das allgemeine Problem, die Gesamtheit der unzerlegbaren Identitäten aufzustellen, bei denen alle Reihen S^e, p_e als unzerlegbar betrachtet werden, ist von Herrn Study formuliert**); er sieht zugleich in der Anzahl der auftretenden Identitäten ein Maß für die Schwierigkeit der Methoden im n -ären Gebiet. Indem es nun gelingt, die Gesamtheit der Identitäten in eine einzige Formel (36.) zusammenzufassen, ist diese Schwierigkeit wenigstens auf ein Mindestmaß herabgedrückt. Bei der Anwendung werden allerdings häufig gewisse ausgezeichnete Spezialfälle von (36.) auftreten, wie (20.), (21.), die dadurch charakterisiert sind, daß sie die explizite Darstellung zulassen, ohne Substitution neuer Reihen; oder Formel (31.), die als „Zerlegungsidentität“ bezeichnet wird, da eine Reihe p_e scheinbar in die Reihen y zerlegt auftritt.

Auf den beiden Fundamentalsätzen läßt sich nun leicht die weitere Theorie aufbauen. Der erste Satz gibt direkt die Prozesse zur Erzeugung der Formen, den symbolischen Faltungsprozeß und die unsymbolischen Differentiationsprozesse***), während die Zerlegungsidentität unter diesen Prozessen alle äquivalenten ausschaltet (§ 6). Die Kenntnis der Differentiationsprozesse ergibt weiter die Übertragung des Begriffes der „Normal-

*) E. Pascal, Giorn. di mat. 26 (1888), S. 33, 102; Rendic. d. Accad. d. Linc. (4) 4 (1888), S. 119; ib. Mem. (4) 5 (1888), S. 375.

**) „Methoden . . .“, S. 204, Anmerkung 17).

***)) In der Arbeit „Invariante Gebilde von Nullsystemen“ (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. Wien, Bd. 97, Abt. II a, 1888) ist Herr Mertens auf anderem, nicht direkt verallgemeinerungsfähigem Wege zum quaternären Faltungsprozeß gelangt. Die dort auftretende alternierende Invariante von 6 Reihen S^2 unterscheidet sich von der bei uns bei einmaliger Anwendung der Substitution (11.) entstehenden durch ein Aggregat gerader Invarianten. Für einen Spezialfall findet sich der quaternäre Faltungsprozeß auch bei Herrn P. Gordan, Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen (Math. Ann. Bd. 56. 1903).

form“ auf das n -näre Gebiet, und mittels eines im quaternären Gebiet von Herrn *Mertens**) angegebenen Beweisverfahrens den Satz, daß sich ein System von invarianten Bildungen ersetzen läßt durch ein äquivalentes System von Normalformen (§ 7). Unter dieser letzteren Voraussetzung habe ich in meiner Dissertation**) gezeigt, daß sich der ternäre Faltungsprozeß erzeugen läßt durch sukzessive Anwendung von zwei Grundfaltungen. Auf Grund dieses Satzes und der Theorie der Reihenentwicklung habe ich dann unter Einführung des Begriffes der „Formenreihe“ die hauptsächlichsten Reduktionssätze für Formensysteme entwickelt. Ganz analog läßt sich im n -nären Gebiet der Faltungsprozeß aus $n-1$ Grundfaltungen erzeugen (§ 8) und lassen sich die Reduktionssätze aufstellen (§ 9).

Nachbemerkung. Gelegentlich der Salzburger Mitteilung wurde ich durch Herrn Prof. *E. Müller*, Wien, darauf aufmerksam gemacht, daß das dieser Arbeit zugrundeliegende Rechnen mit Matrizenprodukten im Prinzip identisch ist mit dem Kalkül von *Graßmanns* Ausdehnungslehre***). In der Tat läßt sich *Graßmanns* „kombinatorisches Produkt“ $[S^{e_1} S^{e_2} \dots S^{e_i}]$ auffassen als eine durch diese Reihen gegebene Matrix (vgl. § 2), und zwar das „progressive Produkt“ als die Matrix der Reihen selbst, das „regressive“ als die Matrix der zugeordneten Reihen $S_{n-e_1}, S_{n-e_2}, \dots, S_{n-e_i}$, während die dem „gemischten Produkt“ entsprechende Matrix entsteht, indem man mehrere Reihen S durch die Substitution (9.) zu neuen Reihen P, Q zusammenfaßt. Unsere „zugeordnete Reihe“ entspricht dabei *Graßmanns* „Ergänzung“, unser „Matrizenprodukt“ einem „gemischten Produkt von der Stufenzahl 0“.

Nach dieser Zuordnung wird die in der Ausdehnungslehre 1862, Nr. 113, gegebene Entwicklung identisch mit einer zu unserer Formel (32.) dualistischen Formel. Im Spezialfall $\varphi = 1$ geht (32.) in (17.), die dualistische Formel in (16.) über. Aus diesen Spezialfällen der *Graßmannschen*

*) *F. Mertens*, Über invariante Gebilde quaternärer Formen. (Sitzber. d. Ak. d. Wiss. Wien. Bd. 98. Abt. IIa. 1889.)

**) Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form. (Dieses Journal, Bd. 134. 1908.)

***) *Hermann Graßmanns* gesammelte mathematische und physikalische Werke. Ersten Bandes zweiter Teil: Die Ausdehnungslehre von 1862. In Gemeinschaft mit *H. Graßmann d. Jüngeren* herausgegeben v. *Fr. Engel* (Leipzig, Teubner 1896).

Entwicklung hat neuerdings Herr Müller*) die oben erwähnten Identitäten (20.), (21.) abgeleitet.

Unsere Ableitung gibt im Unterschied von der *Graßmann-Müllerschen* zugleich den Nachweis der *Vollständigkeit* der Identitäten, was für die hier in Betracht kommenden Fragen als das Wesentlichste erscheint, und sie geht von (20.), (21.) weiter zu den allgemeinsten unzerlegbaren Identitäten (36.), die bis jetzt noch nicht bemerkt zu sein scheinen.

§ 1. Bezeichnungen und Definitionen. Zusammenfassung bekannter Resultate.

Wir bezeichnen, wie üblich, als Variablenreihe x die Reihe der Elemente $x_1, x_2, \dots, x_n$ und analog als Variablenreihe p_ϱ ($\varrho = 1, 2, \dots, n-1$) die Reihe der $\binom{n}{\varrho}$ Elemente $p_{i_1 i_2 \dots i_\varrho}$, wobei $p_{i_1 i_2 \dots i_\varrho}$ die aus der Matrix der ϱ Reihen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\varrho)}$ gebildeten $\binom{n}{\varrho}$ Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_2}^{(1)} & \dots & x_{i_\varrho}^{(1)} \\ x_{i_1}^{(2)} & x_{i_2}^{(2)} & \dots & x_{i_\varrho}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^{(\varrho)} & x_{i_2}^{(\varrho)} & \dots & x_{i_\varrho}^{(\varrho)} \end{vmatrix} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_\varrho = 1, 2, \dots, n)$$

bedeuten. Nach dem Satze über die korrespondierenden Matrizen**) ist einer jeden Reihe p_ϱ eine zweite $q_{n-\varrho}$ ein-eindeutig zugeordnet durch die für jedes Element der Reihe geltende Beziehung:

$$(1.) \quad p_{i_1 i_2 \dots i_\varrho} = (-1)^{\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} + i_1 + i_2 + \dots + i_\varrho} q_{j_1 j_2 \dots j_{n-\varrho}},$$

worin die i und j unter sich gut geordnet sind und zusammen eine volle Permutation der Zahlen 1 bis n ergeben. Die Reihe $q_{n-\varrho}$ besteht aus den $\binom{n}{\varrho}$ Determinanten $(n-\varrho)$ -ten Grades $q_{j_1 j_2 \dots j_{n-\varrho}}$, die gebildet sind aus der Matrix von $n-\varrho$ den x kontragredienten Reihen $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n-\varrho)}$. Diese Reihen erfüllen die $\varrho \cdot (n-\varrho)$ Bedingungsbeziehungen:

$$(2.) \quad (u^{(k)} | x^{(l)}) = \sum_{\alpha=1}^n u_{\alpha}^{(k)} x_{\alpha}^{(l)} = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, n-\varrho; l = 1, 2, \dots, \varrho)$$

*) E. Müller, Beiträge zur *Graßmannschen* Ausdehnungslehre. 1. Mitteilung: Einige allgemeine Sätze. (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. Wien; Bd. 118. Abt. II a. Juli 1909), Satz 16 und 18.

**) Vgl. etwa: *Gordan-Kerschensteiner*, Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. I, S. 99.

wir wollen sie (mit *Clebsch**) so normiert annehmen, daß der in (1.) sonst eingehende Proportionalitätsfaktor gleich Eins gesetzt ist.

Die allgemeinsten Formen lassen sich nach *Clebsch***) (und ebenso nach den späteren Untersuchungen von *F. Deruyts* und *A. Capelli*, vgl. Einleitung) zurückführen auf solche, die von jeder der $n-1$ Reihen p_e höchstens eine enthalten, die sich also symbolisch folgendermaßen darstellen lassen:

$$(3.) \quad (S^1|p_1)^{m_1}(S^2|p_2)^{m_2}\dots(S^{n-1}|p_{n-1})^{m_{n-1}},$$

wobei wir in Analogie mit (2.) gesetzt haben:

$$(S^e|p_e) = \sum S^{i_1 i_2 \dots i_e} p_{i_1 i_2 \dots i_e}.$$

Die Symbolreihen S^e lassen sich infolge der zwischen den Elementen einer Reihe p_e bestehenden nichtlinearen identischen Beziehungen so normieren, daß sie ebendenselben Identitäten genügen, daß sie sich also verhalten wie die Determinanten einer ϱ -reihigen Matrix, deren Reihen $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(e)}$ zu den x kontragredient sind***). Es läßt sich also einer jeden Reihe S^e eine andere S_{n-e} ein-eindeutig zuordnen durch die Beziehung:

$$(4.) \quad S_{i_1 i_2 \dots i_{n-e}} = (-1)^{\frac{(n-e)(n-e+1)}{2} + i_1 + i_2 + \dots + i_{n-e}} S^{j_1 j_2 \dots j_e},$$

wo wieder die i und j unter sich gut geordnet sind und zusammen die Zahlen 1 bis n gerade erschöpfen. Die Elemente $S_{i_1 i_2 \dots i_{n-e}}$ der Reihe S_{n-e} verhalten sich wie die aus $(n-e)$ — den x kogredienten — Reihen $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots, \sigma^{(n-e)}$ gebildeten Determinanten, und die Reihen s und σ sind durch die $\varrho \cdot (n-e)$ Bedingungen verknüpft:

$$(5.) \quad (s^{(k)}|\sigma^{(l)}) = 0. \quad (k=1, 2, \dots, \varrho; \quad l=1, 2, \dots, n-e)$$

Infolge der Beziehungen (1.) und (4.) ist ein jeder Faktor von (3.) der äquivalenten vierfachen symbolischen Darstellung fähig:

$$(6.) \quad (S^e|p_e) = (S^e q_{n-e}) = (S_{n-e} p_e) = (-1)^{e(n-e)} (q_{n-e} | S_{n-e})^{\dagger},$$

wobei, wie stets im folgenden, $(S^e q_{n-e})$ und $(S_{n-e} p_e)$ abkürzend für die Determinanten $(s^{(1)} \dots s^{(e)} u^{(1)} \dots u^{(n-e)})$ und $(\sigma^{(1)} \dots \sigma^{(n-e)} x^{(1)} \dots x^{(e)})$ gesetzt sind; durch *Laplacesche* Entwicklung erweisen sich diese als nur abhängig von den

*) a. a. O. § 5.

**) a. a. O. § 12.

***) *Clebsch*, a. a. O. § 4.

†) Vgl. *Clebsch*, a. a. O. § 5.

Reihen S^e, q_{n-e} bzw. S_{n-e}, p_e , was die obige Schreibweise andeuten soll. Die Ausdrücke $(S^e|p_e)$ und $(q_{n-e}|S_{n-e})$ bedeuten nach den obigen Ausführungen die Produkte der Matrizen der Reihen s und x , bzw. der Reihen u und σ , wobei unter Matrizenprodukt die Summe über die Produkte entsprechender Determinanten, also der Wert der Determinante der Produktmatrix, verstanden ist.

Die einer Symbol- (bzw. Variabeln-)reihe zukommende charakteristische Zahl $\varrho \cdot (n - \varrho)$ bezeichnen wir nach *Clebsch* als *Gewicht* der Reihe*), die Zahl ϱ , die die Anzahl der Reihen s angibt, als *oberen Gewichtsindex*, die Zahl $n - \varrho$, die die Anzahl der Reihen σ angibt, als *unteren Gewichtsindex*. Aus den Beziehungen (4.) folgt, daß eine Symbolreihe in ein und derselben Relation einmal mit oberem, einmal mit unterem Gewichtsindex auftreten kann; dasselbe gilt für das Auftreten der zusammengehörigen Reihen p_e und q_{n-e} . Es sei noch bemerkt, daß wir allgemein bezeichnen:

Variablenreihen höherer Stufe, deren zugehörige Matrix aus Reihen x besteht, durch p , solche, deren Matrix aus Reihen u besteht, durch q ;
die den x kogredienten Symbolreihen durch kleine griechische Buchstaben: $\sigma, \tau, \alpha, \beta$;

die den u kogredienten Symbolreihen durch kleine lateinische Buchstaben: s, t, a, b ;

alle übrigen Symbolreihen durch große lateinische Buchstaben mit Gewichtsindex: S^σ, T^τ, A^e bzw. $S_{n-\sigma}, T_{n-\tau}, A_{n-e}$.

Entsprechend oberem oder unterem Gewichtsindex schreiben wir auch die einzelnen Elemente einer Reihe mit oberen oder unteren Indizes, wie z. B. in (4.).

§ 2. Darstellung durch Matrizenprodukte.

Wir verstehen im folgenden stets unter „*Matrizenprodukt*“ die Summe über die Produkte entsprechender Determinanten zweier Matrizen von gleicher Reihenzahl, wo die Reihen der zweiten Matrix denjenigen der ersten kontragredient sind. Dabei können die Reihen jeder Matrix: 1. einzeln gegeben sein, 2. wie in (6.) zu einer Reihe S^e zusammengefaßt, 3. zu verschiedenen Reihen $S^{e_1}, S^{e_2} \dots$ vereinigt sein. Bezeichnet soll das Matrizenprodukt durch das in (6.) angewandte Symbol $(\quad)$ werden. Die Dar-

*) a. a. O. § 11.

stellung (6.) ist eine spezielle Anwendung einer zweiten Fassung des Satzes über die korrespondierenden Matrizen: „*Einem jeden ϱ -reihigen Matrizenprodukt $(v^{(1)} v^{(2)} \dots v^{(\varrho)} | y^{(1)} \dots y^{(\varrho)})$ ist eine Determinante zugeordnet; und umgekehrt läßt sich jeder Determinante ein Matrizenprodukt von vorgegebener Reihenanzahl ϱ ($\varrho = 1, 2, \dots, n-1$) zuordnen*“*). In der Tat hat man nur die Reihen y zu einer Reihe p_ϱ zusammenzufassen (bzw. die Reihen v zu einer Reihe q_ϱ) und die durch (1.) gegebenen Substitutionen auszuführen, um bei gegebenem Matrizenprodukt zur Determinante zu gelangen und umgekehrt. Der Wert der Determinante ist dabei allerdings nicht durch ihre einzelnen Elemente gegeben, sondern ergibt sich erst durch Laplacesche Entwicklung. Da sich also Determinante und Matrizenprodukt als äquivalent erweisen, drückt sich der Satz von der symbolischen Darstellbarkeit der Formen (erster Fundamentalsatz) auch so aus:

Satz I: „Alle invarianten Bildungen lassen sich symbolisch durch Matrizenprodukte darstellen, und umgekehrt sind alle Matrizenprodukte invariante Bildungen“**).

Die Darstellung durch Matrizenprodukte erlaubt, die durch die Determinantendarstellung bedingte wesentliche Schwierigkeit der nicht expliziten Darstellung zu überwinden***). Wir verstehen dabei unter „*expliziter Darstellung*“ eine solche, in die nur die Reihen $S^\sigma, T^\tau, \dots$ selbst eingehen, oder eindeutig aus diesen ableitbare Reihen R^σ , in der aber die einzelnen Teilreihen $s, t, \dots$ nicht mehr auftreten. Wir werden in § 6 für alle invarianten Bildungen, die nur von den Symbolreihen $S^\sigma, T^\tau, \dots$ abhängen, eine in diesen Symbolreihen explizite Darstellung erhalten, und damit die Übertragung der erzeugenden Prozesse, Faltungsprozeß und Differentiationsprozesse, auf das n -näre Gebiet. Die Möglichkeit der expliziten Darstellung erhellt daraus, daß nur die einfachsten Matrizenprodukte gerade den bei der Determinantendarstellung auftretenden Determinanten zugeordnet werden können, daß also alle übrigen Matrizenprodukte Zusammenfassungen verschiedener Determinanten zu einem einzigen Ausdruck

*) Für $\varrho > n$ verschwindet bekanntlich das Matrizenprodukt; für $\varrho = n$ geht es in das Produkt zweier Determinanten über.

**) Invariante Bildungen vorgegebener Grundformen sind natürlich nur solche Aggregate von Matrizenprodukten, die von den Symbolreihen $S^\sigma \dots$ abhängen.

***) Vgl. die Einleitung.

sind. Denn löst man die Symbol- und Variablenreihen in die einzelnen Reihen s, u, x auf, so muß nach dem ersten Fundamentalsatz in seiner gewöhnlichen Form notwendig ein Aggregat von Determinanten entstehen. Der Beweis dafür, daß umgekehrt alle Determinantenaggregate, die invariante Bildungen vorgegebener Grundformen darstellen, sich zu expliziten Matrizenprodukten zusammenfassen lassen, ergibt sich unter Benutzung des zweiten Fundamentalsatzes (§ 6).

Um nun aus zwei Symbolreihen S^σ, T^τ unter Zuhilfenahme von Variablenreihen eine alle Reihen explizit enthaltende invariante Bildung der Grundform $(S^\sigma | p_\sigma)(T^\tau | p_\tau)$ zu erhalten (*Faltungsprozeß*), haben wir nur ein Matrizenprodukt dritter Art nach der am Anfang des Paragraphen gegebenen Definition zu bilden:

$$(7.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}). \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \tau, n-\sigma)^*$$

Entwickelt gibt (7.):

$$(8.) \quad \begin{aligned} & (v^{(1)} \dots v^{(n-\sigma-\lambda)} s^{(1)} \dots s^{(\sigma)} | \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(n-\tau)} y^{(1)} \dots y^{(\tau-\lambda)}) \\ &= \sum \begin{vmatrix} v_{i_1}^{(1)} & \dots & v_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{i_1}^{(n-\sigma-\lambda)} & \dots & v_{i_{n-\lambda}}^{(n-\sigma-\lambda)} \\ s_{i_1}^{(1)} & \dots & s_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{i_1}^{(\sigma)} & \dots & s_{i_{n-\lambda}}^{(\sigma)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{i_1}^{(1)} & \dots & \alpha_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_1}^{(n-\tau)} & \dots & \alpha_{i_{n-\lambda}}^{(n-\tau)} \\ y_{i_1}^{(1)} & \dots & y_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{i_1}^{(\tau-\lambda)} & \dots & y_{i_{n-\lambda}}^{(\tau-\lambda)} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i, k, l} \varepsilon q_{k_1 k_2 \dots k_{n-\sigma-\lambda}} S^{k_{n-\sigma-\lambda}+1 \dots k_{n-\lambda}} T_{l_1 \dots l_{n-\tau}} p_{i_{n-\tau+1} \dots i_{n-\lambda}}, \end{aligned}$$

d. h. einen nur von den Reihen S, T, q, p abhängigen Ausdruck. Es ist dabei $\varepsilon = \pm 1^{**}$) und die Summe so zu verstehen, daß die Indizes einer jeden Reihe $S \dots$ unter sich gut geordnet sind, und für jede Kombination $i_1 i_2 \dots i_{n-\lambda}$ die k sowohl wie die l einzeln alle dann noch möglichen Permutationen der Zahlen i durchlaufen.

Die in (7.) eingehende Zahl λ bezeichnen wir als *Defekt der Faltung* im Falle $\sigma > \tau$; der Grund dieser letzteren Einschränkung ergibt sich in § 6.

Die Determinanten der beiden in (7.) eingehenden Matrizen lassen sich als Elemente neuer Reihen $Q^{n-\lambda}, P_{n-\lambda}$ betrachten, deren zugeordnete

*) Die Zahl λ läuft stets bis zu der kleineren der beiden zuletzt angegebenen Zahlen.

**) Diese Bezeichnung soll durchweg beibehalten werden.

Q_λ, P^λ seien. Diese Reihen Q, P lassen sich nach (8.) durch die ursprünglichen S und q , bzw. T und p ausdrücken. Wir deuten dies an durch die Gleichungen:

$$(9.) \quad \begin{aligned} q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma &= Q^{n-\lambda} \hookrightarrow Q_\lambda, \text{ oder auch } Q_\lambda = [q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma]_\lambda, \\ T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda} &= P^{n-\lambda} \hookrightarrow P^\lambda, \text{ oder auch } P^\lambda = [T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}]^\lambda. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (4.) gilt dann, analog (6.), für das Matrizenprodukt (7.) die äquivalente vierfache symbolische Darstellung:

$$(10.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) = (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma P^\lambda) = (Q_\lambda T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) = (-1)^\lambda (n-\lambda) (P^\lambda | Q_\lambda).$$

Eine weitere Substitution neuer Reihen läßt sich an (7.) vornehmen, indem man setzt:

$$(11.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) = (R^{\sigma+\lambda} | p_{\sigma+\lambda}) (R^{\tau-\lambda} p_{\tau-\lambda}).$$

Auch hier zeigt (8.), daß die Produkte der Elemente der Reihen R sich eindeutig durch die Reihen S und T ausdrücken lassen. Die Substitutionen (9.) und (11.) werden insbesondere dann anzuwenden sein, wenn mit (7.) eine weitere Faltung mit anderen Reihen vorgenommen wird.

Die Matrizendarstellung setzt uns instand, die quadratischen Relationen zwischen den Elementen einer Reihe p_ϱ (aus denen bekanntlich alle übrigen folgen), also nach § 1 die in den Koeffizienten der Grundform linearen Beziehungen, denen die Reihen S^e genügen, invariant aufzustellen. Es sind die Identitäten:

$$(12.) \quad (q_{n-\varrho-\lambda} S^e | S_{n-\varrho} p_{\varrho-\lambda}) = 0^*, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \varrho, n-\varrho)$$

wo die p und q als willkürliche Größen zu betrachten sind.

Wir werden in § 5 sehen, daß die Identitäten mit ungerader Defektzahl λ eine Folge derjenigen von höherem Defekt sind. Die Beziehungen (12.) sind eine direkte Folge der Relationen (5.); denn man hat:

$$(q_{n-\varrho-\lambda} S^e | S_{n-\varrho} p_{\varrho-\lambda}) = (v^{(1)} \dots v^{(n-\varrho-\lambda)} s^{(1)} \dots s^{(\varrho)} | \sigma^{(1)} \dots \sigma^{(n-\varrho)} y^{(1)} \dots y^{(\varrho-\lambda)}),$$

und die Anwendung des Produktsatzes gibt infolge von (5.) eine verschwindende $(n-\lambda)$ -reihige Determinante. Die Identitäten (12.) sagen aus, daß es zur Aufsuchung aller Typen von Faltungen genügt, das Produkt von in jeder Variablenreihe linearen Formen zu falten; oder auch, nach § 6, daß die normierte Form $(S^e | p_\varrho)^m$ keine in den Koeffizienten lineare invariante Bildung besitzt.

*) Vgl. einen Nachtrag von Study in Graßmanns Werken, ersten Bandes zweiter Teil, S. 510 (Bedingung, daß eine Größe S^e einfach ist).

Die Bedingungen (12.) sind auch *hinreichend* zur Charakterisierung der Reihen p_e . Da nämlich die Eigenschaft, daß die einzelnen Elemente von p_e Determinanten einer Matrix sind, eine invariante ist, muß sie sich auch invariant ausdrücken lassen; die Bedingungen (12.) stellen aber nach Satz VI die größtmögliche invariante Einschränkung für die p_e dar, nämlich die, daß die aus der Reihe p_e als Koeffizienten gebildete Linearform überhaupt keine invarianten Bildungen besitzt.

§ 3. Die symbolischen Identitäten*).

Wir haben nun den zweiten Fundamentalsatz der symbolischen Methode zu übertragen, nämlich die Gesamtheit der irreduziblen unzerlegbaren Identitäten aufzustellen, bei denen alle Reihen S^e, p_e als unzerlegbar angesehen werden. Wir setzen dabei noch folgendes fest: Entsprechend der Bedeutung von Symbol- und Variablenreihen sollen solche Identitäten als zusammengesetzt betrachtet werden, die entstehen, wenn man die Variablenreihe p_e zu $p_{e-1}y$ spezialisiert und auf die entstehenden Ausdrücke eine der Identitäten des Systems anwendet; während andererseits Identitäten, die k Symbolreihen enthalten, als unzerlegbar gelten sollen, auch wenn sie durch den obigen Prozeß aus Identitäten mit weniger Symbolreihen hervorgehen. Die Reihen S^e, p_e brauchen nicht notwendig explizit in die Identitäten einzugehen; zu ihrer Auffassung als unzerlegbare Größen genügt der Nachweis, daß die auftretenden Matrizenprodukte nur von diesen Reihen abhängen. Wir werden aber zeigen, daß in diesem Falle, teilweise unter Anwendung der Substitution (11.), sich stets eine explizite Darstellung erzielen läßt. Die allgemeinen Identitäten erhalten wir mittels des Prinzips der Matrizendarstellung aus den von Herrn *Pascal* gegebenen speziellen, die nur Reihen x und u enthalten und eine direkte Übertragung der von Herrn *Study* für das ternäre Gebiet gegebenen darstellen:

$$(13.) \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (a^{(i)} | x) (a^{(1)} \dots a^{(i-1)} a^{(i+1)} \dots a^{(n)} u) = (-1)^{n+1} (u | x) (a^{(1)} \dots a^{(n)}),$$

$$(14.) \sum \pm (a^{(1)} | x^{(1)}) (a^{(2)} | x^{(2)}) \dots (a^{(n)} | x^{(n)}) = (a^{(1)} \dots a^{(n)}) (x^{(1)} \dots x^{(n)}),$$

$$(15.) \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (u | a^{(i)}) (a^{(1)} \dots a^{(i-1)} a^{(i+1)} \dots a^{(n)} x) = (-1)^{n+1} (u | x) (a^{(1)} \dots a^{(n)}).$$

*) Für Formulierung und Literatur der Aufgabe vgl. die Einleitung.

Zwei weitere Identitäten gehen aus (13.) und (15.) durch die Substitutionen $(a^{(i)}|x) = (a^{(i)}q_{n-1})$, bzw. $(u|\alpha^{(i)}) = (p_{n-1}\alpha^{(i)})$ hervor, sind also nach unserer Auffassung nicht als wesentlich verschieden zu betrachten. (14.) stellt den Produktsatz für Determinanten dar; wir wollen zeigen, wie man (13.) und (14.) (und dualistisch (15.) und (14.)) ersetzen kann durch das System der in geeigneter Weise gebildeten Produktsätze für Matrizen. Der Produktsatz, einmal für ϱ -reihige, einmal für $(\varrho-1)$ -reihige Matrizen gebildet; lautet:

$$(a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(e)}|xp_{e-1}) = (a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(e)}|xy^{(2)}\dots y^{(e)}) = \Sigma \pm (a^{(1)}|x)(a^{(2)}|y^{(2)})\dots(a^{(e)}|y^{(e)}),$$

$$\Sigma \pm (a^{(2)}|y^{(2)})\dots(a^{(e)}|y^{(e)}) - (a^{(2)}\dots a^{(e)}|y^{(2)}\dots y^{(e)}) = (a^{(2)}\dots a^{(e)}|p_{e-1}) = (a^{(2)}\dots a^{(e)}|q_{n-\varrho+1});$$

und daraus folgt das System von Produktsätzen, wo $\varrho = 2, 3, \dots, n$:

$$(16.) \quad (a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(e)}|xp_{e-1}) = \sum_{i=1}^e (-1)^{i+1} (a^{(i)}|x) (a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(e)}|p_{e-1})$$

$$= \sum_{i=1}^e (-1)^{i+1} (a^{(i)}|x) (a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(e)}|q_{n-\varrho+1})^*.$$

Für $\varrho = n$ geht (16.) in (13.) über; spezialisieren wir weiter: $p_{n-1} = y^{(2)}p_{n-2}$, $p_{n-2} = y^{(3)}p_{n-3}$ usf., und wenden die Identitäten (16.) auf die Ausdrücke $(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(n)}|y^{(2)}p_{n-2})$, $(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(k-1)}a^{(k+1)}\dots a^{(n)}|y^{(3)}p_{n-3})$ usf. an, so gelangen wir von (13.) zu (14.). Die Identität (14.) ist also nach unserer Definition aus den Identitäten (16.) zusammengesetzt; oder das System (16.) ist den Identitäten (13.) und (14.) äquivalent. Das System (16.) erfüllt eine der für die allgemeinen Identitäten geforderten Bedingungen; es enthält die Reihe p_{e-1} als unzerlegbare Größe und zugleich in expliziter Form. Es ist das einzige System, das diese und nur diese Forderung erfüllt. Denn wir können aus den Reihen a, x, p keine weiteren Determinanten oder Matrizenprodukte bilden; zwischen diesen können aber keine von (16.) unabhängigen Relationen bestehen, da sonst durch Elimination von $(a^{(1)}\dots a^{(e)}|xp_{e-1})$ eine Relation zwischen ϱ ($\varrho \leq n$) Ausdrücken $(a^{(i)}|x)(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(e)}|q_{n-\varrho+1})$ entstände, nach (13.) aber mindestens $n+1$ solcher Ausdrücke in eine Relation eingehen müssen. Aus analogen Betrachtungen ergibt sich das (15.) und (14.) äquivalente System:

*) Die Identitäten (16.) lassen sich auch auffassen als die aus dem Gebiet von ϱ Variablen übernommenen Identitäten (13.).

$$(17.) \quad (u q_{e-1} | \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(e)}) = \sum_{i=1}^e (-1)^{i+1} (u | \alpha^{(i)}) (q_{e-1} | \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(i-1)} \alpha^{(i+1)} \dots \alpha^{(e)}) \\ = \sum_{i=1}^e (-1)^{i+1} (u | \alpha^{(i)}) (p_{n-e+1} \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(i-1)} \alpha^{(i+1)} \dots \alpha^{(e)}).$$

Um von (16.) zu Identitäten zwischen beliebigen Reihen $A^{e_1}, B^{e_2}, \dots, x, p$ zu gelangen, bedenken wir, daß diese Identitäten mit (16.) identisch werden müssen, sobald wir auflösen: $A^{e_1} = a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(e_1)}$, $B^{e_2} = b^{(1)} b^{(2)} \dots b^{(e_2)}$ usf., und daß sie sich auch nur durch die durch (16.) bestimmten Operationen zu Schlußausdrücken zusammenfassen lassen, sobald die einzelnen Ausdrücke vom Typus der in (16.) eingehenden sind. Wir erhalten so, wenn wir noch

$$(18.) \quad e = e_1 + e_2 + \dots + e_k \leq n$$

setzen:

$$(a^{(1)} \dots a^{(e_1)} b^{(1)} \dots b^{(e_2)} \dots k^{(1)} \dots k^{(e_k)} | x p_{e-1}) = (A^{e_1} B^{e_2} \dots K^{e_k} | x p_{e-1}) \\ = \sum_{i=1}^{e_1} (-1)^{i+1} (a^{(i)} | x) (a^{(1)} \dots a^{(i-1)} a^{(i+1)} \dots a^{(e_1)} B^{e_2} \dots K^{e_k} q_{n-e+1}) \\ + (-1)^{e_1 e_2} \sum_{i=1}^{e_2} (-1)^{i+1} (b^{(i)} | x) (b^{(1)} \dots b^{(i-1)} b^{(i+1)} b^{(e_2)} A^{e_1} \dots K^{e_k} q_{n-e+1}) \\ \vdots \\ + (-1)^{(e_1 + \dots + e_{k-1}) e_k} \sum_{i=1}^{e_k} (-1)^{i+1} (k^{(i)} | x) (k^{(1)} \dots k^{(i-1)} k^{(i+1)} \dots \\ k^{(e_k)} A^{e_1} \dots (K-1)^{e_{k-1}} q_{n-e+1}).$$

Jede einzelne Summe (aber nicht schon ein Teil der Summe) enthält nun in der Tat die Reihen $A^{e_1}, B^{e_2} \dots$ als unzerlegbare Größe; denn sie erfüllt die dazu notwendigen und hinreichenden Bedingungen*):

$$(19.) \quad (a^{(i+1)} | \frac{\partial}{\partial a^{(i)}}) = 0; \dots (k^{(j+1)} | \frac{\partial}{\partial k^{(j)}}) = 0. \quad (i=1, 2, \dots, e_1-1; \quad j=1, 2, \dots, e_k-1)$$

Wir zeigen, daß sie alle Reihen auch explizit enthält. Denn setzen wir $B^{e_2} \dots K^{e_k} q_{n-e+1} = q_{n-e_1+1}$, so kommt nach (16.) und (10.):

$$\sum (-1)^{i+1} (a^{(i)} | x) (a^{(1)} \dots a^{(i-1)} a^{(i+1)} \dots a^{(e_1)} q_{n-e_1+1}) = (A^{e_1} | x p_{e_1-1}) \\ = (A_{n-e_1} x p_{e_1-1}) = (-1)^{(e_1+1)(n+1)} (q_{n-e_1+1} | A_{n-e_1} x) \\ = (-1)^{(e_1+1)(n+1)} (B^{e_2} \dots K^{e_k} q_{n-e+1} | A_{n-e_1} x).$$

*) Capelli, a. a. O. § 23, gibt hinreichende Bedingungen:

$$(a^{(k)} | \frac{\partial}{\partial a^{(i)}}) = 0. \quad (k > i, \quad i=1, 2, \dots, e_1-1)$$

Daraus folgen am einfachsten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen durch Anwendung des Poissonschen Klammerprozesses nach Wellstein, Von den Differentialgleichungen der projektiven Invarianten, Math. Ann. 67 (1909) § 3.

Berechnen wir analog die übrigen Summen und setzen nachträglich, da die Reihen durch die Gewichtsindizes schon als verschieden charakterisiert sind, $B^{e_1} = A^{e_2}$, $C^{e_3} = A^{e_2}$, ..., so erhalten wir die gewünschten Identitäten:

$$(20.) \quad \begin{aligned} & (A^{e_1} A^{e_2} \dots A^{e_k} | x p_{e-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{\delta_i} (A^{e_1} \dots A^{e_{i-1}} A^{e_{i+1}} \dots A^{e_k} q_{n-e+1} | A_{n-e_i} x), \\ & \delta_i = (e_1 + e_2 + \dots + e_{i-1}) e_i + (e_i + 1)(n + 1), \end{aligned}$$

und aus (17.) die dualistischen:

$$(21.) \quad \begin{aligned} & (u q_{\sigma-1} | A_{\sigma_1} A_{\sigma_2} \dots A_{\sigma_k}) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{\varepsilon_i} (u A^{n-\sigma_i} | p_{n-\sigma+1} A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_{i-1}} A_{\sigma_{i+1}} \dots A_{\sigma_k}), \\ & \varepsilon_i = (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{i-1}) \sigma_i + (\sigma_i + 1)(n + \sigma). \end{aligned}$$

Satz II. Mit (20.) und (21.) ist die Gesamtheit der unzerlegbaren Identitäten zwischen den Reihen A^i, x, p , bzw. A_{σ_i}, u, q erschöpft, und zugleich die Gesamtheit derjenigen unzerlegbaren Identitäten, die explizite Darstellung ohne Vornahme der Substitution (11.) zulassen.

Der erste Teil des Satzes ergibt sich aus den Betrachtungen zur Ableitung von (20.) und (21.); der zweite Teil aus der Unmöglichkeit einer Identität zwischen zwei Symbolreihen: $(q_e A^{\sigma} | B_{e+\sigma-\tau} p_{\tau}) = \varepsilon_1 (q_e B^{n-e-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau}) + \varepsilon_2 (q_e q_{n-\tau} | B_{e+\sigma-\tau} A_{n-\sigma})$, wo $e \leq \tau \leq \sigma$ und keine der Reihen vom Gewicht $1 \cdot (n-1)$ ist. (Andere Annahmen über e, τ, σ lassen sich durch Vertauschen der Reihenbezeichnungen auf diese zurückführen.) Diese Unmöglichkeit folgt z. B. durch Entwicklung (8.) bei der Spezialisierung $q_e = l M^{e-1}$, $q_{n-\tau} = l N^{n-\tau-1}$, wenn man $l_1 = 1$; $M^{2,3,\dots,e} = 1$; $A^{e+1,\dots,e+\sigma} = 1$, alle anderen Elemente der Reihen l, M, A gleich Null setzt, während N und B beliebig sind. Da nun Identitäten zwischen beliebigen Reihen durch Auflösen einer Reihe p_{τ} in $y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(\tau)}$ in solche übergehen, die aus (20.) zusammengesetzt sind, ist der zweite Teil der Behauptung fertig bewiesen, sobald sich (20.) aus Identitäten mit nur zwei Symbolreihen erzeugen läßt. Man erhält in der Tat aus

$$(20^a.) \quad (A^{e_1} A^{e_2} | x p_{e-1}) = \varepsilon (A^{e_1} q_{n-e+1} | A_{n-e_2} x) + (A^{e_2} | x p_{e_1-1}),$$

wo $p_{e_1-1} \hookrightarrow A^{e_2} q_{n-e+1}$,

durch die Spezialisierung $A^{e_1} = B^{\sigma_1} B^{\sigma_2}$, d. h. durch

$(B^{\sigma_1} B^{\sigma_2} | x p_{e_1-1}) = \varepsilon (B^{\sigma_1} q_{n-e_1+1} | B_{n-\sigma_2} x) + (B^{\sigma_1} | x p_{\sigma_1-1})$, wo $p_{\sigma_1-1} \hookrightarrow B^{\sigma_2} q_{n-e_1+1}$, eine Identität (20.) in drei Symbolreihen; und durch weitere Spezialisierungen von $B^{\sigma_1} = C^{\tau_1} C^{\tau_2}$ usf. die allgemeinen Identitäten (20.). Die Nicht-

existenz der expliziten Darstellung einer Identität zwischen zwei Symbolreihen und zwei beliebigen Variablenreihen läßt somit auf die Nichtexistenz bei beliebig viel Symbolreihen schließen, wenn unter den Variablenreihen keine Reihe x oder u enthalten ist.

§ 4. Die Zerlegungsidentitäten.

Wir betrachten nun den allgemeinsten Fall der Identitäten zwischen beliebigen Symbol- und Variablenreihen, in deren Schlußausdrücken ohne Vornahme der Substitution (11.) eine Reihe p_τ in ihre einzelnen Reihen $y^{(1)} \dots y^{(\tau)}$ zerlegt auftritt, und bezeichnen diese Identitäten als „Zerlegungsidentitäten.“ Im Anschluß an die Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen bestimmen wir sie vorerst für den Fall nur zweier Symbolreihen, entwickeln also den Ausdruck $(q_\varrho A^\sigma | B_{\varrho+\sigma-\tau} p_\tau)$. Wir setzen dabei:

$$(22.) \quad q_{\varrho-a}^{(i_1 \dots i_a)} \hookrightarrow p_{n-\varrho} y^{(i_1)} \dots y^{(i_a)}; \quad p_{\tau-a}^{(i_1 \dots i_a)} = y^{(i_{a+1})} \dots y^{(i_\tau)}; \quad p_\tau = y^{(1)} \dots y^{(\tau)}.$$

Inbezug auf die Zahlen ϱ, σ, τ sind vier Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{array}{llll} 1) \quad \varrho + \sigma \leq n & 2) \quad \varrho + \sigma \leq n & 3) \quad \varrho + \sigma \leq n & 4) \quad \varrho + \sigma \leq n \\ \tau \leq \varrho & \tau \geq \varrho & \tau \leq \varrho & \tau \geq \varrho \\ \tau \leq \sigma & \tau \leq \sigma & \tau \geq \sigma & \tau \geq \sigma \end{array},$$

von denen wir den ersten herausgreifen wollen, um danach die übrigen kurz zu charakterisieren. Nach (20.), (10.) und (9.) kommt, wenn wir die Reihe $y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}$ in $y^{(1)}$ und $y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}$ zerlegen:

$$(23.) \quad (q_\varrho A^\sigma | y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}) = (q_{\varrho-1}^{(1)} A^\sigma | y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}) + (-1)^\varrho (q_\varrho [A_{n-\varrho} y^{(1)}]^{\sigma-1} | y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}).$$

Das letzte Glied in (23.) hat nun genau die Form des ursprünglichen Ausdrucks — es ist nur σ durch $\sigma-1$, τ durch $\tau-1$ ersetzt — läßt also wieder die Gleichung (23.) zu. Wir können also, da $\tau \leq \sigma$, die Operation (23.) τ -mal anwenden und gelangen unter Berücksichtigung von (10.) zu der Relation:

$$(24.) \quad (q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) = (-1)^{\varrho\sigma + (\sigma+\tau)(n+1)} (q_\varrho B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\varrho} p_\tau) + \sum_{i_1=1}^{\tau} (-1)^{\varrho(i_1-1)} (q_{\varrho-1}^{(i_1)} [A_{n-\varrho} y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(i_1-1)}]^{\sigma-i_1+1} | y^{(i_1+1)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}).$$

Ein jedes Glied unter dem Summenzeichen ist nun wieder vom Typus des ursprünglichen Ausdrucks; es ist ϱ durch $\varrho-1$, σ durch $\sigma-i_1+1$, τ durch

$\tau - i_1$ ersetzt, die Bedingung 1) also noch stärker erfüllt. Wir können deshalb, da $\tau \leq \varrho$, die Operation (24.) τ -mal anwenden und erhalten die gewünschte Zerlegungsidentität:

$$\begin{aligned}
 (25.) \quad (q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) &= \varepsilon_{i_0} (q_\varrho B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_\tau) \\
 &+ \sum_{i_1=1}^{\tau} \varepsilon_{i_1} (q_{\varrho-1}^{(i_1)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-1}^{(i_1)}) \\
 &+ \sum_{i_2=i_1+1}^{\tau} \varepsilon_{i_2} (q_{\varrho-2}^{(i_1 i_2)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-2}^{(i_1 i_2)}) \\
 &\vdots \\
 &+ \varepsilon_{i_\tau} (q_{\varrho-\tau}^{(i_1 i_2 \dots i_\tau)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma}) \\
 &= \sum_{\alpha=0}^{\tau} \sum_{i_\alpha=i_{\alpha-1}+1}^{\tau} \varepsilon_{i_\alpha} (q_{\varrho-\alpha}^{(i_1 \dots i_\alpha)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-\alpha}^{(i_1 \dots i_\alpha)}).
 \end{aligned}$$

Für den Modul ε ergibt sich aus (24.):

$$\begin{aligned}
 (26.) \quad \varepsilon_{i_\alpha} &= (-1)^{\delta_{i_\alpha}}, \quad \delta_{i_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} (\varrho - \beta + 1) (i_{\beta-1} + i_\beta + 1) \\
 &+ (\varrho - \alpha) (\sigma + i_\alpha + \alpha) + (\sigma + \tau + \alpha) (n + 1),
 \end{aligned}$$

wo $i_0 = 0$ zu setzen ist. Das Summenzeichen in (25.) ist so zu verstehen, daß jeder Kombination $i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1}$, wo $i_1 < i_2 < \dots < i_{\alpha-1}$, alle Werte i_α , für die $i_{\alpha-1} < i_\alpha \leq \tau$, zugefügt werden. Die einzelnen Summen in (25.) genügen, wie man sich unter Berücksichtigung von (26.) leicht überzeugt, den (19.) analogen Differentialgleichungen:

$$(27.) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \middle| y^{(i+1)} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \tau - 1)$$

hängen also nur von der Reihe p_τ ab. Die Zerlegungsidentität ist also eine unzerlegbare Identität zwischen den Reihen A, B, q, p ; auf die explizite Darstellung kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

Im Fall 2) läßt sich die Operation (23.) ebenfalls τ -mal anwenden, die Operation (24.) aber bricht nach dem ϱ -ten Male ab. Es ist also im Schlußausdruck von (25.) das erste Summenzeichen zu ersetzen durch $\sum_{\alpha=0}^{\varrho}$. Im Fall 3) und 4) läßt sich die Operation (23.) nur σ -mal ausführen; an Stelle von (24.) tritt dann die Relation:

$$\begin{aligned}
 (28.) \quad (q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) &= (-1)^{\varepsilon^\sigma} (q_{\varrho-(\tau-\sigma)}^{(\sigma+1 \dots \tau)} B^{n-\varrho+\tau-\sigma} | A_{n-\sigma} p_{\tau-(\tau-\sigma)}^{(\sigma+1 \dots \tau)}) \\
 &+ \sum_{i_1=1}^{\sigma} (-1)^{\varepsilon^{(i_1-1)}} (q_{\varrho-1}^{(i_1)} [A_{n-\sigma} y^{(1)} \dots y^{(i_1-1)}]^{\sigma-i_1+1} | y^{(i_1+1)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau});
 \end{aligned}$$

die $(\tau - \sigma)$ -malige Wiederholung von (28.), wobei das Summenzeichen

in $\sum_{i_\beta=i_{\beta-1}+1}^{\sigma+\beta-1}$ übergeht, — wie die $(\sigma-i_1+1)$ -malige Anwendung von (23.) auf die Glieder unter dem Summenzeichen in (28.) zeigt —, gibt alle Glieder der dem Index $\alpha=\tau-\sigma$ entsprechenden Einzelsumme von (25.) mit entsprechendem Vorzeichen. Dann aber geht Fall 3) und 4) in Fall 1) und 2) über, denn die σ, τ entsprechenden Zahlen werden: $\sigma'=\sigma-i_{\tau-\sigma}+\tau-\sigma$, $\tau'=\tau-i_{\tau-\sigma}=\sigma'$; und bei Fortsetzung des Verfahrens wird $\tau'<\sigma'$. Es ist also im Schlußausdruck von (25.) das erste Summenzeichen zu ersetzen durch $\sum_{\alpha=\tau-\sigma}^{\tau, \varrho}$.

Analog ergibt sich aus (21.) die dualistische Zerlegungsidentität, bei der eine Reihe q_e in die einzelnen Reihen $v^{(1)}, \dots, v^{(e)}$ zerlegt wird. Setzen wir

$$(29.) \quad \dot{p}_{\tau-\beta}^{(i_1 \dots i_\beta)} \rightsquigarrow v^{(i_1)} \dots v^{(i_\beta)} q_{n-\tau}; \quad \dot{q}_{e-\beta}^{(i_1 \dots i_\beta)} = v^{(i_{\beta+1})} \dots v^{(i_e)}; \quad q_e = v^{(1)} \dots v^{(e)},$$

so kommt:

$$(30.) \quad (q_e A^\sigma p_\tau B_{e+\sigma-\tau}) = \sum_{0, \tau-\sigma}^{\tau, \varrho} \sum_{i_\beta=1}^{\varrho} \varepsilon(\dot{q}_{e-\beta}^{(i_1 \dots i_\beta)} B^{n-e-\sigma+\tau} A_{n-\sigma} \dot{p}_{\tau-\beta}^{(i_1 \dots i_\beta)}),$$

wo der Summationsindex β vom größeren der unteren Werte bis zum kleineren der oberen läuft. Alle Glieder einer Einzelsumme in (25.) und (30.) sind Polaren einer einzigen Form, entstanden durch die Polarprozesse $(\frac{\partial}{\partial p_{\tau-a}} p_{\tau-a}^{(i_1 \dots i_a)})$, $(q_{e-a}^{(i_1 \dots i_a)} | \frac{\partial}{\partial q_{e-a}})$. Um dies zum Ausdruck zu bringen, bezeichnen wir mit Π ein Aggregat solcher Polaroperationen, multipliziert mit Konstanten, und erhalten dann an Stelle von (25.) und (30.) die Relation:

$$(31.) \quad (q_e A^\sigma | p_\tau B_{e+\sigma-\tau}) = \sum_{0, \tau-\sigma}^{\tau, \varrho} \Pi(q_{e-a} B^{n-e-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-a}).$$

§ 5. Die Zerlegungsidentitäten in expliziter Form.

Spezialisieren wir in (25.) im Falle 4) τ zu $\sigma+e$, so kommt:

$$(32.) \quad (q_e A^\sigma y^{(1)} \dots y^{(e+\sigma)}) = \sum_{i_e=i_{e-1}+1}^{\tau} \varepsilon_{i_e} (q_e | y^{(i_1)} \dots y^{(i_e)}) (A^\sigma | y^{(i_{e+1})} \dots y^{(i_{e+\sigma})}),$$

wo $\varepsilon_{i_e} = (-1)^{i_e}$, $\partial_{i_e} \dots \frac{\varrho(\varrho+1)}{2} + i_1 + \dots + i_e$ wird. Dies ist eine allgemeinere Form des Produktsatzes für Matrizen als (16.) und (17.) und ergibt sich durch Laplacesche Entwicklung der Determinante der Produktenmatrix: $\sum \pm (v^{(1)} y^{(1)}) \dots (v^{(e)} y^{(e)}) (a^{(1)} | y^{(e+1)}) \dots (a^{(e)} y^{(e+\sigma)})$. Der allgemeinere Produktsatz ist also aus den Identitäten (20.), bzw. (21.) zusammengesetzt, und das Herausgreifen der speziellen Form (16.), (17.) ist dadurch erklärt.

Die Relation (32.) gibt nun das Mittel zur expliziten Darstellung der Zerlegungsidentitäten. Wir betrachten dazu die in (31.) auftretenden Formen als Grundformen; d. h. wir führen die Substitution (11.) aus, die an der expliziten Darstellung in den Reihen A, B nichts ändert, da nach (8.) die neu eingeführten Reihen R sich durch die Reihen A, B selbst und nicht durch deren Teilreihen $a^{(1)} a^{(2)} \dots, b^{(1)} b^{(2)} \dots$ ausdrücken lassen. Sei also

$$(33.) \quad (q_{\varrho-\alpha} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-\alpha}) = (R_{\varrho-\alpha} p_{n-\varrho+\alpha}) (R^{\tau-\alpha} | p_{\tau-\alpha}),$$

so kommt für die dem Index α entsprechende Einzelsumme von (25.):

$$\begin{aligned} (34.) \quad & \sum \varepsilon_{i_\alpha} (R_{\varrho-\alpha} p_{n-\varrho} y^{(i_1)} \dots y^{(i_\alpha)}) (R^{\tau-\alpha} | y^{(i_{\alpha+1})} \dots y^{(i_\tau)}) \\ &= \sum \varepsilon_{i_\alpha} ([R_{\varrho-\alpha} p_{n-\varrho}]^\alpha | y^{(i_1)} \dots y^{(i_\alpha)}) (R^{\tau-\alpha} | y^{(i_{\alpha+1})} \dots y^{(i_\tau)}) \\ &= \varepsilon ([R_{\varrho-\alpha} p_{n-\varrho}]^\alpha R^{\tau-\alpha} | p_\tau) = \varepsilon (R^{\tau-\alpha} q_{n-\tau} | R_{\varrho-\alpha} p_{n-\varrho}). \end{aligned}$$

Damit ist nun in der Tat ein expliziter Schlußausdruck gegeben, und die symmetrische Form, in der q_ϱ und p_τ eingehen, zeigt, daß (30.) zum gleichen Schlußausdruck führt, der also unabhängig ist von der ursprünglichen Zerlegung. Ein Unterschied zwischen (25.) und (30.) besteht nur, solange die Reihen y und v selbständige Bedeutung haben, die Zerlegungsidentität also nach unserer Definition in eine zerlegbare Identität übergeht. Um zu Identitäten mit mehr Symbolreihen zu gelangen, hat man nach § 3 (Schluß) nur eine Reihe q_ϱ in $q_{\varrho_1} C^{\sigma_1}$, bzw. p_τ in $p_{\tau_1} C_{\tau-\tau_1}$ aufzulösen. Die dann entstehenden Ausdrücke:

$$(35.) \quad (q_{\varrho_1} C^{\sigma_1} | [R^{\tau-\alpha} q_{n-\tau}]^\alpha R_{\varrho_1+\sigma_1-\alpha}), \quad ([R_{\varrho-\alpha} p_{n-\varrho}]^\alpha R^{\tau-\alpha} | p_{\tau_1} C_{\tau-\tau_1})$$

sind nun genau vom Typus der bei zwei Symbolreihen auftretenden, lassen also bei einer (33.) entsprechenden Substitution wieder explizite Darstellung zu, so daß sich durch Wiederholung explizite Darstellung bei beliebig vielen Reihen ergibt. Bemerkt mag noch werden, daß je die erste und letzte Summe in (25.) bzw. (30.) die explizite Darstellung ohne Anwendung von (33.) allein durch die Formel (32.) ergibt, oder sich überhaupt auf ein einziges, alle Reihen explizit enthaltendes Glied beschränkt. Die durch Auflösung von q_ϱ in $q_{\varrho_1} C^{\sigma_1}$ usf. aus (32.) entstehende Relation kann als der Produktsatz in seiner allgemeinsten Form aufgefaßt werden.

Zusammenfassend werden wir zeigen:

Satz III: Mit den Identitäten

$$(36.) \quad (q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) = \sum_{0, \tau-\sigma}^{\tau, \varrho} \varepsilon (R^{\tau-\alpha} q_{n-\tau} | R_{\varrho-\alpha} p_{n-\varrho}),$$

wo die Reihen R durch (33.) bestimmt sind, und mit den durch Auflösung von q_e, p_r in q_e, C^σ usf. daraus entstehenden ist die Gesamtheit der unzerlegbaren Identitäten erschöpft.

In der Tat sind die entstehenden Identitäten die allgemeinsten ihrer Art, da die einzelnen Reihen in bezug auf Gewicht und Anzahl keiner Beschränkung mehr unterliegen, wie dies noch bei (20.), (21.) der Fall war. Es existieren aber auch keine weiteren Identitäten zwischen diesen Reihen; denn bei Auflösung einer Reihe p_r in $y^{(1)} \dots y^{(r)}$ sind die allgemeinsten Identitäten aus (20.), also nach § 3 (Schluß) aus (20^a.) zusammengesetzt; und zwar ist die im Anschluß an (16.) diskutierte Zusammensetzung genau die in § 4 durchgeführte. Den Übergang zu beliebig vielen Reihen liefert aber, wie die Diskussion von (20^a.) zeigt, die Anwendung immer derselben Operation auf die durch Auflösung von q_e in q_e, C^σ usf. entstehenden Ausdrücke. Es folgt daraus auch, daß der direkte Übergang von (20.) an Stelle von (20^a.) nichts Neues liefert; dies läßt sich rechnerisch leicht bestätigen, indem man einmal eine Reihe q_e in (25.) spezialisiert, das andere Mal nach der Methode von § 4 den Übergang von (20.) macht; es entstehen beide Male die gleichen Summen, die durch Anwendung des allgemeinen Produktsatzes (siehe oben) in die aus (36.) sich ergebenden Identitäten übergehen. Die Identitäten (20.), (21.) entsprechen den Spezialfällen $\tau = 1, \rho = 1$; es treten dann nur je zwei Einzelsummen auf, also einer obigen Bemerkung entsprechend explizite Darstellung ohne die Substitution (33.), was mit dem früheren übereinstimmt.

Zum Schluß seien noch zwei Spezialfälle der Zerlegungsidentität kurz erwähnt. Setzen wir in (31.): $\tau = \sigma, \rho = n - \sigma$ und bezeichnen die Reihe p_r als $p'_\sigma \rightarrow q'_{n-\sigma}$, so kommt:

$$(37.) \quad (A^\sigma | p_\sigma) (B^\sigma | p'_\sigma) - (A^\sigma | p'_\sigma) (B^\sigma | p_\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma, n-\sigma} \Pi (q_{n-\sigma-\alpha} B^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\alpha}).$$

Das ist die *Clebschsche Formel**) zur Entwicklung einer Form mit zwei kogredienten Reihen p_σ, p'_σ nach Elementarkovarianten. Die zu einer Form $(A^\sigma | p_\sigma)^m (B^\sigma | p'_\sigma)^n$ gehörenden Elementarkovarianten sind dann die folgenden:

$$(38.) \quad \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\sigma, n-\sigma} (q_{n-\sigma-\alpha} B^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\alpha}) \right\}^e (A^\sigma | p_\sigma)^{m-e} (B^\sigma | p'_\sigma)^{n-e}. \quad (e = 0, 1, \dots, m, n)$$

*) *Clebsch*, a. a. O., S. 25—32. *Clebsch* weist nach, daß die einzelnen Glieder der rechten Seiten nur von den Reihen A, B abhängen; die explizite Darstellung würde sich durch Anwendung von (32.) auf seine Ausdrücke Φ_h ergeben.

Sie gehen, wie wir kurz sagen wollen, aus der Grundform durch „kogrediente Faltung vom Defekt α “ (vgl. § 2) hervor. —

Setzen wir zweitens: $\tau = \sigma - \lambda$, $\varrho = n - \sigma - \lambda$; $B^\sigma = A^\sigma$, so kommt:

$$(39.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} A^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\lambda}) = (-1)^\lambda (q_{n-\sigma-\lambda} A^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\lambda}) \\ + (-1)^{(n-\sigma)(\sigma-\lambda)} \sum_{\alpha=1}^{\sigma-\lambda, n-\sigma-\lambda} \Pi(q_{n-\sigma-\lambda-\alpha} A^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\lambda}).$$

Es sind also, wie in § 2 bemerkt, die die Symbolreihen charakterisierenden Bedingungen (12.) für ungeraden Defekt λ eine Folge der Bedingungen von höherem Defekt. Für eine Linearform $(A^\sigma, p_\sigma) \equiv (B^\sigma, p_\sigma)$ ergibt sich aus (39.), daß sich ihre irreduzibeln invarianten Bildungen, die in den Koeffizienten quadratisch sind, auf solche von geradem Defekt reduzieren; das stimmt mit der bekannten Tatsache überein, daß eine Linearform im binären und ternären Gebiet keine invarianten Bildungen besitzt.

Bemerkt sei, daß die allgemeinen Identitäten ursprünglich abgeleitet sind unter der Annahme, daß die einzelnen Reihen den Bedingungen (12.) genügen. Da indes diese einzelnen Reihen nur linear in die Identitäten eingehen, so gelten letztere auch für die allgemeineren, den Bedingungen (12.) nicht genügenden Reihen.

§ 6. Explizite Darstellung der invarianten Bildungen.

Faltungs- und Differentiationsprozesse.

Die Resultate der vorigen Paragraphen erlauben uns, den in § 2 ausgesprochenen Satz von der symbolischen Darstellbarkeit (1. Fundamentalsatz) durch Zufügung der *expliziten* Darstellbarkeit zum Abschluß zu bringen, indem wir zeigen:

Satz IV: „Alle invarianten Bildungen beliebiger Grundformen lassen sich explizit durch Matrizenprodukte darstellen; d. h. in die Schlußausdrücke gehen außer Variablenreihen p_σ nur die Reihen $S^\sigma, \dots, T^\tau$ der ursprünglichen Formen oder die durch Substitution (9.) oder (11.) aus ihnen abgeleiteten Reihen P, Q, R ein.“

Zum Beweise nehmen wir an, eine invariante Bildung möge außer von Variablenreihen von den Reihen $S^\sigma, \dots, T^\tau$ abhängen; und zwar seien diese Reihen genügend weit in einzelne Reihen: $S^\sigma = S^{\sigma_1} \dots S^{\sigma_i}, \dots, T^\tau = T^{\tau_1} \dots T^{\tau_k}$ aufgelöst, um eine Darstellung durch Determinanten zu ermöglichen. Die Reihen seien in einer an sich willkürlichen, aber bestimmt festgelegten

Reihenfolge $S^\sigma, \dots T^\tau$ geordnet. Wir greifen nun ein solches Aggregat von Determinanten heraus, das von der ersten Gesamtreihe $S^\sigma = S^{\sigma_1} \dots S^{\sigma_i}$, nicht nur von einzelnen der Teilreihen, abhängt. Diese Abhängigkeit ist aber nach § 3—§ 5 eine Folge der allgemeinen Identitäten. Lösen wir nun eine Variabelnreihe p_ρ in die Reihen y, v , oder eine der späteren Reihen T in die einzelnen Reihen t , bzw. τ auf, so sind die allgemeinsten Identitäten aus (20.), (21.) zusammengesetzt. Diese letzteren Identitäten führen aber immer zu einem die Reihe $S^\sigma = S^{\sigma_1} \dots S^{\sigma_i}$ explizit enthaltenden Ausdruck, der linken Seite von (20.), (21.); man überzeugt sich nämlich durch (19.), daß erst die vollständige rechts stehende Summe — nicht aber ein Teil derselben, der einem Gliede von (20^a.) entspricht — die Eigenschaft besitzt, nur von S^σ abzuhängen. Bei Fortsetzung des Verfahrens bleiben alle einmal explizit eingehenden Reihen auch explizit erhalten; die Anwendung der Identitäten kann nur möglicherweise ein Zusammenfassen mehrerer Reihen zu einer einzigen, d. h. die Substitution (9.), verlangen. Ist schließlich nur noch eine einzige Reihe T^τ auf die explizite Form zu bringen, so sind zwei Fälle möglich. Es kann noch eine freie, d. h. nicht durch Substitution (9.) mit andern Reihen verbundene, Variabelnreihe auftreten; durch deren Zerlegung in Teilreihen y oder v läßt sich das Verfahren zum Abschluß bringen; es entstehen, wie in (31.), Polaren einer oder mehrerer, alle Reihen explizit enthaltenden Formen. Tritt keine freie Variabelnreihe mehr auf, so erkennen wir nach der Art, wie sie entstanden sind, in der Gesamtheit der Ausdrücke, die die einzelnen Reihen t oder τ enthalten, aber von der Reihe T^τ abhängen, die Glieder einer Zerlegungsidentität; diese aber lassen nach § 5 unter Anwendung der Substitution (11.) stets die explizite Darstellung in allen Reihen zu. *Damit ist der obige Satz allgemein bewiesen.* Bemerkt mag noch werden, daß dann, wenn nur zwei Symbolreihen auftreten, die Substitution (11.) nie eintritt; es können nämlich — wegen $\sigma, n-\sigma, \tau, n-\tau \leq n$ — nur dann keine Variabelnreihen eingehen, wenn die beiden Symbolreihen in einer einzigen Determinante vereinigt, also explizit auftreten; sobald aber Variabelnreihen eingehen, zeigen (34.) und (33.), daß die Substitution (11.) überflüssig wird.

Aus dem eben Gesagten folgt, daß es zur Erzeugung aller invarianten Bildungen genügt, die Symbolreihen unter Zufügung von Variabelnreihen zu allen möglichen Matrizenprodukten zu vereinigen. Das allgemeinste

Matrizenprodukt ist nun von der Form:

$$(40.) \quad (P^{\mu_1} \dots P^{\mu_i} | Q_{\nu_1} \dots Q_{\nu_k}); \quad \Sigma \mu = \Sigma \nu,$$

wo die P und Q Reihen der ursprünglichen Formen sein können, oder durch eine Reihenfolge von Substitutionen (9.) oder (11.) aus den ursprünglichen Reihen hervorgegangen, oder endlich Variablenreihen. Die Ausdrücke (40.) aber lassen sich erzeugen durch sukzessive Vereinigung je zweier Symbolreihen zu einem Matrizenprodukt, unter Zuhilfenahme von Variablenreihen; denn man erhält aus

$$(q_{n-\mu-\lambda} P^{\mu} | Q_{\nu_1} p_{n-\nu_1-\lambda}) = (R_{\lambda} Q_{\nu_1} p_{n-\nu_1-\lambda})$$

durch Vereinigung mit der Reihe Q_{ν_2} einen Ausdruck

$$([R_{\lambda} Q_{\nu_1}]^{n-\lambda-\nu_1} | Q_{\nu_2} p_{n-\nu_1-\nu_2-\lambda}) = (q_{n-\mu-\lambda} P^{\mu} | Q_{\nu_1} Q_{\nu_2} p_{n-\nu_1-\nu_2-\lambda}),$$

also durch Fortsetzung des Verfahrens einen Ausdruck (40.). Sind dabei P und Q nicht die Reihen der ursprünglichen Formen, so zeigt (9.) und (11.) in Verbindung mit dem eben Gezeigten, daß sie gleichfalls durch eine Reihenfolge von Vereinigungen je zweier Symbolreihen entstanden sind. Es folgt daraus:

Satz V: Der Prozeß zur Erzeugung aller invarianten Bildungen, der Faltungsprozeß, besteht in der sukzessiven Vereinigung je zweier Symbolreihen zu einem Matrizenprodukt, unter Zuhilfenahme von Variablenreihen.

Aus zwei Symbolreihen S^{σ}, T^{τ} , wo $\sigma \geq \tau$, lassen sich nun die folgenden Matrizenprodukte bilden:

$$(41.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} S^{\sigma} | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}); \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \tau, n-\sigma)$$

$$(42.) \quad (q_{n-\tau-\mu} T^{\tau} | S_{n-\sigma} p_{\sigma-\mu}); \quad (\mu = \sigma - \tau + \lambda)$$

$$(43.) \quad (q_{n-\tau-\nu} T^{\tau} | S_{n-\sigma} p_{\sigma-\nu}). \quad (\nu = 1, 2, \dots, \sigma - \tau)$$

Aus (31.) ergeben sich aber für (42.) und (43.) die Werte:

$$(42^a.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} S^{\sigma} | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) + \sum_{\alpha} \Pi (q_{n-\sigma-\lambda-\alpha} S^{\sigma} | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda-\alpha});$$

$$(43^a.) \quad \Pi (q_{n-\sigma} S^{\sigma}) (T_{n-\tau} p_{\tau}) + \sum_{\beta} \Pi (q_{n-\sigma-\beta} S^{\sigma} | T_{n-\tau} p_{\tau-\beta}).$$

Es lassen sich also die Formen (42.) linear ausdrücken durch (41.) und Polaren von (41.), die Formen (43.) durch Polaren der Grundform und der Formen (41.). Ebenso ergibt sich aus (31.) die lineare Abhängigkeit der Formen (41.) von (42.) und Polaren von (42.). Danach sind aber nach der *Clebschen* Definition*) die Formen (42.) den Formen (41.)

*) *Clebsch*, a. a. O. § 7.

äquivalent, während (43.) auf die Grundform zurückführt. Der erzeugende Prozeß ist also gleichberechtigt durch (41.) oder (42.) gegeben; wir wollen den in bezug auf die Zahl λ einfacheren Prozeß (41.) als *Faltungsprozeß* definieren. Die Zahl λ , der *Defekt der Faltung* (vgl. § 2) gibt die Anzahl der zum Determinantenprodukt fehlenden Reihen an, und zwar in demjenigen Matrizenprodukt, das bei gegebener Faltung die Maximalzahl von Reihen enthält. Da λ nur bis zum kleineren der beiden Werte $\tau, n - \sigma$ läuft, wo $\sigma \geq \tau$, so ist:

$$(44.) \quad \lambda \leq \frac{n}{2}, \quad n \text{ gerade}; \quad \lambda \leq \frac{n-1}{2}, \quad n \text{ ungerade}.$$

Die Zurückführung von (42.) und (43.) auf (41.) gilt auch dann noch, wenn durch weitere Faltung die Reihen p, q in Symbolreihen übergegangen sind; denn nach (36.) kommt:

$$(A^{n-\tau-\kappa} T^\tau | S_{n-\sigma} B_{\sigma-\kappa}) = \sum_{0, \kappa-\sigma+\tau}^{\tau, n-\sigma} \varepsilon (R^{\tau-\alpha} B^{n-\sigma+\kappa} | A_{\tau+\kappa} R_{n-\sigma-\alpha}),$$

wo die Reihen R nach (33.) aus S und T hervorgegangen sind. Man erhält also diese nur Symbolreihen enthaltenden Formen durch Faltung von $(q_\tau A^{n-\tau-\kappa} | B_{\sigma-\kappa} p_{n-\sigma})$ bzw. $(q_{\tau-\alpha} B^{n-\sigma+\kappa} | A_{\tau+\kappa} p_{n-\sigma-\alpha})$, — je nachdem $\sigma - \tau \geq 2\kappa$ — mit der Grundform und den Formen (41.).

Aus dem symbolischen Faltungsprozeß gewinnt man in bekannter Weise die *invarianten Differentiationsprozesse*, wenn man nur die Symbolreihen $S^\sigma, T_{n-\tau}$ durch die Reihen von Differentiationssymbolen $\frac{\partial}{\partial p_\sigma}, \frac{\partial}{\partial q_{n-\tau}}$ ersetzt, wobei bekanntlich jedem Produkte $\frac{\partial}{\partial p_{i_1 \dots i_\sigma}} \cdot \frac{\partial}{\partial q_{j_1 \dots j_{n-\tau}}}$ die reale Bedeutung $\frac{\partial^2}{\partial p_{i_1 \dots i_\sigma} \partial q_{j_1 \dots j_{n-\tau}}}$ zukommt. Da die Reihen $\frac{\partial}{\partial p_\sigma}, \frac{\partial}{\partial q_{n-\tau}}$ den Reihen $S^\sigma, T_{n-\tau}$ kogredient sind, genügen sie denselben Identitäten wie diese, also speziell auch den zwischen (42.) und (42^a.), (43.) und (43^a.) bestehenden. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz VI: Alle invarianten Bildungen beliebiger Grundformen entstehen aus diesen durch wiederholte Anwendung des symbolischen Faltungsprozesses (41.) oder auch der invarianten Differentiationsprozesse:

$$(45.) \quad \left(q_{n-\sigma-\lambda} \frac{\partial}{\partial p_\sigma} \middle| \frac{\partial}{\partial q_{n-\tau}} p_{\tau-\lambda} \right). \quad (\sigma \geq \tau, \lambda = 1, 2, \dots, \sigma, n - \tau)$$

Es ist noch zu bemerken, daß bei jeder Faltung (41.) das Gesamt-

gewicht der Form, d. h. die Summe der Gewichte der einzelnen Variablenreihen (vgl. § 1), abnimmt um die positive Zahl $2(\lambda^2 + \lambda(\sigma - \tau))$. Daraus folgt, unabhängig vom allgemeinen Endlichkeitsbeweis, die Endlichkeit der *Formenreihe*, d. h. der Gesamtheit der in den Koeffizienten linearen invarianten Bildungen einer gegebenen Grundform*).

Bemerkt sei weiter, daß Satz VI auch noch gilt für Formen, die den Bedingungen (12.) nicht genügen. Es läßt sich nämlich jeder Faktor von (3.): $(S^e | p_e)^{m_e}$ ersetzen durch ein Produkt von m_e Linearfaktoren $(A^e | p_e)(B^e | p_e) \cdots (M^e | p_e)$, wodurch die invarianten Bildungen übergehen in solche eines Systems von Linearformen, die erst nachträglich einander gleich gesetzt zu werden brauchen. Für jede einzelne Linearform aber sind die Bedingungen (12.), die bei Einführung von Differentialsymbolen nur Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten, stets erfüllt.

§ 7. Entwicklung der allgemeinen Formen nach Normalformen.

Wir werden im folgenden (§ 8) eine Haupteigenschaft des Faltungsprozesses (41.) ableiten, seine Zusammensetzbarkeit aus Grundfaltungen, bedürfen dazu aber der Übertragung eines wichtigen, von Herrn *Mertens***) im quaternären Gebiete gegebenen Satzes auf das n -näre Gebiet. Dieser Satz sagt aus, daß sich ein beliebiges endliches System von Formen ersetzen läßt durch ein äquivalentes System von Normalformen. Unter „Normalform“ verstehen wir dabei — in Verallgemeinerung der binären und ternären Definition***) — eine Form, deren sämtliche in den Koeffizienten lineare invariante Bildungen identisch verschwinden mit Ausnahme der Grundform selbst. Nach Satz VI (§ 6) genügt also eine Normalform φ dem System von Differentialgleichungen:

$$(46.) \quad \left(q_{n-\sigma-\lambda} \frac{\partial}{\partial p_\sigma} : \frac{\partial}{q_{n-\tau}} p_{\tau-\lambda} \right) = 0, \quad (\sigma \geq \tau; \lambda = 1, 2, \dots, \tau, n - \sigma)$$

wo die Reihen $q_{n-\sigma-\lambda}$, $p_{\tau-\lambda}$ als willkürliche Größen zu betrachten sind. Diese Differentialgleichungen stimmen im quaternären Gebiet — unter Be-

*) Vgl. *Clebsch*, a. a. O. § 11 u. 12. Endlichkeit des Systems von Elementarkovarianten.

**) *F. Mertens*, Über invariante Gebilde quaternärer Formen (siehe Einleitung), zitiert als „*Mertens*“.

***) *Study*, a. a. O. S. 54.

rücksichtigung von (39.) für $\sigma = \tau = 2$ — mit den von Herrn *Mertens* ohne Einführung der willkürlichen Reihen p, q gegebenen 10 Differentialgleichungen (a. a. O., Formel 28)) vollständig überein; ihre Kenntnis, zusammen mit Satz VI, erlaubt uns, das dortige Beweisverfahren fast wörtlich auf n Variable zu übertragen. Hinzuzufügen ist einzig der mittels der Zerlegungsidentität (30.) erbrachte Nachweis, daß die konstruierten Formen Normalformen sind; im quaternären Gebiet ergibt sich dieser Nachweis noch ohne weitere Umformung. Es genügt deshalb auch eine kurze Darlegung des Beweises, und zwar der Einfachheit halber in dem für das folgende nur in Betracht kommenden Fall einer einzigen Grundform f und ihrer Formenreihe (vgl. § 6 Schluß), da für invariante Bildungen beliebigen Grades in den Koeffizienten beliebig vieler Grundformen der Beweis derselbe bleibt.

Der Grundgedanke des Beweises ist, durch Einführung der transformierten Koeffizienten eine Form mit $n-1$ Reihen p_ϱ zu ersetzen durch Formen mit n den x kogredienten Reihen ξ , den Reihen der Transformationsgrößen. Aus diesen Formen leiten sich durch invariante Differentiationsprozesse direkt die gesuchten Normalformen ab. Die Entwicklung der allgemeinen Formen nach Normalformen wird vermittelt durch eine Reihenentwicklung für Formen mit ϱ ($\varrho < n$) kogredienten Reihen ξ ; invariante Differentiationsprozesse führen zu den Formen in den ursprünglichen Reihen p_ϱ zurück.

Es seien $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ die Reihen der Transformationsgrößen, so daß man hat:

$$(47.) \quad \begin{aligned} x_i &= \xi_i^{(1)} x'_1 + \xi_i^{(2)} x'_2 + \dots + \xi_i^{(n)} x'_n, \\ p_{i_1 \dots i_\varrho} &= \sum_j (\xi_{i_1}^{(j_1)} \dots \xi_{i_\varrho}^{(j_\varrho)}) p'_{j_1 \dots j_\varrho}. \end{aligned}$$

Die transformierten Koeffizienten der Formen $f, \varphi, \dots$ seien mit $(f), (\varphi), \dots$ bezeichnet, und es sei

$$f \equiv (S^1 p_1)^{m_1} (S^2 p_2)^{m_2} \dots (S^{n-1} p_{n-1})^{m_{n-1}}.$$

Es wird dann:

$$(48.) \quad \begin{aligned} (f) &= (S^1 | \xi^{(1)})^{m_{11}} \dots (S^1 | \xi^{(n)})^{m_{1n}} (S^2 | \xi^{(1)} \xi^{(2)})^{m_{21}} \dots (S^{n-1} | \xi^{(2)} \dots \xi^{(n)})^{m_{n-1, n}} \\ &= (S^{(1)} | \xi^{(1)})^{k_1} (S^{(2)} | \xi^{(2)})^{k_2} \dots (S^{(n)} | \xi^{(n)})^{k_n}, \end{aligned}$$

wo $m_{11} + \dots + m_{1n} = m_1$ usf. Aus jedem Koeffizienten (f) , für den

$$(49.) \quad k_1 \geq k_2 \geq k_3 \dots \geq k_n,$$

ergibt sich durch den die Reihen ξ genau erschöpfenden Differentiationsprozeß:

$$(50.) \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \mid p_1 \right)^{k_1 - k_2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \xi^{(2)}} \mid p_2 \right)^{k_2 - k_3} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^{(n-1)}} \mid p_{n-1} \right)^{k_{n-1} - k_n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^{(n)}} \right)^{k_n}$$

die Form

$$(51.) \varphi = (s^{(1)} \mid p_1)^{k_1 - k_2} (s^{(1)} s^{(2)} \mid p_2)^{k_2 - k_3} \cdots (s^{(1)} \cdots s^{(n-1)} \mid p_{n-1})^{k_{n-1} - k_n} (s^{(1)} s^{(2)} \cdots s^{(n)})^{k_n}.$$

Die Formen φ sind die gesuchten Normalformen. Sie haben nämlich die folgenden, die Normalformen definierenden Eigenschaften:

1. Sie sind in den Koeffizienten lineare invariante Bildungen der Grundform f . Dies folgt daraus, daß sie aus f durch die invarianten Differentiationsprozesse $\left(\frac{\partial}{\partial p_e} \mid \xi^{(i_1)} \xi^{(i_2)} \cdots \xi^{(i_e)} \right)$ und (50.) hervorgehen. Sie lassen sich also (nach § 6 Schluß) linear ausdrücken durch Polaren der endlichen Formenreihe von f . Man erhält diese Polaren, indem man die in φ eingehenden Variablen p_e auffaßt als Koeffizienten einer in Linearformen zerfallenden Form mit den Variablenreihen p_σ :

$$(52.) H = (q_{n-1} \mid p_{n-1})^{k_1 - k_2} (q_{n-2} \mid p_{n-2})^{k_2 - k_3} \cdots (q_1 \mid p_1)^{k_{n-1} - k_n}.$$

Die Simultaninvarianten der Formenreihen f und H ergeben alle in Betracht kommenden Polaren, da diese letzteren in den einzelnen Reihen p_e von gleicher Dimension sein müssen wie φ selbst.

2. Sie genügen den Differentialgleichungen (46.). Wendet man nämlich auf φ den Differentialprozeß (45.) an, so kommt:

$$\varphi' = (q_{n-\sigma-\lambda} s^{(1)} \cdots s^{(\sigma)} \mid [s^{(1)} \cdots s^{(\tau)}]_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}). \quad (\sigma > \tau)$$

Aus der Zerlegungsidentität (30.) folgt, wenn man die aus den Reihen s gebildeten Reihen $q_\sigma = s^{(1)} \cdots s^{(\sigma)}$, $p_{n-\tau} = [s^{(1)} \cdots s^{(\tau)}]_{n-\tau}$ mit den dortigen q_e, p_τ identifiziert:

$$\varphi' = \sum_{\beta=\sigma-\tau+\lambda}^{n-\tau, \sigma} \sum_{i_\beta} \varepsilon (q_{\sigma-\beta}^{(i_1 \cdots i_\beta)} q_{n-\tau+\lambda} \mid p_{\sigma+\lambda} \dot{p}_{n-\tau-\beta}^{(i_1 \cdots i_\beta)}).$$

Es wird dabei:

$$\dot{p}_{n-\tau-\beta}^{(i_1 \cdots i_\beta)} \hookrightarrow s^{(1)} \cdots s^{(\tau)} s^{(i_1)} \cdots s^{(i_\beta)},$$

wo $i_1, \dots, i_\beta$ irgendwelche β , aus den Zahlen 1 bis σ herausgegriffene, von einander verschiedene Zahlen bedeuten. Da nun $\beta > \sigma - \tau$, so folgt, daß sich unter diesen Zahlen $i_1, \dots, i_\beta$ notwendig solche zwischen 1 bis τ befinden; damit verschwindet aber $\dot{p}_{n-\tau-\beta}^{(i_1 \cdots i_\beta)}$ identisch, folglich jedes einzelne Matrizenprodukt und damit auch φ' .

Zur Äquivalenz des Systems der Normalformen mit der Formen-

reihe f bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß sich alle Formen der Formenreihe nach Polaren der Normalformen in dem unter 1. festgelegten Sinne entwickeln lassen. Es sei Π ein Aggregat von Polaroperationen

$$(53.) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(i)}} \xi^{(k)} \right), \quad (i \neq k; \ i = 1, 2, \dots, \varrho; \ k = 1, 2, \dots, \varrho)$$

und Π^σ ein Aggregat der speziellen Operationen (53.), für die $i = \sigma$ und $k < \sigma$. Für eine Form F der ϱ Reihen $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\varrho)}$, die in der Reihe $\xi^{(\varrho)}$ vom Grade k_ϱ sei, gilt dann die Entwicklung*):

$$(54.) \quad F = \sum_{\alpha=0}^{k_\varrho} \Pi F_\alpha, \quad (\varrho \leq n)$$

wo F_α in der letzten Reihe $\xi^{(\varrho)}$ vom α -ten Grade ist und aus F durch die invarianten Differentialoperationen

$$(55.) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{(\varrho)}} \mid \xi^{(1)} \dots \xi^{(\varrho)} \right)^\alpha$$

und Π^ϱ hervorgeht. Ersetzt man bei der Erzeugung von F_α den Prozeß (55.) durch

$$(56.) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{(\varrho)}} \mid p_\varrho \right)^\alpha,$$

so entsteht eine Form $F_\alpha(p_\varrho)$ mit nur $\varrho - 1$ Reihen $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\varrho-1)}$, auf die sich wieder (54.) anwenden läßt. Die Fortsetzung des Verfahrens führt zu Formen $G(p_\varrho, p_{\varrho-1}, \dots, p_1)$. Um aus diesen die Entwicklung von F nach (54.) zu erhalten, hat man die einzelnen Reihen p_σ durch $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\sigma)}$ zu ersetzen und auf die entstehenden Formen den Polarprozeß Π (53.) anzuwenden; dies gibt (vgl. (48.)) eine Summe von transformierten Koeffizienten (G). Für $\varrho = n$ bleibt beim ersten Schritt der Prozeß (55.) erhalten. Bezeichnen c numerische Konstanten und wird noch abkürzend gesetzt

$$(57.) \quad (\xi^{(1)} \xi^{(2)} \dots \xi^{(n)}) = A; \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \xi^{(2)}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{(n)}} \right) = P,$$

so kommt im Falle $\varrho = n$:

$$(58.) \quad F = \sum c A^\alpha (G),$$

während für $\varrho < n$ nur $\alpha = 0$, also $\sum c(G)$ rechts eintritt.

Wenden wir (58.) auf einen transformierten Koeffizienten (f) (48.) an, so wird, wegen der Vertauschbarkeit der Polarprozesse Π^σ mit allen

*) F. Mertens, Über eine Formel der Determinantentheorie. Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., Bd. 91. 2. Abt. (1885). Formel 20).

Operationen (56.), für die $\varrho \geq \sigma$, und da Polaren transformierter Koeffizienten wieder transformierte Koeffizienten ergeben:

$$G = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} | p_1 \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \xi^{(2)}} | p_2 \right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^{(n-1)}} | p_{n-1} \right)^{\beta_{n-1}} \mathcal{P}^{\beta_n} \Pi(f) \\ = \Sigma c \varphi$$

und aus (58.) folgt:

$$(59.) \quad (f) = \Sigma c \mathcal{A}^{\alpha}(\varphi) \quad (\text{Mertens, Formel 23}).$$

Um von (59.) zur Entwicklung von f selbst überzugehen, betrachten wir wieder die Variablen p_{ϱ} als Koeffizienten einer Form H (52.) mit den f entsprechenden Gradzahlen $m_1, \dots, m_{n-1}$, und es sei $m = m_1 + \dots + m_{n-1}$. Es wird dann, nach der Definition der Invarianten:

$$f \cdot \mathcal{A}^m = \Sigma (f) (H) = \Sigma c \mathcal{A}^{\alpha}(\varphi) (H),$$

und die Anwendung des die Reihen ξ genau erschöpfenden Prozesses $\mathcal{P}^m$ ergibt:

$$(60.) \quad f = \Sigma c \Phi,$$

wo die Formen Φ aus φ und H durch invariante Differentiationsprozesse nach den Variablen abgeleitet, also Simultaninvarianten der Formenreihen φ und H sind*). Nun beschränkt sich aber, da φ Normalform, die Formenreihe φ auf die Form φ selbst; die Formenreihe H enthält alle überhaupt möglichen invarianten Variablenverbindungen; die Simultaninvarianten von φ und H sind also die Polaren von φ in dem unter 1. angegebenen Sinne; d. h. (60.) stellt die Entwicklung von f nach Polaren der Normalformen dar. Wir haben jetzt noch die gleiche Entwicklung für eine beliebige Form θ der Formenreihe f nachzuweisen. Es seien I' die aus (θ) durch (50.) abgeleiteten Normalformen, so daß man hat:

$$(61.) \quad (\theta) = \Sigma c \mathcal{A}^{\beta} (I').$$

Die Formen θ sind charakterisiert durch die für jeden transformierten Koeffizienten geltende Relation:

$$(\theta) \mathcal{A}^{\alpha} = \Sigma c (f) \quad (\text{Mertens, Formel 9}).$$

Da aber eine jede Form F der n Reihen ξ , die den Faktor $\mathcal{A}^{\alpha}$ enthält, auch den zweiten $\mathcal{P}^{\alpha} \Pi F$ enthält (Mertens, Formel 20)), so folgt:

$$(\theta) = \Sigma c \mathcal{P}^{\alpha} (f), \text{ also } I' = \Sigma c \varphi,$$

*) An Stelle des direkten Schlusses werden bei Mertens, § 7 eine Reihe weiterer Differentialprozesse eingeführt, die wesentlich die Bildung der Formenreihe H bezwecken, was unser Satz VI leistet.

und daraus nach (61.) die (59.) entsprechende Relation:

$$(\theta) = \sum c A^{\beta}(\varphi),$$

die für θ die Entwicklung (60.) nach Polaren der Normalformen φ nach sich zieht. Zusammenfassend haben wir:

Satz VII. Eine jede Formenreihe f läßt sich ersetzen durch ein äquivalentes System von Normalformen.

§ 8. Zurückführung des Faltungsprozesses auf Grundfaltungen.

Im Anschluß an Satz VII führen wir jetzt die am Anfang vom § 7 erwähnte Zurückführung des Faltungsprozesses auf Grundfaltungen durch. Wir bezeichnen dabei (vgl. § 5) jede Faltung zweier kogredienter Reihen S^e, T^e als „kogrediente Faltung“, und speziell die kogrediente Faltung vom Defekt 1 zweier Reihen S^e, T^e als „Grundfaltung vom Typus ϱ “. Dann beweisen wir, in Vervollständigung von Satz VI, den

Satz VIII: Der allgemeine Faltungsprozeß (41.) läßt sich zusammensetzen aus den $(n-1)$ Grundfaltungen vom Typus ϱ , wo $\varrho = 1, 2, \dots, n-1$. Mit anderen Worten: Zur Erzeugung aller invarianten Bildungen genügt die sukzessive Anwendung der $n-1$ Grundfaltungen.

Im binären Gebiet fällt der Faltungsprozeß (41.) direkt mit der einzigen möglichen Grundfaltung zusammen; im ternären Gebiet habe ich Satz VIII in § 1 meiner Dissertation (vgl. Einleitung) bewiesen. Es sind dort, wegen (44.), die allgemeinen kogredienten Faltungen noch identisch mit den Grundfaltungen, und es ist bemerkenswert, daß Satz VIII für n Variable die Reduktion auf Grundfaltungen leistet, und nicht nur die viel schwächere auf kogrediente Faltungen. Der Beweis ist im Prinzip dem ternären nachgebildet, indem die allgemeinsten Faltungen aus den Grundfaltungen konstruiert werden, unter Anwendung der symbolischen Identitäten. Wir werden erzeugen:

- 1) beliebige Faltungen vom Defekt 1 durch kogrediente vom Defekt 1, d. h. durch Grundfaltungen (Analogon zum ternären Fall),
- 2) beliebige Faltungen vom Defekt λ durch kogrediente vom Defekt λ und durch beliebige Faltungen vom Defekt 1,
- 3) kogrediente Faltungen vom Defekt λ durch kogrediente vom Defekt $\lambda-1$ und durch beliebige Faltungen vom Defekt 1.

Dabei setzen wir, was wesentlich ist, nach Satz VII die beiden zu faltenden Formen S und T als Normalformen voraus. Es gelten also, nach (46.), die Relationen:

$$(62.) \quad \begin{aligned} (q_{n-\sigma_1-\lambda} S^{\sigma_1} | S_{n-\sigma_2} p_{\sigma_2-\lambda}) &= 0, & (\sigma_1 \geq \sigma_2, \lambda = 1, 2, \dots, \sigma_2, n-\sigma_1) \\ (q_{n-\tau_1-\lambda} T^{\tau_1} | T_{n-\tau_2} p_{\tau_2-\lambda}) &= 0. & (\tau_1 \geq \tau_2, \lambda = 1, 2, \dots, \tau_2, n-\tau_1) \end{aligned}$$

Es genügt weiter, nach § 2 (Schluß) die Formen S und T in allen Variablenreihen linear anzunehmen; d. h. die konstruierten Formen gehören der Formenreihe an:

$$f = (S^1 | p_1) (S^2 | p_2) \cdots (S^{n-1} | p_{n-1}) (T^1 | p_1) (T^2 | p_2) \cdots (T^{n-1} | p_{n-1}).$$

1) *Erzeugung von* $(q_{n-\sigma-1} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-1})$, *wo* $\sigma > \tau$, *aus Grundfaltungen vom Typus* $\tau + \alpha$; $\alpha = 0, 1, \dots, \sigma - \tau$. Aus der Grundfaltung vom Typus τ

$$(q_{n-\tau-1} S^\tau | T_{n-\tau} p_{\tau-1})$$

erhalten wir durch die Substitution

$$w \rightarrow T_{n-\tau} p_{\tau-1}$$

eine Form der Formenreihe f , mit drei Reihen vom oberen Gewichtsindex (vgl. § 1) $\tau + 1$:

$$(63.) \quad (w S^\tau | p_{\tau+1}) (S^{\tau+1} | p_{\tau+1}) (T^{\tau+1} | p_{\tau+1}).$$

Eine Grundfaltung vom Typus $\tau + 1$, angewandt auf (63.), ergibt:

$$(q_{n-\tau-2} w S^\tau | S_{n-\tau-1} p_\tau);$$

aus (31.) ergibt sich daraus, durch die Substitution $q_{n-\tau-2} w = q'_{n-\tau-1}$, der Wert:

$$\varepsilon (q_{n-\tau-2} w S^{\tau+1}) (S^\tau | p_\tau) + \sum_{\alpha=1}^{\tau, n-\tau-1} II (q'_{n-\tau-1-\alpha} S^{\tau+1} | S_{n-\tau} p_{\tau-\alpha}).$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen verschwindet nach (62.) identisch; wir sind also zu einer Form gelangt:

$$(w S^{\tau+1} | p_{\tau+2}) (S^{\tau+2} | p_{\tau+2}) (T^{\tau+2} | p_{\tau+2}),$$

die aus (63.) durch Verwandlung von τ in $\tau + 1$ hervorgeht. Die $(\sigma - \tau)$ -fache Wiederholung des Prozesses führt also zu der gesuchten Faltung:

$$(w S^\sigma | p_{\sigma+1}) = \varepsilon (q_{n-\sigma-1} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-1}).$$

Wir deuten den durchgeführten Prozeß kurz an durch die Formel:

$$(64.) \quad T^\tau S^\tau, S^{\tau+1}, S^{\tau+2}, \dots, S^\sigma;$$

wir sehen, daß nur die Normalformeneigenschaft von S , nicht aber die von T , benutzt wird. Ein zu (64.) dualistischer Prozeß läßt sich unter alleiniger

Benutzung der Normalformeneigenschaft von T in umgekehrter Reihenfolge durchführen, nämlich der folgende:

$$(65.) \quad S^\sigma T^\sigma, T^{\sigma-1}, T^{\sigma-2}, \dots T^\tau$$

nach den Relationen:

$$\begin{aligned} (q_{n-\sigma-1} S^\sigma | T_{n-\sigma} p_{\sigma-1}) &= \varepsilon (T_{n-\sigma} y p_{\sigma-1}), \text{ wo } y \hookrightarrow q_{n-\sigma-1} S^\sigma, \\ (q_{n-\sigma} T^{\sigma-1} | T_{n-\sigma} y p_{\sigma-2}) &= \varepsilon (T_{n-\sigma+1} y p_{\sigma-2}), \\ &\vdots \\ (q_{n-\tau-1} T^\tau | T_{n-\tau-1} y p_{\tau-1}) &= \varepsilon (q_{n-\sigma-1} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-1}). \end{aligned}$$

Es mag noch auf den Zusammenhang mit der in § 6 (Schluß) angegebenen Abnahme des Gesamtgewichtes hingewiesen werden, die für Faltungen vom Defekt 1 den Wert $2(1 + (\sigma - \tau))$, für Grundfaltungen den Wert $2 \cdot 1$ hat. Wenn also die Zusammensetzbarkeit aus Grundfaltungen überhaupt möglich ist, so sind notwendig $\sigma - \tau + 1$ solcher dazu erforderlich, wie oben durchgeführt.

2) *Erzeugung allgemeiner Faltungen aus kogredienten und Grundfaltungen.* Die Gewichtsabnahme beträgt für eine allgemeine Faltung (41.): $2(\lambda^2 + \lambda(\sigma - \tau)) = 2[\lambda^2 + (\sigma - \tau)(1 + (\lambda - 1))]$, ergibt also die Möglichkeit einer Zerlegung in eine kogrediente Faltung vom Defekt λ (Gewichtsabnahme $2\lambda^2$) und $\sigma - \tau$ Faltungen vom Defekt 1 und der Differenz der Gewichtsindizes $\lambda - 1$ (Gewichtsabnahme $2\{1 + (\lambda - 1)\}$). Diese Zerlegung stimmt im Falle $\lambda = 1$ mit der unter 1) angegebenen überein; wir zeigen, daß sie sich in der Tat realisieren läßt.

Aus der kogredienten Faltung vom Defekt λ

$$(q_{n-\tau-\lambda} S^\tau | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda})$$

erhalten wir durch die Substitution: $R^\lambda \hookrightarrow T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}$ eine Form mit der beiden Reihen vom oberen Gewichtsindex $\tau + \lambda$ und $\tau + 1$:

$$(66.) \quad (R^\lambda S^\tau | p_{\tau+\lambda}) (S^{\tau+1} | p_{\tau+1}).$$

Die Reihe mit dem niedrigeren Gewichtsindex $\tau + 1$ gehört einer Normalform an; (66.) läßt also eine aus λ Grundfaltungen zusammengesetzte Faltung vom Defekt 1 zu, in der Reihenfolge von (65.):

$$(R^\lambda S^\tau) S^{\tau+\lambda}, S^{\tau+\lambda-1}, S^{\tau+\lambda-2}, \dots S^{\tau+1}.$$

Dies ergibt, unter Berücksichtigung von (31.) und (62.):

$$(q_{n-\tau-\lambda-1} R^\lambda S^\tau | S_{n-\tau-1} p_\tau) = \varepsilon (R^\lambda S^{\tau+1} | p_{\tau+\lambda+1}),$$

also eine Form, die aus (66.) durch Verwandlung von τ in $\tau + 1$ hervor-

geht, analog wie dies unter 1) mit (63.) der Fall war. Die $(\sigma-\tau)$ -fache Wiederholung des Prozesses führt zu der gesuchten Faltung:

$$(R^\lambda S^\sigma | p_{\sigma+\lambda}) = \varepsilon(q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}).$$

Bei dem ganzen Prozeß war allein die Normalformeigenschaft von S benutzt; die Betrachtung von T als Normalform führt auf den dualistischen Prozeß, mit vollständiger Umkehrung der Reihenfolge, nach den Formeln:

$$\begin{aligned} (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\sigma} R_\lambda p_{\sigma-\lambda}) &= \varepsilon(T_{n-\sigma} R_\lambda p_{\sigma-\lambda}), \text{ wo } R_\lambda \rightsquigarrow q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma, \\ (q_{n-\sigma} T^{\sigma-1} | T_{n-\sigma} R_\lambda p_{\sigma-\lambda-1}) &= \varepsilon(T_{n-\sigma+1} R_\lambda p_{\sigma-\lambda-1}), \\ &\vdots \\ (q_{n-\tau-1} T^\tau | T_{n-\tau-1} R_\lambda p_{\tau-\lambda}) &= \varepsilon(q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}). \end{aligned}$$

3) *Erzeugung kogredienter Faltungen vom Defekt λ aus kogredienten vom Defekt $\lambda-1$ und Grundfaltungen.* Die Gewichtsabnahme für kogrediente Faltungen vom Defekt λ beträgt: $2\lambda^2 = 2((\lambda-1)^2 + 2\lambda - 1)$, läßt also die Möglichkeit einer Zerlegung in eine kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-1$ und $2\lambda-1$ Grundfaltungen zu. Wir finden dieselbe am einfachsten, wenn wir erst speziell setzen: $n=2\lambda$. Die einzig mögliche kogrediente Faltung vom Defekt λ wird: $(S^2 | T_{\frac{n}{2}}) = (S^\lambda | T_\lambda)$; sie enthält eine Reihe u und x weniger als die Faltung vom Defekt $\lambda-1$ ebenderselben Reihen $(u S^\lambda | T_\lambda x)$. Wir setzen umgekehrt die Faltung vom Defekt λ aus Grundfaltungen, die das Verschwinden einer Reihe u und x bewirken (Gewichtsabnahme $2(n-1) = 2(2\lambda-1)$) und zugleich eine neue Symbolreihe R^λ erzeugen, und aus einer kogredienten Faltung vom Defekt $\lambda-1$ zusammen. Die einfachste Faltung, die das leistet, ist die folgende vom Defekt 1:

$$(s T^\lambda | \sigma p_\lambda) = \varepsilon(S^{2\lambda-1} | R_{\lambda-1} p_\lambda) = \varepsilon(R^\lambda | p_\lambda),$$

wo gesetzt ist:

$$R^{\lambda+1} = s T^\lambda, \quad s = S^1, \quad \sigma = S_1, \quad R^\lambda \rightsquigarrow \sigma R_{\lambda-1}.$$

Sie ist nach (65.) und (64.) zusammengesetzt aus den $2\lambda-1$ Grundfaltungen:

$$(67.) \quad T^\lambda S^\lambda, S^{\lambda-1}, \dots, S^1; \quad R^{\lambda+1} S^{\lambda+1}, S^{\lambda+2}, \dots, S^{2\lambda-1}.$$

Eine Faltung vom Defekt $\lambda-1$ ergibt, unter Berücksichtigung von (21.) und (62.):

$$(u S^\lambda | \sigma R_{\lambda-1} x) = \varepsilon(R^{\lambda+1} | S_1 x) = \varepsilon(s T^\lambda | S^\lambda x) = \varepsilon(S^\lambda | T_\lambda).$$

Der allgemeine Fall, für zwei Reihen S^e, T^e und beliebiges n , läßt sich nun direkt aus dem speziellen übertragen. An Stelle von (67.) treten die folgenden $2\lambda-1$ Grundfaltungen:

$$(68.) \quad T^e S^e, S^{e-1}, \dots S^{e-\lambda+1}; R^{e+1} S^{e+1}, S^{e+2}, \dots S^{e+\lambda-1}.$$

Die erste Hälfte der Faltungen ergibt die Form:

$$(q_{n-q-1} T^e | S_{n-q+\lambda-1} p_{q-\lambda}),$$

aus der durch die Substitutionen

$$S_{n-q+\lambda-1} p_{q-\lambda} \hookrightarrow w, \quad T^e w = R^{e+1}$$

und Anwendung der zweiten Hälfte der Faltungen hervorgeht:

$$(q_{n-q-\lambda} S^{e+\lambda-1} | R_{n-q-1} p_q).$$

Substituiert man:

$$q_{n-q-\lambda} S^{e+\lambda-1} \hookrightarrow y,$$

so kommt durch eine kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-1$:

$$(69.) \quad (q_{n-q-\lambda+1} S^e | y R_{n-q-1} p_{q-\lambda+1}).$$

Wir zeigen, daß dies die gesuchte Faltung vom Defekt λ ist. Substituiert man

$$R_{n-q-1} p_{q-\lambda+1} = R_{n-\lambda}$$

und beachtet, daß durch Auflösen von y

$$(q_{n-q-\lambda+1} R^\lambda | S_{n-q} y) = \varepsilon (q_{n-q-\lambda} S^{e+\lambda-1} | S_{n-q} p'_{q-1}) = 0$$

kommt, so ergibt sich nach (20.) für (69.) der Wert:

$$\varepsilon (S^e R^\lambda | p_{q+\lambda-1} y) = \varepsilon (q_{n-q-\lambda} S^{e+\lambda-1} | [S^e R^\lambda]_{n-q-\lambda} p_{q+\lambda-1}).$$

Diese Faltung ist aber vom Typus (43.), also äquivalent

$$(q_{n-q-\lambda} S^e | R_{n-q-1} p_{q-\lambda+1}) = \varepsilon (w T^e R_\lambda p_{q-\lambda+1}), \text{ wo } R_\lambda \hookrightarrow q_{n-q-\lambda} S^e.$$

Hier ist R_λ schon von der gewünschten Schlußform; der Ausdruck entspricht der Form $(s T^\lambda | S_\lambda x)$ im Spezialfall. Beachtet man nun, daß durch Auflösen von w und R_λ sich ergibt:

$$\begin{aligned} (w R^{n-\lambda} | T_{n-q} p_{q-\lambda+1}) &= \varepsilon (q'_{\lambda-1} R^{n-\lambda} | S_{n-q+\lambda-1} p_{q-\lambda}) \\ &= \varepsilon (q''_{n-q-1} S^e | S_{n-q+\lambda-1} p_{q-\lambda}) = 0, \end{aligned}$$

so kommt nach (21.) der Wert:

$$\begin{aligned} (w q_{n-q+\lambda-1} | T_{n-q} R_\lambda) &= \varepsilon (q_{n-q+\lambda-1} [T_{n-q} R_\lambda]^{e-\lambda} | S_{n-q+\lambda-1} p_{q-\lambda}) \\ &\text{äquivalent } (q_{n-q-\lambda} S^e | T_{n-q} p_{q-\lambda}). \end{aligned}$$

Bei dem ganzen Prozeß war nur die Normalformeigenschaft von S , nicht die von T benutzt; die kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-1$ zur Erzeugung von (69.) läßt sich also ersetzen durch $2\lambda-3$ Grundfaltungen und eine kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-2$, die ihrerseits wieder eine Zerlegung in Grundfaltungen zuläßt usf. Analog ergibt sich die Erzeugung bei Benutzung der Normalformeigenschaft von T und Anwendung des dualistischen Prozesses, d. h. der Grundfaltungen:

$$S^e T^e, T^{e+1}, \dots T^{e+\lambda-1}; R^{e-1} T^{e-1}, T^{e-2}, \dots T^{e-\lambda+1},$$

und einer zu (69.) dualistischen Faltung. Es entsteht jetzt die der vorigen äquivalente Faltung $(q_{n-\varrho-1} T^e | S_{n-\varrho} p_{\varrho-1})$.

Nimmt man die unter 2) erhaltene Zerlegung hinzu, so hat man in der Tat eine *Erzeugung der allgemeinsten Faltungen aus Grundfaltungen* erhalten. Es bleibt noch nachzuweisen, daß diese Erzeugung, abgesehen von der Vertauschung der Reihenfolge, *eindeutig* ist, d. h., daß jeder Faltung eine und nur eine Zahl α_ϱ von Grundfaltungen vom Typus ϱ , wo $\varrho = 1, 2, \dots, n-1$, zukommt.

Es seien m_ϱ die Gradzahlen in den Variablenreihen p_ϱ der Ausgangsform f , l_ϱ die Gradzahlen der durch Faltung entstandenen Form. Eine jede Grundfaltung vom Typus ϱ verwandelt die Gradzahlen

$$m_{\varrho-1}, m_\varrho, m_{\varrho+1} \text{ bzw. in } m_{\varrho-1} + 1, m_\varrho - 2, m_{\varrho+1} + 1.$$

Die α genügen also dem Gleichungssystem:

$$(70.) \quad m_\varrho - l_\varrho = -\alpha_{\varrho-1} + 2\alpha_\varrho - \alpha_{\varrho+1}, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n-1)$$

wo α_0 und $\alpha_n = 0$ zu setzen ist und dessen Determinante den Wert n hat*). Es sind dadurch die α also eindeutig bestimmt, und zwar nach Satz VIII als positive ganze Zahlen, was Bedingungen für die Differenzen $m_\varrho - l_\varrho$ ergibt.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten *vermöge der Relationen* (62.); es sind aber nicht etwa in dem Falle, daß die Relationen (62.) nicht gelten, die Schlußausdrücke den Anfangsausdrücken äquivalent. Die in § 6 gegebene Definition der Äquivalenz läßt nämlich auch die Fassung zu**): „Zwei Formen sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie sich unterscheiden durch Formen von höherer Faltung, d. h. durch Formen, die eine höhere Gewichtsabnahme aufweisen.“ Diese höhere Gewichtsabnahme hat stets statt, wenn die beiden in die Faltung eingehenden Reihen $q_{n-\varrho-1}$, $p_{\varrho-1}$ wirklich Variablenreihen sind, wie dies bei (41.), (42.), bei den in diesem Paragraphen als äquivalent auftretenden Faltungen, oder auch bei den äquivalenten Formen des Satz VII der Fall war. Sie braucht aber nicht stattzuhaben, wenn diese Reihen durch Substitution aus Symbolreihen abgeleitet sind, wie dies der Fall war bei den Formen dieses Paragraphen, die vermöge (62.) durch einander ausdrückbar waren. Man sieht

*) Bezeichnet A_n die n -reihige Determinante, so gilt die Rekursionsformel: $A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2}$; d. h. $A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2} = \dots = A_2 - A_1 = 1$, da $A_2 = 3$, $A_1 = 2$.

**) Vgl. dazu die Überlegung am Schlusse des nächsten Paragraphen.

leicht, daß die verschwindenden Formen zum Teil sogar ein höheres Gesamtgewicht aufweisen.

§ 9. Formenreihen. Reduktionssätze*).

Die in § 6 (Schluß) eingeführte *Formenreihe* definieren wir jetzt etwas schärfer als „die Gesamtheit der in den Koeffizienten linearen invarianten Bildungen einer gegebenen Ausgangsform, d. h. die Gesamtheit der durch Faltung in sich aus der Ausgangsform entstandenen Formen, in der Anordnung nach höheren Formen“.

Zur Erklärung der höheren Formen sei die Ausgangsform nach Satz VII als Produkt zweier Normalformen $S \cdot T$ gegeben; als *höhere Form* bezeichnen wir dann Formen mit höherer Faltung in sich, unter den Formen mit gleicher Faltung in sich speziell normierte. Genauer ausgedrückt heißt das: Es sei die Form A durch α_ϱ , die Form B durch β_ϱ Grundfaltungen vom Typus ϱ entstanden. B ist höher als A :

- 1) wenn in dem System von Ungleichungen: $\beta_\varrho \geq \alpha_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \dots, n-1$, mindestens für einen Wert ϱ das Ungleichheitszeichen gilt**);
- 2) wenn für alle Werte ϱ das Gleichheitszeichen gilt, aber weniger Symbolreihen zu einem einzigen Matrizenprodukt zusammengefaßt sind. Diese Normierung erweist sich als notwendig wegen der Reduktionen in § 8. Danach wird z. B.: $(S^{n-1} T_{n-1})$ höher als $(S^{n-1} [S^1 T^e]_{n-\varrho-1} p_\varrho)$.
- 3) Wenn für alle Werte ϱ das Gleichheitszeichen gilt und die Anzahl der zu einem Matrizenprodukt zusammengefaßten Symbolreihen die gleiche ist, wird B höher als A durch eine an sich willkürliche, aber ein für allemal festgelegte Normierung. Diese Normierung ist wegen der endlichen Anzahl der zu einem Wertesystem α gehörenden Formen stets möglich, läßt sich z. B. erreichen durch Auszeichnung der einen Form S (größere Anzahl von Symbolreihen S , höhere Summe der oberen Gewichtsindizes der Reihen S usw.).

*) Vgl. die entsprechenden Betrachtungen im ternären Gebiet. Diss. §§ 1—3.

**) Gilt in dem System von Ungleichungen zum Teil das Zeichen $>$, zum Teil das Zeichen $<$, so sind die Formen nicht miteinander vergleichbar, da einer Form, die aus einer anderen durch Faltung hervorgegangen, stets ein positives Wertesystem von Grundfaltungen zukommt, also in unserem Fall positive oder verschwindende Werte $\beta_\varrho - \alpha_\varrho$.

Wir können uns zweckmäßig die Formenreihe als $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von Gitterpunkten angeordnet denken, wobei die $n-1$ Richtungen den $n-1$ Grundfaltungen entsprechen. Einer jeden Form ist dann ein und nur ein Wertesystem α , d. h. ein positiv ganzzahliger Gitterpunkt zugeordnet, während die verschiedenen Formen, die zu einem Wertesystem α gehören, durch die obige Normierung in ihrer Anordnung eindeutig bestimmt sind. Eine beliebige Form der Formenreihe gibt die Ausgangsform einer neuen Formenreihe, die als Teil in der Gesamtformenreihe enthalten ist; und zwar als Teil enthalten in denjenigen Formen, die man von der neuen Ausgangsform aus, in den $n-1$ positiven Richtungen fortschreitend, erhält.

Vermöge Satz VIII und der allgemeinen Theorie der Reihenentwicklungen gelten nun für Formenreihen genau die Reduktionssätze des binären und ternären Gebiets (vgl. Diss. § 3), von denen wir den Hauptsatz noch kurz ableiten wollen. Wir schicken die Definition voraus:

„In einem gegebenen System von Formen sei eine gewisse endliche Anzahl von Formen zu einem Modul zusammengefaßt; als *reduzibel* bezeichnen wir eine Form, die sich ausdrücken läßt durch Formen, die Invarianten zum Faktor haben, oder durch „höhere Formen“; d. h. durch höhere Formen der Gesamtformenreihe, der die Form angehört, oder durch Formen, die die Symbole des Moduls in höherer Ordnung enthalten. Eine reduzible Formenreihe nennen wir *Reduzent*.“ Es gilt dann

Satz IX: Ist die Ausgangsform einer Formenreihe reduzibel dadurch, daß sie durch Faltung mit einem Reduzenten hervorgegangen ist, so ist die gesamte, aus dieser Ausgangsform entstehende Formenreihe reduzibel.

Zum Beweise bedenken wir, daß eine durch Faltung einer Form f mit einer zweiten g entstandene Form h sich wegen (45.) auffassen läßt als eine mehrere kogrediente Variablenreihen p_e, p'_e enthaltende Form f . Solche Formen lassen sich aber nach der allgemeinen Theorie der Reihenentwicklung darstellen als Polaren der Elementarkovarianten von f , dadurch daß man die Reihenentwicklung sukzessive auf je zwei kogrediente Variablenreihen p_e, p'_e anwendet. Dabei sind nach (38.) die auftretenden Elementarkovarianten die durch kogrediente Faltung erzeugten Formen. Da aber die Reihenfolge in der Anwendung der Reihenentwicklung noch willkürlich ist, können wir insbesondere eine solche Reihenfolge nehmen, die der Erzeugung der allgemeinen Fal-

tungen aus Grundfaltungen entspricht. Das entstehende System von Elementarkovarianten wird dann identisch mit der Formenreihe f ; und zwar ordnen sich die durch kogrediente Faltung von höherem Defekt entstandenen Formen in die durch Grundfaltungen entstandenen ein. Zu Polaren der Formenreihe f gelangt man aber auch bei beliebiger Reihenfolge der Reihenentwicklung, der ein zweites System von Elementarkovarianten entsprechen möge. Da nämlich die Formenreihe die Gesamtheit der invarianten Bildungen erschöpft, läßt sich jede Form des zweiten Systems linear ausdrücken durch Polaren der Formenreihe, und zwar Polaren derjenigen Formen, die gleiche oder höhere Gewichtsabnahme zeigen. Dies letztere folgt daraus, daß sich (vgl. § 7) die Polaren auffassen lassen als Simultaninvarianten einer Formenreihe H (52.), mit der Form h entsprechenden Gradzahlen, und der Formenreihe f . Jeder Faltung von H in sich entspricht eine Gewichtsabnahme, die sich nach Vornahme von Substitution (11.) auf die Symbolreihen und damit auf die Formen von f überträgt*).

Eine beliebige Form der Formenreihe h ist entstanden durch Faltung von h in sich; d. h. durch höhere Faltung von g mit f einerseits, durch Faltung von f oder g in sich andererseits. In beiden Fällen führt die Reihenentwicklung, ebenso wie oben bei der Ausgangsform h gezeigt, auf Polaren der Formenreihe f . Ist insbesondere f Reduzent, so ergibt sich eine Entwicklung nach Polaren des Reduzenten; die Formenreihe h wird also reduzibel.

Anwendungen des Satzes auf die Reduktion vollständiger Formensysteme ergeben sich analog wie im binären und ternären Gebiet.

*) Diese Betrachtung liegt auch der zweiten Fassung des Äquivalenzbegriffes (§ 8 Schluß) zugrunde. Weitere Ausführungen über die verschiedenen Systeme von Elementarkovarianten finden sich im ternären Gebiet bei Study, a. a. O., II. § 7. Satz 7) und 8). Vermöge unseres Satz VII gelten dieselben auch für n Variable.